Roman U. Sexl†/Helmuth K. Urbantke

Gravitation und Kosmologie

Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

5., überarbeitete Auflage

Universitätsbibliothek Wien

Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg · Berlin

Autoren
Prof. Dr Roman U. Sexl
Institut für Theoretische Physik
der Universität Wien
verstorben 1986

Prof. Dr. Helmuth Urbantke
Institut für Theoretische Physik
der Universität Wien
Boltzmanngasse 5
A-1090 Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP Einheitsaufnahme

Sexl, Roman:
Gravitation und Kosmologie : eine Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie / von Roman U. Sexl Helmut K. Urbantke. - 5. Aufl.. - Heidelberg ; Berlin : Spektrum. Akad. Verl., 2002
ISBN 3-8274-1342-7

Die ersten drei Auflagen dieses Buches erschienen im B.I.-Wissenschaftsverlag (Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, Mannheim).

5. überarbeitete Auflage 2002
© 2002 Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg, Berlin

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in fremde Sprachen, sind vorbehalten. Kein Teil des Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages fotokopiert oder in irgendeiner anderen Form reproduziert oder in eine von Maschinen verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden.

Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Anja Groth
Umschlaggestaltung: Kurt Bitsch, Birkenau
Druck und Verarbeitung: Ebner & Spiegel, Ulm

Das Umschlagbild zeigt farbcodiert die abgestrahlte Intensität auf der Oberfläche einer Akkretionsscheibe um ein rotierendes Loch aus einer Computersimulation gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie. (Abdruck mit freundlicher Genehmigung von N. Quien, R. Wehrse und C. Kindl, IWR und ITA, Universität Heidelberg.)

Vorwort zur 5. Auflage

Es ist mir ein Anliegen, auch im Vorwort zur nunmehr fünften Auflage dieses Lehrbuches meines Koautors, Lehrers und Freundes, Roman Ulrich Sexl, zu gedenken. Ich zitiere daher zunächst aus meinem Vorwort zur dritten Auflage.

Am 10. Juli 1986 ist R. U. Sexl nach fast einjährigem Leiden verschieden. Nachrufe betreffend Person und Wirken sind an mehreren Stellen erschienen.[1] So möchte ich hier nur die entscheidende Rolle hervorstreichen, die Sexl bei der Genesis dieses Buches hatte.

Gleich zu Beginn seiner Vorlesungstätigkeit zur Allgemeinen Relativitätstheorie ist ihm das Fehlen zeitgemäßer deutschsprachiger Lehrbücher zu diesem Thema klargeworden, und der B. I.-Verlag hat auch auf seine Initiative sofort positiv reagiert – in der Tat so schnell, dass ohne Ko-Autor der gewünschte Termin nicht zu halten war. Verlagsinterne Umschichtungen brachten eine nützliche Vezögerung: sie gab Gelegenheit, neuere Ergebnisse über Schwarze Löcher zu verarbeiten.

Wesentlich für Sexls Funktion als Motor des Projekts war sein Sinn für praktische Kompromisse und sein waches Interesse an Neuentwicklungen zusammen mit einer erstaunlichen Fähigkeit und Sicherheit, die Bedeutung und Tragweite derselben einzuschätzen. Dabei hat sich der Theoretiker dem Experiment immer mehr zugewandt. So hat er auch in der zweiten Auflage die undankbare Aufgabe des experimentellen ‚updating' übernommen, während die theoretischen Ergänzungen von mir stammen.

Sein erwachendes Interesse für die Rolle des Computers konnte in diesem Werk keinen Niederschlag mehr finden; spätere Auflagen zu seinen Lebzeiten hätten davon zweifellos Zeugnis abgelegt, dem Leser die entsprechenden Perspektiven eröffnend.

Die vorliegende fünfte Auflage basiert auf der LaTeX-Version, die von Herrn Dr. Franz Hinterleitner für die vierte Auflage anläßlich der Übernahme des Werkes vom BI Wissenschaftsverlag in den Spektrum Akademischen Verlag angefertigt wurde. Für die Mithilfe bei der weiteren Computer-Adaption des Text- und Abbildungsmaterials bin ich Herrn Prof. Helmut Kühnelt und Herrn

[1] Wiss. Nachr., Jan. 87; Eur. J. Phys. **8**, 58 (1987); Phys. Bl. **42**, 390 (1986); PhuD **4**, 257 (1986); GRG **19**, 649 (1987).

cand. mag. Ulrich Kiermayr zu größtem Dank verpflichtet, wiewohl die Verantwortung für sämtliche Mängel selbstverständlich allein bei mir liegt. Diesbezüglich möchte ich mich bei allen Leserinnen und Lesern für Fehlermeldungen und Anregungen in Vergangenheit und Zukunft sehr bedanken: die heutige elektronische Kommunikation würde es erlauben, daß mir solche Meldungen auf helmuth.urbantke@galileo.thp.univie.ac.at zukommen, von mir gesammelt werden, und Korrekturen dann über ein link bereits auf der homepage meines Instituts, http:/www.thp.univie.ac.at/, zugänglich sind, bevor sie noch in der nächsten Auflage berücksichtigt werden. Angemerkt sei jedoch, daß die neue Orthographie noch nicht in das Werk übernommen wurde.

Anläßlich der Umarbeitungen für diese Auflage konnten eine ganze Reihe von Fehlern in der letzten beseitigt werden, ebenso einige Unklarheiten. Vor allem aber konnte die neue Situation in der Kosmologie (unter Mithilfe von Prof. Helmut Rumpf) bereits voll berücksichtigt werden: es ist zu hoffen, daß die Zukunft eher eine Konsolidierung als eine abermalige Trendumkehr bringen wird. Von einer Beschreibung der allerneuesten Spekulationen über die ersten 10^{-31} Sekunden des Universums (alte, neue, chaotische Inflation, ekpyrotisches, zyklisches Universum, pre-big-bang-scenario etc.) habe ich aber abgesehen.

Leser, die aus der Richtung Elementarteilchenphysik kommen, möchte ich hier ausdrücklich auf das (bereits in der 2. Auflage aufgenommene) Kapitel 11 aufmerksam machen: es scheint von der bisherigen Leserschaft relativ wenig wahrgenommen worden zu sein!

Ich hoffe weiterhin, auch in dieser Auflage des Buches den Stempel, den ihm R. U. Sexl gegeben hat, trotz unserer im Detail eher komplementären Neigungen nicht ungebührlich verwischt zu haben.

Wien, im Juni 2002

Helmuth K. Urbantke

Vorwort zur 2. Auflage

In den letzten beiden Jahrzehnten hat sich die Stellung der allgemeinen Relativitätstheorie innerhalb der Gesamtphysik wesentlich verändert. Neue Entdeckungen, wie Quasare, Pulsare, die kosmische Hintergrundstrahlung und möglicherweise schwarze Löcher haben das Interesse an Einsteins Theorien erstarken lassen. Neue Präzisionsmessungen der berühmten „drei Tests der allgemeinen Relativitätstheorie“ und anderer Effekte haben das Vertrauen in die Theorie gestärkt. Neue mathematische Techniken haben es ermöglicht, die globale Struktur von Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen in großer Allgemeinheit zu untersuchen, und auch die Behandlung dieser nichtlinearen Gleichungen mit Hilfe von Computern ist in greifbare Nähe gerüc. Schließlich haben die Eichtheorien und die „vereinheitlichten“ Theorien der Teilchenphysik eine Struktur angenommen, die große formale Ähnlichkeiten mit der allgemeinen Relativitätstheorie hat.

Die vorliegende Einführung in die Einsteinsche Gravitationstheorie ist aus einem von den Autoren am Institut für Theoretische Physik der Universität Wien mehrfach gehaltenen Vorlesungszyklus entstanden. Dabei sollen die ersten sechs Kapitel des Buches einen Überblick über die „klassischen" Resultate der Theorie geben, während die Kapitel 7-11 ausgewählte Aspekte der Entwicklung der letzten 20 Jahre behandeln. Die Auswahl richtete sich nach zwei Kriterien: Es wurden nur Probleme berücksichtigt, die im Zusammenhang mit astrophysikalischen Fragen stehen oder solche, deren Methodik und Problematik auch in anderen Teilgebieten der Physik von Bedeutung ist.

Diese Auswahl wurde vor allem in Hinblick auf Leser getroffen, die einen Überblick über das Gebiet der Gravitationstheorie suchen – wie man auch Elektrodynamik, Thermodynamik und andere Disziplinen der Physik erlernt – ohne sich aber auf Relativitätstheorie spezialisieren zu wollen. Wenn dadurch auch viele wichtige Teilgebiete der Gravitationstheorie unberücksichtigt blieben, so steht dem vielleicht der Vorteil eines überschaubaren ersten Überblicks gegenüber, der im Umfang etwa einer zweisemestrigen dreistündigen Vorlesung entspricht.

Didaktisch war vor allem das Problem der Einführung in die Riemannsche Geometrie schwer zu lösen, da hier ein Bruch den alten und den neuen Stil der Mathematik, entsprechend der Beschreibung von Bezugssystemen durch Koordinaten oder durch Vierbeine trennt, wobei letztere – auf E. Cartan zurückgehend – die Analogie zu den Eichtheorien der Teilchenphysik deutlicher macht. Wir geben daher zunächst in Kapitel 2 eine erste Einführung in die Riemannsche Geometrie „alten Stils", das heißt auf Koordinatenbasis – die für die Lektüre der meisten Originalarbeiten noch immer unentbehrlich ist. In Kapitel 7 folgt dann – ohne Anspruch auf restlose mathematische Strenge – die moderne Formulierung, die schließlich in Kapitel 11 für die Verwendung in Eichtheorien ausgebaut wird. In der vorliegenden zweiten Auflage wurden einige Fehler berichtigt, die Angaben zu experimentellen Daten auf den neuesten Stand gebracht, sowie zwei Erweiterungen vorgenommen. Die eine betrifft die Theorie der schwarzen Löcher, die vor allem durch die Entdeckung wichtiger Quanteneffekte im letzten Jahrzehnt ein zentrales Forschungsgebiet darstellte und vielleicht entscheidende Hinweise für das noch ungelöste Problem der Quantisierung der Gravitationstheorie gibt. Die andere betrifft den Vergleich der Gravitationstheorie mit der Struktur von Eichtheorien, deren bedeutende Rolle innerhalb der Teilchenphysik bereits erwähnt wurde und die auf eine vereinheitlichte Theorie aller Wechselwirkungen hoffen lassen. Allerdings war es im Rahmen dieses Buches nicht möglich, diese neuen Punkte in großer Ausführlichkeit darzustellen. In der Zwischenzeit sind aber – vor allem aus Anlaß der 100. Wiederkehr des Geburtstages von Albert Einstein – eine große Zahl ausgezeichneter Überblicksartikel namhafter Autoren erschienen, die eine vollständige Übersicht über die Originalliteratur erlauben. Diese Werke sind im Literaturverzeichnis zitiert.

Vielen Kollegen schulden wir Dank für Rat und Hilfe bei der Fertigstellung

dieses Buches, wobei vor allem Prof. Dr. P. Aichelburg, Dr. R. Beig, Prof. Dr. J. Ehlers, Prof. Dr. W. Kundt, Dr. R. Mansouri, Prof. Dr. R. Sachs, Dr. W. Schmid, Dr. E. Streeruwitz und Prof. Dr. W. Thirring zu nennen sind. Frau F. Wagner und E. Klug danken wir für ihre Mühe bei den komplizierten Schreibarbeiten für die verschiedenen Manuskriptversionen dieses Buches, ebenso den Herren Dr. R. Bertlmann und Dr. H. Prossinger für die Anfertigungen der Abbildungsvorlagen.

Bei der Erstellung der zweiten Auflage haben besonders Herr Dr. R. Beig, Prof. Dr. F. Hehl, Dr. H. Rumpf und Mag. R. Wallner wertvolle Anregungen gegeben. Nicht namentlich genannt können jene zahlreichen Studenten unseres Instituts werden, die auf Fehler in der ersten Auflage aufmerksam machten. Der „Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung in Österreich" hat unsere Arbeit jahrelang unterstützt und es ermöglicht, die notwendigen internationalen Kontakte aufrechtzuerhalten. Die gemeinsamen Seminare mit anderen Forschungsinstituten und die Einladung von Gastdozenten erlaubten es uns, die internationale Entwicklung aktiv mitzuverfolgen und sie in diesem Buch im Überblick darzustellen.

Wien, im Mai 1981

Roman U. Sexl
Helmuth K. Urbantke

Inhaltsverzeichnis

0 Einheiten und Größenordnungen
0.1 Einige Naturkonstante . . . . . .
0.2 Massen . . . . . .
0.3 Längen . . . . . .
0.4 Zeiten . . . . . .
0.5 Leuchtkraft und Helligkeit . . . . . .
0.6 Temperaturen . . . . . .
0.7 Durchlässigkeit der Erdatmosphäre . . . . . .
0.8 Mathematische Notationskonventionen . . . . . .

1 Physikalische Grundlagen
1.1 Beschleunigungen in der speziellen Relativitätstheorie . . . . . .
1.2 Das Äquivalenzprinzip . . . . . .
1.3 Bewegung im Gravitationsfeld . . . . . .
1.4 Die Newtonsche Näherung . . . . . .

2 Riemannsche Geometrie
2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . . .
2.2 Vektoren und Tensoren . . . . . .
2.3 Tensoralgebra . . . . . .
2.4 Der metrische Tensor . . . . . .
2.5 Riemannsche Normalkoordinaten . . . . . .
2.6 Tensoranalysis . . . . . .
2.7 Der Riemannsche Krümmungstensor . . . . . .
2.8 Räume konstanter Krümmung . . . . . .
2.9 Symmetriegruppen und Killing-Vektoren . . . . . .
2.10 Invariante Tensorfelder und Lie-Ableitungen . . . . . .

3 Die Einsteinschen Feldgleichungen
3.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen . . . . . .
3.2 Die lineare Näherung . . . . . .
3.3 Die Schwarzschild-Metrik . . . . . .

3.4 Variationsprinzip 70

4 Experimentelle Tests **77**
4.1 Äquivalenzprinzip und Eötvös-Experiment 77
4.1.1 Die Situation in der Newtonschen Theorie 78
4.1.2 Die Situation in der allgemeinen Relativitätstheorie . . 79
4.1.3 Das Eötvös-Dicke Experiment 81
4.1.4 Die Gravitationsbeschleunigung von Positronen 82
4.1.5 Konstanz der Feinstrukturkonstante 84
4.2 Die Rotverschiebung von Spektrallinien 85
4.3 Lichtablenkung und Perihelverschiebung 87
4.4 Entfernungs- und Zeitmessungen im Sonnensystem 95
4.4.1 Radarreflexion an der Venus 95
4.4.2 Die Messung der Erde-Mond-Entfernung 96
4.4.3 Zeitdilatation: Das Hafele-Keating-Experiment 97
4.5 Machsches Prinzip und Thirring-Lense-Effekt 99

5 Kosmologie **109**
5.1 Das kosmologische Prinzip 110
5.2 Newtonsche Kosmologie 111
5.3 Relativistische Hydrodynamik 115
5.4 Kinematik von Geschwindigkeitsfeldern 119
5.5 Friedmann-Universum I: Thermische Hintergrundstrahlung . . 122
5.6 Friedmann-Universum II: Raumkrümmung und Nebelzählung . 128
5.7 Friedmann-Universum III: Zeitentwicklung 132
5.8 Die Rotverschiebungs-Entfernungsrelation 142
5.9 Das frühe Universum 145

6 Gravitationswellen **153**
6.1 Linearisierte Theorie 154
6.1.1 Vakuumfelder und ebene Wellen 154
6.1.2 Teilchen im Feld der Welle 156
6.1.3 Energiedichte und Energiestrom 159
6.1.4 Ausstrahlung 161
6.2 Strahlung von Teilchen im Schwarzschild-Feld 163
6.3 Nachweis von Gravitationswellen 167

7 Neue differentialgeometrische Methoden **171**
7.1 Tangentialvektoren und Tangentialraum 172
7.2 Differentiale und der Kotangentialraum 175
7.3 Die Tensoralgebra 178
7.4 Die äußere Algebra 180
7.5 Äußere Differentialformen 183
7.6 Übertragungen und Riemann-Geometrie 186

7.7 Berechnung des Krümmungstensors spezieller Metriken 192
7.7.1 Das Robertson-Walker-Linienelement 192
7.7.2 Drehinvariante Linienelemente 195
7.8 Integration auf Mannigfaltigkeiten 198

8 Sternbau und Gravitationskollaps 205
8.1 Elementare Theorie entarteter Sterne 205
8.1.1 Die Zustandsgleichung normaler Sterne 206
8.1.2 Die Zustandsgleichung entarteter Materie 207
8.1.3 Weiße Zwerge 209
8.1.4 Neutronensterne 211
8.2 Innenraum: Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung 214
8.3 Energiedichte und Bindungsenergie 217
8.4 Geometrie der Schwarzschild-Metrik 220
8.4.1 Die Außenraumgeometrie 220
8.4.2 Die Innenraumgeometrie 227
8.5 Gravitationskollaps 234
8.6 Die Kerr-Metrik 240
8.7 Allgemeines über Kollaps und Schwarze Löcher 246
8.8 Penrose-Prozesse und Oberflächensatz 248
8.9 „Thermodynamik" schwarzer Löcher 253
8.10 Der Hawking-Effekt 258
8.11 Die Suche nach Schwarzen Löchern 262

9 Felder im Riemannschen Raum 265
9.1 Kausalität und Ausbreitungsvorgänge 266
9.2 Das skalare Feld 268
9.3 Das elektromagnetische Feld 273
9.4 Spinorfelder und die Dirac-Gleichung 278
9.5 Gravitationswellen als Störungen einer Hintergrundmetrik . . . 283

10 Gravitation und Feldtheorie 287
10.1 Das Gravitationsfeld als Spin-2-Feld im Minkowski-Raum . . . 287
10.2 Renormierung der Metrik. Nichtlinearität 290
10.3 Verallgemeinerte Gravitationstheorien 297
10.3.1 Die Veränderlichkeit der Gravitationskonstante 299
10.3.2 Die Veränderlichkeit der Ruhmassen 300

11 Gravitation und Eichtheorie 301
11.1 Übertragungen in Vektorbündeln 302
11.2 Parallelverschiebung und Krümmungsform 308
11.3 Faserметrik. G-Strukturen 312
11.4 Topologische Quantenzahlen 318
11.5 Beispiele. Eichtheorien 326

11.6 Ist die Gravitationstheorie eine Eichtheorie? 337
11.7 Ausblick 346

A Bibliographie **349**

Bibliographie **349**
A.1 Zitierte Bücher 349
A.2 Einige mathematische Lehrbücher 354

Register **355**

Kapitel 0

Einheiten und Größenordnungen

Wir werden in diesem Buch ein Einheitensystem benutzen, in dem die Lichtgeschwindigkeit c gleich Eins gesetzt wird, da das für formale Manipulationen am zweckmäßigsten ist. In allen Relationen, die mit dem Experiment verglichen werden sollen, werden wir aber die entsprechenden Faktoren c wieder hinzufügen, um den Zusammenhang mit den üblichen cgs-Einheiten herzustellen.

Die folgenden Tabellen enthalten die für unsere Zwecke relevanten Zahlenwerte, wobei wir Angaben, die nur eine Größenordnung verdeutlichen sollen, durch einen Stern (*) gekennzeichnet haben.

0.1 Einige Naturkonstante

Newtonsche Gravitationskonstante:

$$G = 6.668 \cdot 10^{-8} \mathrm{g}^{-1} \mathrm{cm}^3 \, \mathrm{s}^{-2}$$

Lichtgeschwindigkeit:

$$c = 2.99793 \cdot 10^{10} \mathrm{cm} \, \mathrm{s}^{-1}$$

Plancksche Konstante:

$$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-27} \mathrm{g} \, \mathrm{cm}^2 \, \mathrm{s}^{-1}$$

Hiervon leiten sich ab: $2G/c^2 = 1.484 \cdot 10^{-28} \mathrm{g}^{-1} \mathrm{cm}$
Einsteinsche Gravitationskonstante: $\kappa := 8\pi G/c^2 = 1.865 \cdot 10^{-27} \mathrm{g}^{-1} \mathrm{cm}$
Planck-Länge: $l_P := \sqrt{(G\hbar/c^3)} \approx 10^{-33} \mathrm{cm}$
Planck-Masse: $\mathcal{M}_P := \sqrt{c\hbar/G} \approx 10^{-5} \mathrm{g}$.

0.2 Massen

$\mathcal{M}$ = Masse in Gramm, $2M := 2G\mathcal{M}/c^2$ = Schwarzschildradius der Masse in cm, A = Baryonenzahl[1]. Die Sonnenmasse $\mathcal{M}_\odot$ ist die übliche Einheit in der Astronomie.

	$\mathcal{M}$(g)	$2M$(cm)	A
Elektron	$0.91 \cdot 10^{-27}$	$1.35 \cdot 10^{-55}$	–
Proton	$1.67 \cdot 10^{-24}$	$2.48 \cdot 10^{-52}$	1
Erde	$6 \cdot 10^{27}$	0.9	$3.6 \cdot 10^{51}$
Sonne ($\mathcal{M}_\odot$)	$2 \cdot 10^{33}$	$3 \cdot 10^{5}$	$1.2 \cdot 10^{57}$
*Kugelsternhaufen ($10^6 \mathcal{M}_\odot$)	10^{39}	10^{11}	10^{63}
*Galaxis ($10^{10} \mathcal{M}_\odot$)	10^{43}	10^{15}	10^{67}
*Haufen von Galaxien ($10^{14} \mathcal{M}_\odot$)	10^{47}	10^{19}	10^{71}
*Universum ($10^{21} \mathcal{M}_\odot$)	10^{54}	10^{27}	10^{78}

0.3 Längen

L gibt die Länge in cm. $t = L/c$ ist die Zeit, die Licht braucht, um die entsprechende Länge zu durchlaufen.

In der Astronomie sind folgende Längeneinheiten gebräuchlich:

Parsec (pc) $= 3.1 \cdot 10^{18}$ cm

Lichtjahr (Lj) $= 9.5 \cdot 10^{17}$ cm

Astronomische Einheit (AE) $= 1.5 \cdot 10^{13}$ cm
(1 AE = mittlerer Radius der Erdbahn)

[1] Die Baryonenzahl einer Masse ist normalerweise gleich der Zahl der in der Masse enthaltenen Nukleonen (Protonen, Neutronen). Bei Neutronensternen liegen etwas kompliziertere Verhältnisse vor: siehe Abschnitt 8.1.

	L(cm)	t(s)
Erdradius	$6.4 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-2}$
Sonnenradius	$7 \cdot 10^{10}$	2
*Kugelsternhaufen	10^{20}	10^{10}
*Galaxis	10^{23}	10^{13}
*Haufen von Galaxien	10^{26}	10^{16}
*Universum	10^{28}	10^{18}

0.4 Zeiten

Die übliche astronomische Zeiteinheit ist 1 Jahr $= 3.16 \cdot 10^7$ s.

	t(s)	t(Jahre)
*Erdalter	$1.4 \cdot 10^{17}$	$4.5 \cdot 10^9$
*Alter des Universums („Hubble-Alter")	$6 \cdot 10^{17}$	$2 \cdot 10^{10}$

0.5 Leuchtkraft und Helligkeit

Die Leuchtkraft der Sonne ist

$$L_\odot = 4 \cdot 10^{33}\,\mathrm{erg\,s^{-1}} \mathrel{\widehat{=}} 4 \cdot 10^{12}\,\mathrm{g\,s^{-1}}.$$

Die Leuchtkraft von Galaxien etc. kann daraus durch Multiplikation mit der Zahl der Sterne im entsprechenden System abgeschätzt werden. Die scheinbare Helligkeit l eines Sternes hängt mit seiner Größenklasse m gemäß

$$m = \mathrm{const.} - 2.5 \lg l \tag{0.1}$$

zusammen. Die Konstante ist so gewählt, daß dem Polarstern $m = 2.12$ zugeordnet wird.

0.6 Temperaturen

Der Umrechnungsfaktor zwischen Temperatur T und Energie E ist durch E $k_B T$ gegeben (k_B=Boltzmann-Konstante):

$$1\,\mathrm{K} = 1,38 \cdot 10^{-16}\mathrm{erg} = 8,65 \cdot 10^{-5}\mathrm{eV}$$
$$1\,\mathrm{eV} = 1,16 \cdot 10^{4}\,\mathrm{K}$$

0.7 Durchlässigkeit der Erdatmosphäre

Die untenstehende Abbildung gibt die Höhe in (bzw. den Bruchteil) der Erdatmosphäre an, bei der einfallende elektromagnetische Strahlung auf die Hälfte abgesunken ist. Die Abbildung zeigt deutlich das Radiofenster und das optische Fenster, bei denen Astronomie von der Erdoberfläche her möglich ist. Im Röntgengebiet können Detektoren mit Ballonen in ausreichende Höhe gebracht werden; im ultravioletten Spektralbereich ist der Einsatz von Satelliten erforderlich.

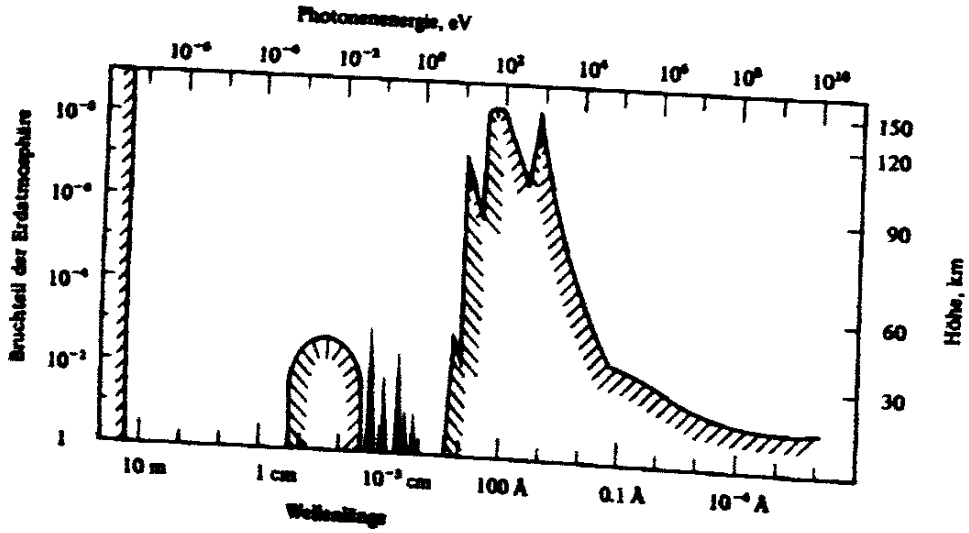

Abbildung 1: Optisches Fenster und Radiofenster der Erdatmosphäre.

0.8 Mathematische Notationskonventionen

Eine durch eine Formel definierte Größe G erscheint als $G := \ldots$

Wir verwenden eine Metrik $\eta_{ik} := \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ für die Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie. Lateinische Indizes gehen von 0 bis 3, griechische von 1 bis 3. Über doppelt vorkommende Indizes ist stets über den entsprechenden Bereich zu summieren (Einsteinsche Summenkonvention).

Den antisymmetrischen bzw. symmetrischen Teil eines beliebigen Tensors $Q_{i\ldots k}$ bezeichnen wir mit $Q_{[i\ldots k]}$ bzw. $Q_{(i\ldots k)}$, also für Q_{ik}:

$$Q_{[ik]} := \tfrac{1}{2!}(Q_{ik} - Q_{ki}) \quad \text{bzw.} \quad Q_{(ik)} = \tfrac{1}{2!}(Q_{ik} + Q_{ki}); \tag{0.2}$$

für Q_{ikj}:

$$\begin{aligned} Q_{[ikj]} &:= \tfrac{1}{3!}(Q_{ikj} + Q_{kji} + Q_{jik} - Q_{kij} - Q_{jki} - Q_{ijk}), \\ Q_{(ikj)} &:= \tfrac{1}{3!}(Q_{ikj} + Q_{kji} + Q_{jik} + Q_{kij} + Q_{jki} + Q_{ijk}), \end{aligned} \tag{0.3}$$

usw. (Summe über alle Indexpermutationen, bei $_{[\ldots]}$ versehen mit dem Vorzeichen + bzw. − für gerade bzw. ungerade Permutationen).

Die Konvention über den Riemann-Tensor ist durch Gleichung (2.7.2) festgelegt, der Ricci-Tensor R_{ik} durch $R_{ik} = R^j{}_{ikj}$ gegeben.

Ferner benötigen wir das Kronecker-Symbol $\delta_j^{\,k}$

$$\delta_i^{\,k} := \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \tag{0.4}$$

und das vollständig antisymmetrische Symbol $\epsilon(iklm)$, wobei wir $\epsilon(0123) := 1$ festsetzen. Der Pseudotensor ϵ_{iklm} ist durch

$$\begin{aligned} \epsilon_{iklm} &:= \sqrt{-g}\,\epsilon(iklm), \\ \epsilon^{iklm} &= -\frac{\epsilon(iklm)}{\sqrt{-g}} \end{aligned} \tag{0.5}$$

gegeben.

Bei gewöhnlichen partiellen Ableitungen $\partial F/\partial x^i$ verwenden wir häufig die Kommanotation $F_{,i}$, während kovariante Ableitungen durch ein Semikolon gekennzeichnet werden (vgl. (2.6.12)).

Das Linienelement der zweidimensionalen Einheitssphäre kürzen wir meist wie in (3.3.6) mit $d\Omega^2$ ab. Linienelemente dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten werden meistens durch $d\sigma^2$ bezeichnet.

Kapitel 1

Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir einige Grundbegriffe der speziellen Relativitätstheorie kurz wiederholen, wobei wir *beschleunigten* Bezugssystemen besondere Beachtung schenken: die auf beliebige Bezugssysteme umgeschriebene spezielle Theorie wird die *mathematische* Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie bilden und gleichzeitig auch gestatten, Verwirrungen und Mißverständnisse im Zusammenhang mit dem sogenannten Uhrenparadoxon[1] zu klären. Die physikalische Grundidee der allgemeinen Relativitätstheorie dagegen ist das Äquivalenzprinzip, das in diesem Kapitel in vorläufiger Form eingeführt werden soll.

1.1 Beschleunigungen in der speziellen Relativitätstheorie

Grundlegend für die spezielle Relativitätstheorie[2] ist die Existenz von *Inertialsystemen*, d. h. einer Klasse von gegeneinander gleichförmig bewegten Bezugssystemen, in denen die Weltlinie eines keinerlei äußeren Kräften unterworfenen Körpers die einfache Form

$$x^i = v^i s \tag{1.1.1}$$

hat. Dabei ist v^i ein konstanter Einheitsvektor

$$v^i v_i = 1. \tag{1.1.2}$$

[1] Als Beispiel wäre hier der Artikel von M. Sachs, Physics Today, Sept. 1971, p. 23 und die darauffolgende Diskussion anzuführen; siehe auch L. Marder (1971).

[2] Siehe z. B. Sexl & Urbantke (1992).

und s die Eigenzeit des Körpers. In diesen Inertialsystemen nimmt das *Linienelement* ds die Form

$$ds^2 = dt^2 - d\boldsymbol{x}^2 =: \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{1.1.3}$$

an. Diese Form ist invariant unter den *Lorentz-Transformationen* zwischen Inertialsystemen

$$x^i = a^i{}_k\, x^{\bar{k}} + b^i, \tag{1.1.4}$$

welche die Relation

$$a^i{}_l\, a^k{}_m\, \eta_{ik} = \eta_{lm} \tag{1.1.5}$$

erfüllen. Die homogenen Lorentz-Transformationen ($b^i = 0$) bilden die *Lorentz-Gruppe*, die inhomogenen ($b^i \neq 0$) die *Poincaré-Gruppe*.

Das Linienelement (1.1.3) erlaubt es, Abstände auf *Weltlinien*

$$x^i = x^i(\lambda) \tag{1.1.6}$$

invariant zu messen (λ ist ein beliebiger Parameter). In Abbildung 1.1 sind eine zeitartige Weltlinie ($ds^2 > 0$), der Lichtkegel ($ds^2 = 0$) und eine raumartige Linie ($ds^2 < 0$) eingezeichnet.[3]

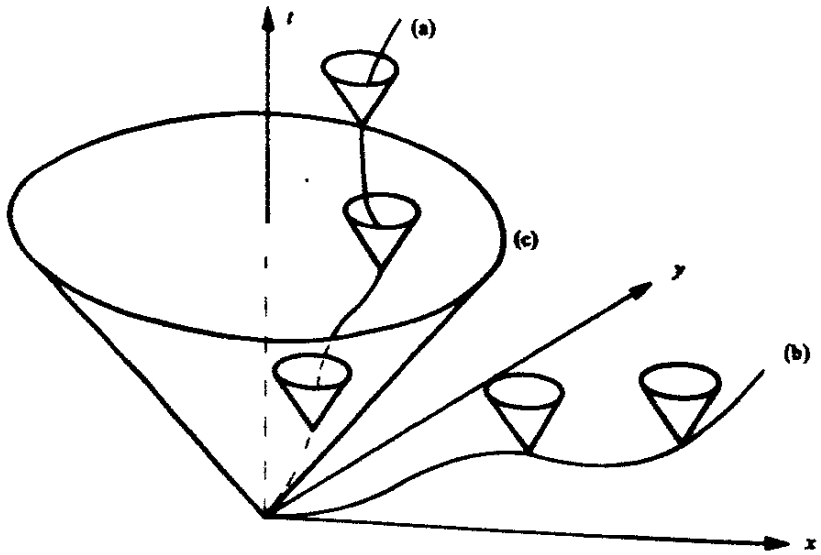

Abbildung 1.1: Zeitartige (a), raumartige (b) Linien und der Lichtkegel (c).

Transformiert man auf ein momentan mit dem Teilchen mitbewegtes Bezugssystem $(\bar{t}, \bar{x})$, so gilt dort $ds = d\bar{t}$, d. h., eine entlang der Weltlinie bewegte

[3] Wir beschränken uns dabei wie üblich auf eine Raum- und eine Zeitdimension; in der Abbildung ist noch eine zweite Raumdimension angedeutet.

Uhr mißt die Zeit ds. Im ursprünglichen Koordinatensystem (t, x) ist diese Eigenzeit durch

$$ds = \sqrt{dt^2 - dx^2} \tag{1.1.7}$$

gegeben. Bezeichnen wir die momentane Geschwindigkeit mit $dx/dt = v(t)$, so erhalten wir für das invariante Längenmaß entlang der zeitartigen Weltlinie

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B dt\, \sqrt{1 - v^2(t)}. \tag{1.1.8}$$

Eine bewegte Uhr zeigt daher eine geringere Zeit an als eine im Koordinatensystem (t, x) ruhende, die dt angibt. Daraus ergibt sich das bekannte *Uhrenproblem*[4] (Uhrenparadoxon), das wir im folgenden kurz behandeln wollen.

Wir betrachten zwei Uhren, die zuerst in einem Raum-Zeitpunkt A synchronisiert und dann entlang zweier verschiedener Weltlinien nach B transportiert werden (Abbildung 1.2). Dabei setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß Uhr ① im Ursprung des Koordinatensystems $x = 0$ ruht. Die Zeit, die ① in B angibt, ist durch $S_1 = T$ gegeben. Die andere Uhr, ② , soll dagegen anfänglich von $x = 0$ wegbewegt werden und später allmählich wieder zu $x = 0$ zurückkehren.[5] Für ② wird entlang des Weges eine Eigenzeit

$$S_2 = \int_A^B ds_2 = \int_0^T dt\, \sqrt{1 - v^2(t)} \tag{1.1.9}$$

vergehen, die offenbar kleiner als $S_1 = T$ ist, denn es gilt $S_2 = T\sqrt{1 - \bar{v}^2}$, wobei $\bar{v}$ eine geeignete gemittelte Geschwindigkeit ist. Das scheinbare Paradoxon ergibt sich, wenn man Uhr ② als ruhend und ① als dagegen bewegt betrachtet. Dann sollte ① bei der Zusammenkunft in B die Zeit (1.1.9) anzeigen, während ② $S_2 = T$ angeben sollte.

Der Irrtum bei dieser Argumentation liegt darin, daß man zwar durch eine geeignete Transformation auf ein anderes Koordinatensystem $(\tilde{t}, \tilde{x})$ die Weltlinie von ② zu $\tilde{x} = 0$ machen kann, das so definierte System aber ein krummliniges Koordinatensystem ist. Offenbar ist die Zeitachse $\tilde{t}$ durch die gekrümmte Weltlinie der Uhr ② in Abbildung 1.2 gegeben. Anders ausgedrückt, das System, in dem ② ruht, ist kein Inertialsystem. Ein derartiges Koordiatensystem ist natürlich in der speziellen Relativitätstheorie ebenso zulässig, wie es etwa Polarkoordinaten (die ja auch krummlinig sind) in der Ebene sind. Nur darf man eben nicht das gewöhnliche Linienelement in der Ebene $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$ durch $d\sigma^2 = dr^2 + do^2$ ersetzen, sondern muß geeignet transformieren[6].

---

[4] Bezüglich experimenteller Untersuchungen siehe Abschnitt 4.4.c

[5] Uhr ① entspricht im bekannten Beispiel dem Zwilling, der auf der Erde bleibt, ② dem in der Rakete mitfliegenden.

[6] Die hier kurz erörterten Probleme sind ausführlich bei H. Heintzmann und P. Mittelstaedt, Springer Tracts in Modern Physics **47**, 185 (1968) diskutiert.

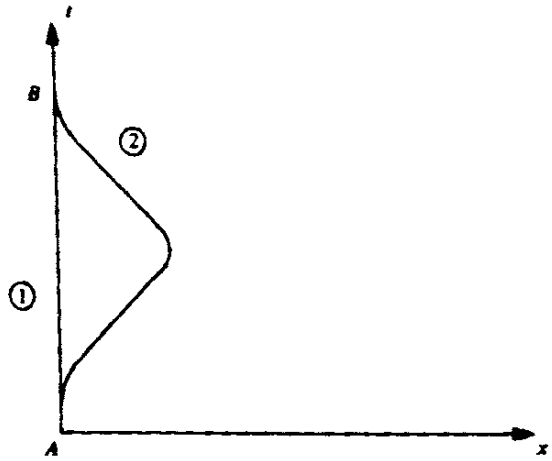

Abbildung 1.2: Die Weltlinien der Uhren ① und ②.

Wenn wir das System der Uhr ② als gleichberechtigt zulassen wollen, müssen wir daher zuvor die Theorie der Transformationen auf beschleunigte, d. h. krummlinige Koordinatensysteme in der Raum-Zeit studieren. Was aber ist die richtige Transformation auf ein beschleunigtes Bezugssystem?

Wenn wir etwa die klassische Formel

$$t = \tilde{t}, \quad x = \tilde{x} + \frac{g}{2}\tilde{t}^2, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z} \tag{1.1.10}$$

benutzen, so erhalten wir in den $\tilde{x}^i$-Koordinaten das Linienelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \eta_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k = \mathrm{d}\tilde{t}^2\left(1 - g^2\tilde{t}^2\right) - 2g\tilde{t}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{t} - \mathrm{d}\tilde{x}^2 - \mathrm{d}\tilde{y}^2 - \mathrm{d}\tilde{z}^2 \\ &=: g_{\tilde{i}\tilde{k}}\,\mathrm{d}x^{\tilde{i}}\,\mathrm{d}x^{\tilde{k}}, \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

wobei der *metrische Tensor* durch Komponenten $g_{\tilde{i}\tilde{k}}$ mit

$$g_{\tilde{0}\tilde{0}} = 1 - g^2\tilde{t}^2, \quad g_{\tilde{0}\tilde{1}} = g_{\tilde{1}\tilde{0}} = g\tilde{t}, \quad g_{\tilde{1}\tilde{1}} = g_{\tilde{2}\tilde{2}} = g_{\tilde{3}\tilde{3}} = -1 \tag{1.1.12}$$

gegeben ist. Setzt man in (1.1.11) $\mathrm{d}\tilde{x} = \mathrm{d}\tilde{y} = \mathrm{d}\tilde{z} = 0$, d. h., betrachtet man eine in $\tilde{x}^i$ ruhende Uhr, so ergibt sich

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}\tilde{t}\sqrt{1 - g^2\tilde{t}^2}. \tag{1.1.13}$$

$\mathrm{d}s$ ist aber das Maß entlang der Weltlinie der Uhr ②, d. h., die Uhr wird die Zeit s und nicht etwa $\tilde{t}$ anzeigen. Daher ist die Koordinate $\tilde{t}$ zwar geeignet, verschiedene Punkte entlang der Weltlinie von ② zu *unterscheiden*, gibt aber nicht direkt das Zeitmaß entlang der Weltlinie an. Dieses Zeitmaß muß vielmehr mit Hilfe von (1.1.13) errechnet werden. Die Situation gleicht, wie schon

erwähnt, jener der Geometrie der Ebene, wo bei Benutzung von Polarkoordinaten der Abstand auch nicht einfach durch $\sqrt{\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\phi^2}$ gegeben ist, sondern aus dem Linienelement $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2}$ errechnet werden muß.

Betrachten wir anstelle von (1.1.10) eine andere Transformation, z. B. die von Møller angegebene

$$t = \frac{1}{g}\sinh g\tilde{t} + \tilde{x}\sinh g\tilde{t}, \quad x = \frac{1}{g}(\cosh g\tilde{t} - 1) + \tilde{x}\cosh g\tilde{t}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z}, \tag{1.1.14}$$

so erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tilde{t}^2(1 + g\tilde{x})^2 - \mathrm{d}\tilde{x}^2 - \mathrm{d}\tilde{y}^2 - \mathrm{d}\tilde{z}^2. \tag{1.1.15}$$

Die Transformation (1.1.14) reduziert sich für $g\tilde{t} \ll 1$ auf (1.1.10), hat aber den Vorteil, diagonale $g_{\tilde{i}\tilde{k}}$ zu ergeben, d. h., $g_{\tilde{i}\tilde{k}} = 0$ für $i \neq k$. Explizit ist hier

$$g_{\tilde{0}\tilde{0}} = (1 + g\tilde{x})^2 \qquad g_{\tilde{1}\tilde{1}} = g_{\tilde{2}\tilde{2}} = g_{\tilde{3}\tilde{3}} = -1.$$

Die beiden Transformationen (1.1.10) und (1.1.14) unterscheiden sich etwas bezüglich des Beschleunigungsverhaltens, weisen aber beide die gleiche nichtrelativistische Näherung auf. Welche der Transformationen ist die korrekte relativistische Verallgemeinerung? Diese Frage ist genauso sinnlos wie die, ob Polar- oder Zylinderkoordinaten im dreidimensionalen Raum richtig sind. Jedes Koordinatensystem ist richtig, es sind ja nur verschiedene Arten, den Raum-Zeitpunkten Namen zu geben. Cartesische Koordinaten im ebenen Raum bzw. die in (1.1.3) und (1.1.4) betrachteten Koordinaten in der Raum-Zeit haben allerdings den Vorteil, daß dabei $\mathrm{d}x$ bzw. $\mathrm{d}t$ und $|\mathrm{d}\boldsymbol{x}|$ direkt den gemessenen Raum- bzw. Zeitabständen entsprechen, während das in allgemeinen krummlinigen Koordinaten nicht der Fall ist.

Damit sind wir aber in der Lage, die Frage nach der Berechtigung beschleunigter Bezugssysteme bzw. nach der Gleichberechtigung der Uhr ② im Uhrenproblem voll zu beantworten. Beschleunigte Bezugssysteme $\tilde{x}^i$ sind in der speziellen Relativitätstheorie zulässig, allerdings hat in diesen Systemen das Linienelement nicht die einfache Form (1.1.3), es gilt vielmehr

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\tilde{i}\tilde{k}}\,\mathrm{d}x^{\tilde{i}}\,\mathrm{d}x^{\tilde{k}}, \tag{1.1.16}$$

wobei die $g_{\tilde{i}\tilde{k}}$ Funktionen der $x^{\tilde{i}}$ sind. Diese Funktionen $g_{\tilde{i}\tilde{k}}(\tilde{x})$ sind aus

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k = \eta_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial x^{\tilde{l}}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{m}}}\,\mathrm{d}x^{\tilde{l}}\,\mathrm{d}x^{\tilde{m}} = g_{\tilde{l}\tilde{m}}\,\mathrm{d}x^{\tilde{l}}\,\mathrm{d}x^{\tilde{m}}$$

errechnen, d. h.

$$g_{\tilde{l}\tilde{m}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{\tilde{l}}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{m}}}\,\eta_{ik}. \tag{1.1.17}$$

Die $g_{\tilde{i}\tilde{k}}$ sind so bestimmt, daß das Linienelement ds bei den Transformationen $x \to \tilde{x}$ invariant bleibt. Abstände $S = \int ds$ hängen nur vom Integrationsweg ab, nicht aber vom benutzten Koordinatensystem, wie auch die Weglänge einer Kurve im Euklidischen Raum nur von der Kurve abhängt und nicht von den Koordinaten, die man zur Beschreibung der Kurve benutzt. Da die Uhren ① und ② aber $S_1 = \int ds_1$ bzw. $S_2 = \int ds_2$ anzeigen, so gilt die Relation zwischen den beiden Kurvenlängen S_1 und S_2 völlig unabhängig von dem Koordinatensystem, in dem man die Kurven beschreibt.

Die folgenden Übungsbeispiele sollen diese Tatsachen mit Hilfe expliziter Rechnungen illustrieren.

Aufgaben

1. Betrachte die Transformation

$$x = \tilde{x} + a \sin \frac{q\tilde{t}^2}{2a}, \qquad t = \tilde{t},$$

die der in Abbildung 1.2 gezeigten Bewegung der Uhr ② entspricht, d. h., die Uhr erfüllt $\tilde{x} = 0$. Zeige explizit, daß S_1 und S_2 beim Übergang vom x^i auf das $\tilde{x}^i$-System ungeändert bleiben.

2. Nähere die Bewegung von ② durch zwei gleichförmige Bewegungen von bzw. nach $x = 0$ an, wobei zur Zeit $t = T/2$ eine ruckartige Beschleunigung stattfindet. Diskutiere das Uhrenproblem einmal vom Standpunkt des (x, t)-Systems, das andere Mal vom Standpunkt des Systems, das man durch Aneinanderstückelung der beiden Inertialsysteme erhält, in denen vor bzw. nach $T = t/2$ die Uhr ② ruht.

3. Berechne die Form des Linienelements in einem Koordinatensystem $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, das durch eine „Lorentz-Transformation" mit zeitabhängiger Geschwindigkeit $v(t)$ in der x-Richtung aus einem Inertialsystem hervorgeht.

1.2 Das Äquivalenzprinzip

Die Tatsache, daß schwere und träge Masse einander (zumindest mit sehr großer Genauigkeit) proportional sind, war bereits Newton bekannt. In der Newtonschen Theorie ist dieses Faktum aber als rein zufällig und unerklärt anzusehen, man könnte die Theorie ebensogut aufbauen, wenn schwere und träge Masse unkorreliert wären. Erst Einstein versuchte in der allgemeinen Relativitätstheorie eine Erklärung für die bemerkenswerte Beobachtung zu geben, daß alle Körper gleich schnell im Schwerefeld fallen.

Um zur heuristischen Grundidee Einsteins, zum *Äquivalenzprinzip*, zu gelangen, betrachten wir zwei frei um die Erde kreisende Satellitenlabors (Abbildung 1.3). Falls die Labors so klein sind, daß man die Inhomogenität des

Gravitationsfeldes in ihnen vernachlässigen kann, merkt man darin überhaupt nichts vom Vorhandensein des Schwerefeldes der Erde. Jedes Experiment innerhalb des Satelliten geht genauso aus, als wäre die Erde und ihr Schwerefeld nicht vorhanden. So werden etwa Körper aus beliebigem Material innerhalb des Labors frei schweben bzw. sich geradlinig-gleichförmig fortbewegen usw. Dies ist aber gerade die Definition eines *Inertialsystems*. Durch das kreisende (fallende) Labor ist ein – allerdings kleines – Inertialsystem realisiert.

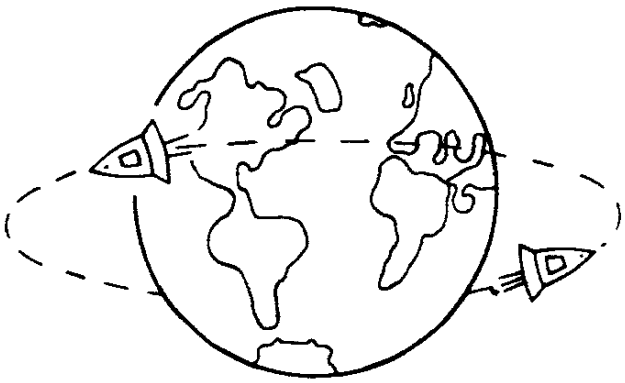

Abbildung 1.3: Erde mit Satellitenlabors.

Ein auf der Erde ruhendes Labor ist dagegen durch die Kraft, die von der Unterlage her ausgeübt wird, relativ zum Inertialsystem (kreisendes Labor) beschleunigt. Durch die Beschleunigung treten Scheinkräfte auf, die Gravitationskräfte. Die Wirkung von Schwerefeldern ist daher äquivalent einer Beschleunigung des Bezugssystems. Das ist das *Äquivalenzprinzip*. Dadurch ist eine Vereinheitlichung von Schwerkraft und Trägheitskraft bewerkstelligt. Beide Kräfte sind auf ein gemeinsames Phänomen zurückgeführt, und die Unterscheidung von träger und schwerer Masse wird vom Ansatz her aufgehoben.

Wir müssen nun darangehen, diese qualitative Grundlage in den mathematischen Formalismus überzuführen, was immer der schwierigste Schritt bei der Formulierung einer Theorie ist. Im Formalismus wird die Grundidee präzisiert, und es wird sich zeigen, inwieweit die oben vorgetragenen qualitativen Überlegungen dann tatsächlich im Formalismus zu realisieren sind. In Abbildung 1.3 haben wir absichtlich zwei verschiedene Labors eingezeichnet, um zu illustrieren, daß die gegenseitigen Beziehungen (Lage, Geschwindigkeit) von Inertialsystemen im allgemeinen kompliziert sein kann. Wenn kein Gravitationsfeld vorhanden ist, so gibt es ein Inertialsystem im ganzen Raum, es gibt ein Koordinatensystem, in dem das Linienelement überall die Form (1.1.3) annimmt. Bei vorhandenem Gravitationsfeld nimmt das Linienelement in der Umgebung eines Punktes in der Raum-Zeit zwar diese einfache Form an, das Inertialsystem im Nachbarpunkt ist aber i.a. dagegen beschleunigt. Das Linienelement wird daher dort von der Form sein, wie wir sie für ein beschleunigtes Bezugssystem errechnet haben:

$$ds^2 = g_{ik}(x)\,dx^i dx^k. \tag{1.2.1}$$

Dabei beschreiben die Koeffizienten g_{ik} das Gravitationsfeld. Die g_{ik} sind allerdings nicht eindeutig durch das Gravitationsfeld bestimmt, da Koordinatentransformationen

$$x^i = f^i(x^{\bar{k}}) \tag{1.2.2}$$

möglich sind, bei denen sich – wie schon die im vorigen Abschnitt diskutierten Beispiele zeigen – die Form der Metrik g_{ik} ändert. Es gibt aber bei vorhandenem Gravitationsfeld keine Transformationen (1.2.2), die das Linienelement im ganzen Raum auf die Form (1.1.3) bringen.

Wir werden daher dazu geführt, das Gravitationsfeld geometrisch zu beschreiben. In der Umgebung schwerer Massen nimmt die Geometrie des Raumes die Form (1.2.1) an. Das Gravitationsfeld wird durch die 10 Komponenten $g_{ik} = g_{ki}$ des metrischen Tensors bestimmt, und es wird unsere Aufgabe sein, Feldgleichungen für die g_{ik} aufzustellen und die Bewegung von Teilchen in diesem Raum zu untersuchen.

Einen Raum mit Linienelement (1.2.1) nennt man einen *Riemannschen Raum*. Wir wollen zunächst feststellen, wie man sich einen derartigen Raum vorzustellen hat bzw. wie man ihn konstruieren kann, wenn ein Linienelement der Form (1.2.1) vorliegt. Dazu gehen wir wieder von einem zweidimensionalen Beispiel aus, um zu einer anschaulichen Konstruktion zu kommen. Gegeben sei also ein Linienelement

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}\,dx^i dx^k = g_{11}\,dx^2 + 2g_{12}\,dx\,dy + g_{22}\,dy^2, \tag{1.2.3}$$

wobei wir $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$ gesetzt haben. Um einen zweidimensionalen Raum (Fläche) zu konstruieren, auf dem diese Geometrie verwirklicht ist, nehmen wir eine Anzahl von Drähten, die wir kreuzweise übereinanderlegen und mit x- bzw. y-Koordinatenlinien identifizieren (s. Abbildung 1.4).

Wir wählen einen beliebigen Punkt, etwa A, als Ursprung $x = y = 0$ und löten zwei Drähte dort zusammen. In einem Abstand $\Delta s = \sqrt{g_{11}(0,0)}\Delta x = \sqrt{g_{11}(0,0)}$ löten wir auf der Linie $y = 0$ einen Draht $x = 1$ an, dann gehen wir weiter um $\Delta s = \sqrt{g_{11}(1,0)}$, dort wird $x = 2$ befestigt usw. Die gleiche Prozedur wird dann entlang des Drahtes $x = 0$ (der y-Achse) wiederholt. Den Abstand CD in Abbildung 1.4 erhalten wir aus $\Delta s = \sqrt{g_{11}(0,1)}$, BD aus $\Delta s = \sqrt{g_{22}(1,0)}$. Nun ist noch der Winkel der beiden Drähte in A zu bestimmen, der daraus folgt, daß der Abstand AD durch $(\Delta s)^2 = g_{11} + g_{22} + 2g_{12}$ gegeben ist, wobei alle g_{ik} in $(x, y) = (0,0)$ zu nehmen sind. Auf diese Art kann allmählich die ganze Fläche konstruiert werden. Dabei wird sich im allgemeinen ein gekrümmtes Gebilde ergeben, dessen Krümmung durch die Form der

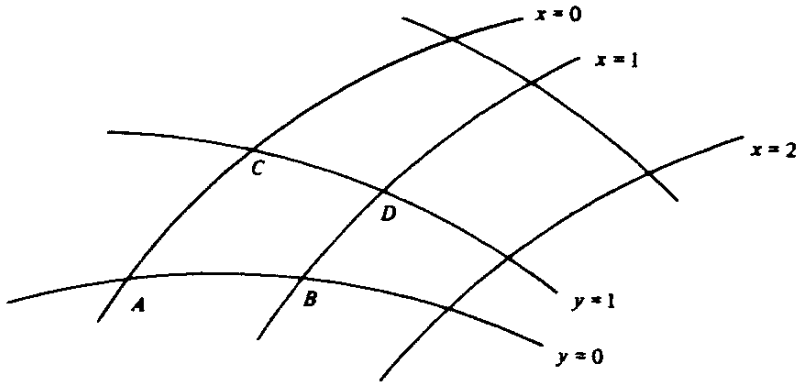

Abbildung 1.4: Konstruktion einer Fläche mit Metrik g_{ik}.

g_{ik} bestimmt ist. Allerdings ist die Fläche i.a. nicht eindeutig durch Angabe der g_{ik} bestimmt. Man denke etwa an eine Ebene, die zu einem Zylinder oder Kegel deformiert werden kann, ohne daß sich die „innere Geometrie", die durch die g_{ik} bestimmt ist, ändert. Für unsere Zwecke sind alle derartigen Flächen als äquivalent zu betrachten. (Zu ihrer Unterscheidung wäre der sog. äußere Krümmungstensor heranzuziehen.)

Übertragen auf den für uns interessanten 4-dimensionalen Fall heißt das, daß der Riemannsche Raum ein gekrümmter Raum sein wird, wobei die Krümmung ein Maß für die vorhandenen Gravitationsfelder sein wird.

Wenn umgekehrt eine gekrümmte Fläche gegeben ist, deren ds zu bestimmen ist, so überzieht man diese Fläche zunächst mit einem feinmaschigen Drahtnetz und liest dann direkt aus den Abständen bzw. den Winkeln die metrischen Koeffizienten g_{ik} ab. Natürlich kann man das Drahtnetz, d. h. die Koordinatenlinien, auf verschiedenste Arten über die Fläche legen und erhält dann andere Werte $g_{\bar{i}\bar{k}}$, die aber die gleiche Fläche beschreiben und durch eine Koordinatentransformation (s. Kap. 2) aus den g_{ik} hervorgehen. Im realistischen 4-dimensionalen Fall ist die Situation allerdings noch etwas komplizierter, da man es dabei nicht nur mit Maßstäben, sondern auch mit Uhren zu tun hat.

1.3 Bewegung im Gravitationsfeld

Die im Gravitationsfeld frei kreisenden oder fallenden Labors bilden Inertialsysteme im Kleinen. In ihnen bewegen sich Teilchen geradlinig und unbeschleunigt, d. h. auf geraden Linien (1.1.1) durch die Raum-Zeit (s. Abbildung 1.5). Allerdings können die Weltlinien nur im Kleinen Gerade sein, da der gekrümmte Raum keine Geraden im Großen zuläßt. Die geeignete Verallgemeinerung des Begriffes der Geraden kann man aus Abbildung 1.5 ablesen. Die eingezeichnete Verbindungslinie erfüllt nämlich

$$\int_A^B \mathrm{d}s = \text{Extremum}, \tag{1.3.1}$$

$$\delta \int \mathrm{d}s = 0, \tag{1.3.2}$$

d. h., die Variation des Integrals über $\mathrm{d}s$ muß verschwinden.

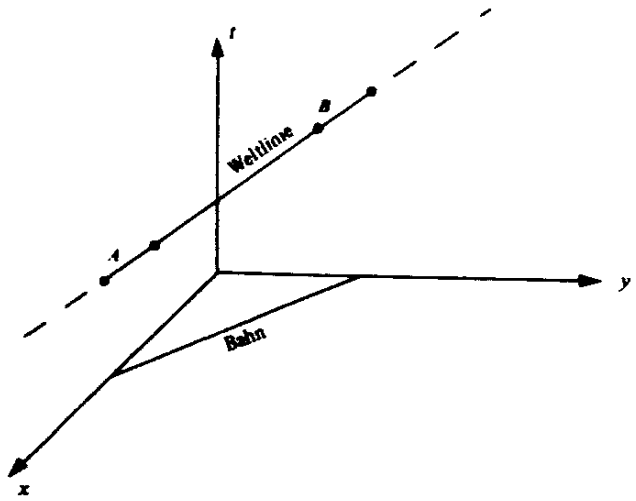

Abbildung 1.5: Geradlinig-gleichförmige Bewegung.

Die Formulierung (1.3.2) hat den Vorteil, invariant gegen Koordinatentransformationen zu sein, denn die Bogenlänge der Kurve von A nach B ist unabhängig vom Koordinatensystem. Setzt man die Metrik (1.2.1) ein und beschreibt die Kurve AB durch $x^i = x^i(\lambda)$ (λ ist ein beliebiger Parameter), so erhält man

$$\delta \int \sqrt{g_{ik}(x)\, \dot{x}^i\, \dot{x}^k}\, \mathrm{d}\lambda =: \delta \int \mathcal{L}\, \mathrm{d}\lambda = 0, \tag{1.3.3}$$

wobei $\dot{x}^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda$. Die Euler-Gleichungen des Variationsproblems sind

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}. \tag{1.3.4}$$

Einsetzen von $\mathcal{L}$ ergibt nach kurzer Rechnung

$$\frac{1}{\mathcal{L}}\, \dot{x}^l\, \dot{x}^k\, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{1}{\mathcal{L}^2}\, g_{ik}\, \dot{x}^k\, \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{1}{\mathcal{L}}\, \dot{x}^k g_{ik} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\, \dot{x}^k\, \dot{x}^l. \tag{1.3.5}$$

Definieren wir *Christoffel-Symbole 1. Art* durch

$$\boxed{\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right).} \tag{1.3.6}$$

so läßt sich (1.3.5) in die Form

$$g_{ik}\,\ddot{x}^k + \Gamma_{ikl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l - \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\lambda}\,g_{ik}\,\dot{x}^k = 0 \tag{1.3.7}$$

schreiben. Wählen wir den Parameter λ so, daß $\mathrm{d}\mathcal{L}/\mathrm{d}\lambda = 0$, was man für $\mathrm{d}s \neq 0$ durch $\lambda \to s = \int \mathcal{L}\mathrm{d}\lambda$ erreicht, so ergibt sich

$$g_{ik}\,\ddot{x}^k + \Gamma_{ikl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l = 0. \tag{1.3.8}$$

Wir schreiben (1.3.8) noch etwas um, indem wir zunächst den kontravarianten metrischen Tensor mit den Komponenten g^{ik} definieren. Die $g_{ik}(x)$ bilden in jedem Punkt x eine 4×4-Zahlenmatrix, deren Inverse wir mit $g^{kl}(x)$ bezeichenen, d. h.

$$g_{ik}\,g^{kl} = \delta_i^{\ l}. \tag{1.3.9}$$

$g_{ik}(x)$ heißt der *kovariante*, $g^{ik}(x)$ der *kontravariante metrische Tensor*. Multiplizieren wir (1.3.8) mit g^{im} und summieren über i, so erhalten wir für die *geodätische Linie* (=*Geodätische*, d. h. Linie, die (1.3.2) erfüllt):

$$\boxed{\ddot{x}^m + \Gamma^m_{\ kl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l = 0,} \tag{1.3.10}$$

wobei wir *Christoffel-Symbole 2. Art* durch

$$\boxed{\Gamma^m_{\ kl} = g^{im}\Gamma_{ikl}} \tag{1.3.11}$$

definiert haben. (1.3.10) ist bereits das gesuchte Resultat, es gibt die Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld g_{ik} an.

Wie bei anderen Weltlinien unterscheidet man auch bei Geodätischen raumartige, zeitartige und *Nullgeodätische* ($\mathrm{d}s = 0$). Im Abschnitt 9.3 wird gezeigt, daß sich Lichtstrahlen entlang Nullgeodätischer ausbreiten.

Aufgabe

Die vorhergehende Herleitung der Gleichung (1.3.10) der Geodätischen hat den Vorteil, direkt von $\delta\int \mathrm{d}s = 0$ auszugehen, ist aber nicht auf Nullgeodätische anwendbar, da für diese $\mathrm{d}s = 0 = \mathcal{L}$ und in (1.3.5) eine Division durch $\mathcal{L}$ erforderlich ist. Zeige, daß das Endresultat (1.3.10) auch aus

$$\delta\int g_{ik}\,\dot{x}^i\dot{x}^k\,\mathrm{d}\lambda \equiv \delta\int \mathcal{K}\,\mathrm{d}\lambda = 0 \tag{1.3.12}$$

folgt, wobei $\mathcal{K} = \mathcal{L}^2$. Durch dieses Variationsprinzip können auch Photonen beschrieben werden, da keine Division durch $\mathcal{K}$ erforderlich ist. Außerdem ergibt sich aus (1.3.12) die Geodätische automatisch auf einen *affinen Parameter*

bezogen, für den $\mathcal{K} = \text{const.}$ so daß λ (außer für Photonen) direkt mit s identifiziert werden kann. Es wird dann $\mathcal{K} = 1$, während für Licht $\mathcal{K} = 0$ zu setzen ist.

1.4 Die Newtonsche Näherung

Im vorigen Abschnitt waren wir bereits in der Lage, die Bewegung eines Körpers (Massenpunktes) im Gravitationsfeld anzugeben. Da wir die Bewegung von Körpern aber z. B. im Schwerefeld der Sonne zumindest annähernd kennen, sollte uns dieses Resutat in die Lage versetzen, daraus durch Rückrechnung die Metrik g_{ik} zu bestimmen und damit die Geometrie in der Umgebung der Sonne. Experimentell wissen wir, daß diese Geometrie in sehr guter Näherung euklidisch ist. Wir können daher in einem geeigneten Koordinatensystem

$$g_{ik}(x) = \eta_{ik} + 2v_{ik}(x) \tag{1.4.1}$$

setzen, wobei die $v_{ik}(x)$ kleine Größen sind ($|v_{ik}| \ll 1$), deren Quadrate vernachlässigt werden können. Weiters sind die Planetenbewegungen langsam verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit. Die Vierergeschwindigkeit $\dot{x}^k = \mathrm{d}x^k/\mathrm{d}s$ kann daher durch $\dot{x}^k \approx (1, \mathbf{0})$ genähert werden, so daß sich (1.3.10) vereinfacht zu

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i{}_{00} = 0,$$

wobei wir noch $\mathrm{d}s \approx \mathrm{d}t\sqrt{1-v^2} \approx \mathrm{d}t$ setzen können. Der räumliche Teil des Beschleunigungsvektors $\ddot{x}^\alpha$ erfüllt demnach die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha{}_{00} = 0. \tag{1.4.2}$$

(1.3.11) ergibt – da Γ_{i00} bereits von Ordnung v ist –

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha{}_{00} &= g^{\alpha i}\Gamma_{i00} \approx \eta^{\alpha i}\Gamma_{i00} = -\Gamma_{\alpha 00} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right). \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Da das Gravitationsfeld der Sonne fast statisch ist, kann man die Zeitableitungen in (1.4.3) vernachlässigen unud erhält

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \tag{1.4.4}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial \psi_{00}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}, \tag{1.4.5}$$

wo U das Newtonsche Gravitationapotential ist. Daraus folgt $\psi_{00} = U$ und

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + 2U)\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 \tag{1.4.6}$$

für die Metrik in Newtonscher Näherung. Setzen wir speziell das Potential einer kugelsymmetrischen Massenverteilung (Masse $\mathcal{M}$), $U = -G\mathcal{M}/r$, in (1.4.6) ein, so ergibt sich

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{rc^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2. \tag{1.4.7}$$

wobei wir die Faktoren c^2 der Deutlichkeit halber hinzugefügt haben. $2M := 2G\mathcal{M}/c^2$ hat, wie man aus (1.4.7) ersieht, die Dimension einer Länge und heißt der *Schwarzschildradius von* $\mathcal{M}$. Für die Sonne ist $2M \approx 3$km. Da der Sonnenradius aber etwa 700.000 km beträgt, sind die Abweichungen der Geometrie von der des ebenen Raumes auch am Sonnenrand – wo sie innerhalb des Sonnensystems am stärksten sind – weniger als 10^{-5}. Unser Ansatz (1.4.1) ist damit gerechtfertigt.

Dem Newtonschen Gravitationspotential U entspricht also in der allgemeinen Relativitätstheorie die Größe g_{00}, während die anderen Komponenten von g_{ik} kleine Korrekturen zu diesem Hauptterm ergeben. Aus der obigen Rechnung kann man aber nicht schließen, daß etwa $g_{11} = -1$ genau gilt, da etwaige Korrekturen, die von ψ_{11} herrühren, bei den hier betrachteten langsamen Bewegungen vernachlässigt werden können. Bei schnellen Bewegungen, vor allem also bei Licht, werden die Korrekturen zum Raumteil der Metrik zu berücksichtigen sein. Sie können allerdings nicht auf dem hier eingeschlagenen Weg über das Äquivalenzprinzip bestimmt werden, sondern müssen aus den noch aufzustellenden Feldgleichungen berechnet werden.

Die bisherigen Überlegungen haben gezeigt, daß der Versuch, die Gravitation über das Äquivalenzprinzip zu geometrisieren, zumindest die Newtonsche Näherung richtig ergibt. Wir werden im nächsten Kapitel die bisherigen Ergebnisse daher formal zusammenstellen, ausbauen und schließlich in Kapitel 3 die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie aufstellen.

Aufgaben

1. Ein Kugelsternhaufen hat eine Masse $\mathcal{M} = 10^6\mathcal{M}_\odot$ und einen Radius $a = 20$ pc. Wie groß ist die Abweichung von der ebenen Geometrie am Rande des Haufens, wenn man diese Abweichung durch das Verhältnis von Schwarzschildradius $2M$ zu Radius a definiert? Die gleiche Abschätzung ist auch für eine Galaxis ($\mathcal{M} = 10^{10}\mathcal{M}_\odot$, $a = 10$ kpc), einen Haufen von Galaxien

($\mathcal{M} = 10^{15}\mathcal{M}_\odot$, $a = 10^3$ kpc) und den uns zugänglichen Teil des Universums ($\mathcal{M} = 10^{21}\mathcal{M}_\odot$, $a = 10^6$ kpc) durchzuführen. Bei welchen Systemen werden die Korrekturen zur Geometrie zu berücksichtigen sein, wenn man 1% Genauigkeit in der Astrophysik anstrebt?

2. Ein Elementarteilchen (Masse $\mathcal{M}$) wird üblicherweise durch die spezielle Relativitätstheorie beschrieben, und die „Raumunebenheiten", die es verursacht, werden vernachlässigt. Definiert man den Radius eines derartigen Teilchens durch seine Comptonwellenlänge[7] $h/\mathcal{M}c$ – was allerdings nicht in jedem Zusammenhang sinnvoll ist –, so ergibt sich daraus eine Abschätzung der Abweichung von der ebenen Geometrie in der Umgebung des Teilchens als $x = (\text{Schwarzschildradius})/(\text{Comptonwellenlänge}) = (2G\mathcal{M}/c^2)/(h/\mathcal{M}c) = (2G\mathcal{M}^2/hc)$.
Wie groß ist x für ein Elektron bzw. Proton? Bei welcher Masse wird $x = 1$, und was ist die Comptonwellenlänge, die dieser Masse entspricht?

[7] Siehe z. B. Thirring (1958), Kap. 1.

Kapitel 2

Riemannsche Geometrie

Dieses Kapitel bringt eine kurze Einführung in die klassische Riemannsche Geometrie. Dabei werden wir manche Theoreme erläutern, aber nicht beweisen, da die entsprechenden Beweise in der mathematischen Lehrbuchliteratur zugänglich sind.

2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Während im vorigen Kapitel die 4-dimensionale Raum-Zeit betrachtet wurde, gehen wir hier der Allgemeinheit halber von einem n-dimensionalen Raum X^n aus, in dem beliebige Koordinaten x^i eingeführt seien. Allerdings wird es im allgemeinen nicht möglich sein, ein nicht-singuläres Koordinatensystem für den ganzen Raum X^n einzuführen[1]. Man präzisiert den gewünschten Raumbegriff daher folgendermaßen (s. dazu Aufgabe 1):

Wir gehen aus von einem Hausdorffschen topologischen Raum X^n, bei dem jeder Punkt P eine Umgebung besitzt, die durch eine homöomorphe Abbildung σ auf eine offene Menge des n-dimensionalen euklidischen Raumes $\mathbf{R}^n$ abgebildet werden kann (s. Abbildung 2.1). Die Abbildung σ heißt dann ein*Koordinatensystem* in der Umgebung von P, d. h., dem Punkt P werden Koordinaten $\sigma(P) = (x^1(P) \dots x^n(P))$ zugeordnet (die Koordinaten des Bildpunktes im Raum $\mathbf{R}^n$). Mit dieser Definition ist die Forderung vermieden, daß man im ganzen Raum X^n mit einem einzigen singularitätsfreien Koordinatensystem auskommen kann.

Im allgemeinen werden sich die Umgebungen zweier benachbarter Punkte P, Q überlappen, und auf dem Durchschnitt (in Abbildung 2.1 schraffiert)

[1] Es ist schon auf der Kugeloberfläche nicht möglich, ein derartiges System zu finden. Polarkoordinaten (ϑ, φ) sind z. B. im Nordpol singulär, da sie diesem Punkt die Koordinaten $(0, \varphi)$ zuordnen, wobei φ beliebig ist: die Zuordnung von Punkt und Koordinatenpaar ist dort nicht umkehrbar eindeutig, und gleiches gilt im Südpol.

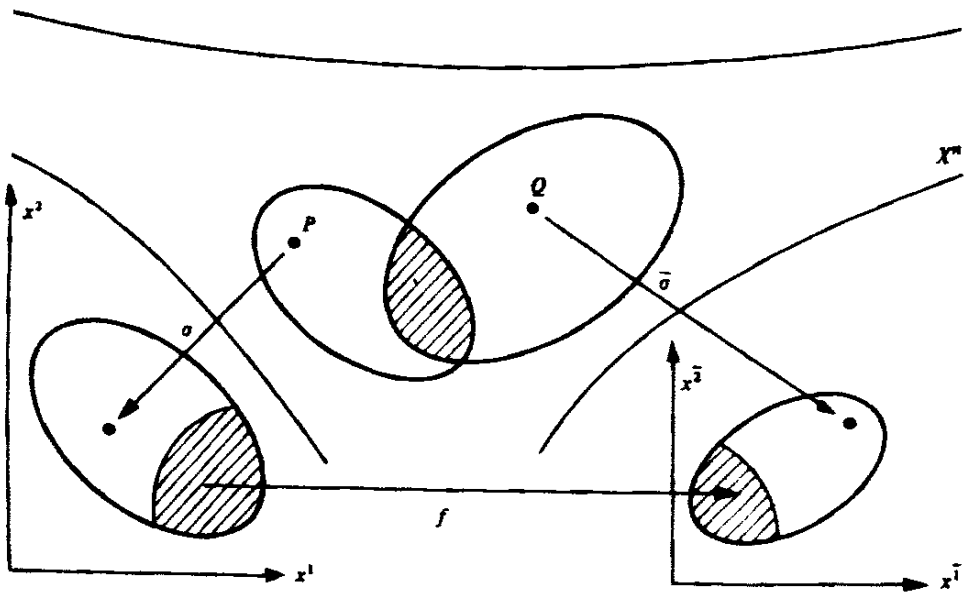

Abbildung 2.1: Zur Definition der differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

werden zwei Koordinatensysteme definiert sein, σ und $\bar{\sigma}$. Man fordert dann, daß die Funktionen $f = \bar{\sigma} \circ \sigma^{-1}$, d.s. die *Koordinatentransformationen*

$$x^{\bar{i}} = f^{\bar{i}}(x^k), \quad x^i = (f^{-1})^i(x^{\bar{k}}) \tag{2.1.1}$$

dort (beliebig oft) differenzierbar sind. Wenn das erfüllt ist, heißt X^n n-dimensionale *differenzierbare Mannigfaltigkeit*. Falls auf dieser Mannigfaltigkeit auch eine Metrik der Form (1.2.1) definiert ist, wird sie zum *Riemannschen Raum*. Die Metrik soll aber erst in Abschnitt 2 eingeführt werden, vorläufig wollen wir die Eigenschaften von X^n studieren, die unabhängig davon sind. Dazu zunächst einige Vorbemerkungen und Definitionen.

Eine m-dimensionale *Teilmannigfaltigkeit* $X^m \subset X^n$ ist („lokal", d. h. im Bereich eines Koordinatensystems) gegeben durch die *Parameterdarstellung*

$$x^i = g^i(u^1, \ldots, u^m) \tag{2.1.2}$$

wobei Rang $(\partial g^i/\partial u^k) = m$. Für $m = 1$ erhält man eine Kurve, für $m = 2$ eine Fläche und für $m = n - 1$ eine *Hyperfläche*. Die Kurve $x^i = u$ für $i = k$, $x^i = \text{const}$ für $i \neq k$ heißt die k-te Koordinatenlinie: die Hyperfläche $x^i = \text{const}$ für $i = k$, $x^i = u^i$ für $i \neq k$ die k-te Koordinatenhyperfläche.

Die Koordinatentransformationen der Form (2.1.1) bilden eine (Pseudo-) Gruppe, wie man leicht einsieht. Bei den Transformationen aus dieser Gruppe verhalten sich die Koordinatendifferentiale wie

$$\mathrm{d}x^{\bar{i}} = \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k =: p^{\bar{i}}{}_k(x)\,\mathrm{d}x^k. \tag{2.1.3}$$

Die Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}x^i$ transformieren daher bei Koordinatenänderungen linear (genauer: in jedem Punkt nach der Vektordarstellung der Grup-

pe $GL(n)$ der nichtsingulären $n \times n$-Matrizen). Die in (2.1.3) eingeführte Abkürzung $p^{\bar{i}}{}_k$ ist ein Spezialfall folgender allgemeiner Definitionen:

$$p^{\bar{i}}{}_k := \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^k}, \quad p^{\bar{i}}{}_{kl} := \frac{\partial^2 x^{\bar{i}}}{\partial x^k \partial x^l}, \ldots \tag{2.1.4}$$

$$p^k{}_{\bar{i}} := \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{i}}}, \quad p^k{}_{\bar{i}\bar{l}} := \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{\bar{i}} \partial x^{\bar{l}}}, \ldots \tag{2.1.5}$$

gilt dann nach der Kettenregel

$$p^{\bar{l}}{}_k \, p^k{}_{\bar{i}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^{\bar{l}}}{\partial x^k} = \delta^{\bar{l}}_{\bar{i}}, \quad p^{\bar{k}}{}_l \, p^l{}_{\bar{k}} = \delta_l^l. \tag{2.1.6}$$

Aufgabe

In der Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wurden verschiedene Begriffe der Topologie, wie Hausdorff-Raum, Umgebung, homöomorphe Abbildung, ... verwendet. Definiere diese Begriffe. (Siehe dazu z. B. H. Meschkowski (1971).)

2.2 Vektoren und Tensoren

In einem Raumpunkt können verschiedene physikalische Größen wie Temperatur T, Geschwindigkeiten v^i oder elektromagnetische Feldstärken F_{ik} definiert sein. Wir wollen derartige Objekte und ihr Verhalten bei Koordinatentransformationen in diesem Abschnitt untersuchen.

Eine Temperaturverteilung ist ein Beispiel eines *skalaren Feldes*: Sie wird in jedem Koordinatensystem σ durch eine Funktion $T(x)$ beschrieben, die sich bei Koordinatentransformationen $x \to \bar{x}$ (2.1.1) wie

$$T(x) = \bar{T}(\bar{x}) \tag{2.2.1}$$

verhält. Denn ordnet man einem Punkt P durch die Transformation $x \to \bar{x}$ neue Koordinaten $\bar{x}$ zu, so muß natürlich der Wert der Temperatur in P dabei ungeändert bleiben, d. h., der Wert der neuen Funktion $\bar{T}$ an der neuen Koordinatenstelle muß gleich dem Wert der alten Funktion an der alten Koordinatenstelle sein.

Ein *Vektorfeld* – wie z. B. ein Geschwindigkeitsfeld – wird in jedem Koordinatensystem σ durch n Komponentenfunktionen $v^i(x)$ beschrieben, die sich bei Koordinatentransformationen so wie die Koordinatendifferentiale verhalten:

$$v^{\bar{i}}(\bar{x}) = \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^k} v^k(x) = p^{\bar{i}}{}_k \, v^k. \tag{2.2.2}$$

Größen mit nach (2.2.2) transformierenden Komponenten heißen *kontravariante Vektoren*.

Ein Beispiel eines *kovarianten Vektors* ist der *Gradient* eines Skalars, in jedem System σ gegeben durch n Komponenten

$$w_i(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial x^i}, \tag{2.2.3}$$

die sich bei Koordinatenänderungen nach der Kettenregel

$$\frac{\partial \bar{T}(\bar{x})}{\partial x^{\bar{i}}} = \frac{\partial T(x)}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{i}}}$$

folgendermaßen verhalten:

$$w_{\bar{i}}(\bar{x}) = \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{i}}}\, w_k(x) = p^k{}_{\bar{i}}\, w_k. \tag{2.2.4}$$

Allgemein heißen also Objekte mit Komponenten, die wie (2.2.4) transformieren, *kovariante Vektoren*.

Weitere Darstellungen der Gruppe der Koordinatentransformationen können wir durch Produktbildung von Vektoren gewinnen. Wenn etwa A^i und B^i zwei kontravariante Vektorfelder sind, so transformiert $C^{ik} = A^i B^k$ nach

$$C^{\bar{i}\bar{k}} = p^{\bar{i}}{}_l\, p^{\bar{k}}{}_m C^{lm} \tag{2.2.5}$$

Ganz allgemein heißen Objekte mit Komponenten, die bei Koordinatentransformationen nach (2.2.5) transformieren, *Tensoren vom Typ* (2,0). Ein Tensor vom Typ (a,b) ist eine Größe mit Komponenten $T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots}$ mit a oberen und b unteren Indizes, die bei Koordinatentransformationen nach der Regel

$$T^{\bar{i}\bar{k}\ldots}{}_{\bar{l}\bar{m}\ldots} = p^{\bar{i}}{}_a\, p^{\bar{k}}{}_b \cdots p^c{}_{\bar{l}}\, p^d{}_{\bar{m}} \cdots T^{ab\ldots}{}_{cd\ldots} \tag{2.2.6}$$

transformieren.

Eine Konsequenz der Linearität und Homogenität von (2.2.6) ist, daß das Verschwinden eines Tensors unabhängig vom Koordinatensystem ist: wenn die Relation $T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots} = 0$ in einem Koordinatensystem gilt, so gilt eine analoge in allen anderen.

Wenn wir im folgenden wie oben von Tensoren sprechen, so sind stets Tensorfelder gemeint, wobei wir der Kürze halber das Argument x meist weglassen werden. Ferner werden wir statt „Tensor mit Komponenten $T^{i\ldots}{}_{k\ldots}$ bezüglich σ" oft „Tensor $T^{i\ldots}{}_{k\ldots}$" sagen, wenn keine Verwirrungsgefahr besteht.

Aufgabe

Zeige, daß es ein Tensorfeld vom Typ (1,1) gibt – das Kronecker- oder Einheitstensorfeld –, dessen Komponenten in jedem Koordinatensystem die gleichen numerischen Werte $\delta^i{}_k = 1$ für $i = k$, $\delta^i{}_k = 0$ für $i \neq k$ annehmen.

Zeige, daß das $\epsilon(iklm)$-Symbol (siehe Konventionen) dagegen kein Tensorfeld mit numerisch invarianten Komponenten definiert.

2.3 Tensoralgebra

Wir werden in diesem Abschnitt die algebraischen Operationen diskutieren, die man mit Tensoren vornehmen kann. Da diese Operationen genau die gleichen sind wie in der speziellen Relativitätstheorie, wollen wir sie hier nur kurz skizzieren. Die im Abschnitt 2.2 eingeführten Tensoren vom Typ (a, b) bilden einen *Vektorraum* über dem Körper der reellen (oder auch komplexen) Zahlen. Seien z. B. $A^i{}_{kl}$ und $B^i{}_{kl}$ zwei Tensoren vom Typ (1.2), so ist

$$\alpha A^i{}_{kl} + \beta B^i{}_{kl} = C^i{}_{kl} \tag{2.3.1}$$

ebenfalls ein Tensor vom gleichen Typ, wenn α und β zwei reelle (komplexe) Zahlen sind. Für beliebige Tensoren $A^{i\ldots}{}_{kl\ldots}$ (Typ (a, b)) und $B^{mp\ldots}{}_{n\ldots}$ (Typ (c, d)) ist ferner ein Produkt durch

$$D^{imp\ldots}{}_{kln\ldots} = A^{i\ldots}{}_{kl\ldots} B^{mp\ldots}{}_{n\ldots} \tag{2.3.2}$$

definiert, wobei D ein Tensor vom Typ $(a + c, b + d)$ ist. Der Beweis dafür, daß (2.3.1) und (2.3.2) in jedem anderen Koordinatensystem $\bar{\sigma}$ genauso aussehen, folgt unmittelbar aus der Definition (2.2.6).

Es gibt aber noch eine weitere Operation, die mit Tensoren vorgenommen werden kann, die *Verjüngung* oder *Kontraktion*. Sei $A^{ik\ldots}{}_{jm\ldots}$ ein beliebiger Tensor vom Typ (a, b), so ist (Summenkonvention!)

$$B^{k\ldots}{}_{m\ldots} = A^{ik\ldots}{}_{im\ldots} \tag{2.3.3}$$

ein Tensor vom Typ $(a - 1, b - 1)$ (s. Aufgabe 1).

Ein spezielles Beispiel einer *Überschiebung* (Produktbildung und darauffolgende Verjüngung) ist das Produkt eines ko- mit einem kontravarianten Vektor A_i bzw. B^k. Es ist

$$C = A_i B^i \tag{2.3.4}$$

ein Skalar gegenüber Koordinatentransformationen.

Grundlegend für die weiteren Überlegungen ist das folgende *Quotiententheorem*. Ist ein Objekt $D^{ikcd\ldots}{}_{lmab\ldots}$ gegeben, und erweist sich für beliebige Tensoren $B^{ab\ldots}{}_{cd\ldots}$ vom Typ (c, d)

$$A^{ik\ldots}{}_{lm\ldots} = D^{ikcd\ldots}{}_{lmab\ldots} B^{ab\ldots}{}_{cd\ldots} \tag{2.3.5}$$

als Tensor vom Typ (a, b), so ist $D^{\ldots}{}_{\ldots}$ ein Tensor vom Typ $(a+d, b+c)$ (Beweis: Aufgabe 2). Dieses Theorem wird im folgenden vielfach verwendet werden, um den Tensorcharakter verschiedener Ausdrücke zu beweisen.

Aufgaben

1. Beweise (2.3.3).

2. Beweise das Quotiententheorem in einfachen Spezialfällen.

   Anleitung: Verwende Tensoren A, B, bei denen nur eine Komponente nicht verschwindet.

2.4 Der metrische Tensor

Bisher haben wir auf der abstrakt eingeführten Mannigfaltigkeit X^n keine Möglichkeit, die Länge eines Vektors zu messen. Das ist nur dann möglich, wenn auf X^n ein *metrischer Tensor* g_{ik} definiert ist (der im Falle des Raum-Zeit-Kontinuums aus den Feldgleichungen zu errechnen bzw. durch Messungen zu ermitteln ist). g_{ik} soll ein nichtsingulärer symmetrischer Tensor vom Typ (0,2) sein:

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad \det g_{ik} =: g \neq 0, \tag{2.4.1}$$

wobei die Funktionen $g_{ik}(x)$ außerdem stetig und (genügend oft) differenzierbar sein sollen. X^n heißt dann (pseudo-)*Riemannscher Raum*. Weitere Anforderungen an die g_{ik} werden sich aus physikalischen Argumenten später ergeben.

Der Tensor g_{ik} erlaubt es, ko- und kontravariante Vektoren einander zuzuordnen, indem wir

$$A_i = g_{ik}\, A^k, \qquad A^k = g^{kl} A_l \tag{2.4.2}$$

setzen, wobei der kontravariante metrische Tensor g^{kl} wieder durch (1.3.9) gegeben ist. Das Hinauf- und Hinunterziehen von Indizes mit Hilfe von g_{ik} und g^{kl} ist natürlich auf beliebige Tensoren anwendbar, es ist z. B.

$$B_{ik} = g_{kl}\, B_i^l = g_{kl}\, g_{im}\, B^{ml} \tag{2.4.3}$$

Die Länge eines Vektors A^i ist gegeben durch

$$\sqrt{|A_i A^i|} = \sqrt{|g_{ik}\, A^i A^k|} \tag{2.4.4}$$

Damit kann man auch den Abstand $\mathrm{d}s$ zweier benachbarter Punkte x^i und $x^i + \mathrm{d}x^i$ auf der Mannigfaltigkeit X^n angeben; es ist

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^k. \tag{2.4.5}$$

Dabei kann $\mathrm{d}s^2$ im Falle der Raum-Zeit auch negative Werte annehmen, wie aus der speziellen Relativitätstheorie bekannt ist.[2]

[2] Eine derartige Metrik g_{ik} nennt man Pseudo-Riemannsch, zum Unterschied von einer Riemannschen Metrik, bei der $\mathrm{d}s^2 \geq 0$ ist.

Das *Linienelement* ds ist invariant gegen Koordinatentransformationen, da ja die dx^i der Prototyp kontravarianter Vektoren sind und g_{ik} ein Tensor vom Typ (0,2) ist, der bei Koordinatenänderungen $x \to \bar{x}$ nach

$$g_{\bar{i}\bar{k}}(\bar{x}) = p^l{}_{\bar{i}}(x)\, p^m{}_{\bar{k}}(x)\, g_{lm}(x) \tag{2.4.6}$$

transformiert. Betrachten wir nun einen *festgehaltenen* Punkt x. Dann bilden die $g_{lm}(x)$ einfach eine symmetrische $n \times n$-Zahlenmatrix, die sich durch geeignete Wahl der Transformationskoeffizienten $p^k{}_{\bar{i}}$ auf die Form

$$g_{\bar{l}\bar{m}}(x) = \mathrm{diag}\,(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots) \tag{4.4.7}$$

bringen läßt, wobei $\epsilon_i = \pm 1$. Aus physikalischen Gründen müssen für die Raumzeitmetrik stets ein positiver und drei negative Diagonalwerte ϵ_i resultieren[3], so daß

$$g_{\bar{l}\bar{m}} = \eta_{lm} \tag{2.4.8}$$

wird; nur dann wird eine sinnvolle physikalische Interpretation des Formalismus möglich sein.

Die Metrik g_{ik} erlaubt es, wie in (1.3.6), Christoffel-Symbole zu definieren, die einigen nützlichen und im folgenden oft verwendeten Relationen genügen, die wir hier kurz zusammenstellen wollen. Es ist

$$\Gamma_{lik} = \Gamma_{lki}, \tag{2.4.9}$$

$$\Gamma_{ikl} + \Gamma_{lki} = g_{il,k}. \tag{2.4.10}$$

Die *Ableitung der Determinante* g *der* g_{ik} ist durch $dg = g^{ik}\, g\, dg_{ik}$ gegeben, da $g^{ik} \cdot g$ der Kofaktor (algebraisches Komplement) von g_{ik} bei der Determinantenbildung ist. Mit (2.4.10) folgt daraus weiter $g^{-1} g_{,j} = g^{ik}(\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}) = 2\Gamma^i{}_{ij}$ oder

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^j} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^j} = \Gamma^i{}_{ij}. \tag{2.4.11}$$

Aufgaben

1. Zeige, daß die Christoffel-Symbole (1.3.6) bei Koordinatentransformationen (2.1.1) nach

$$\Gamma_{\bar{i}\bar{k}\bar{l}} = \Gamma_{abc}\, p^a{}_{\bar{i}}\, p^b{}_{\bar{k}}\, p^c{}_{\bar{l}} + g_{ab}\, p^a{}_{\bar{i}}\, p^b{}_{\bar{k}\bar{l}} \tag{2.4.12}$$

transformieren und daher *keinen* Tensor definieren.

[3] Abgesehen von einem konventionsabhängigen gemeinsamen Vorzeichen der ϵ_i. Nomenklatur: $\pm(+---)$ „(normal)hyperbolisch" = „Lorentzisch", $\pm(++++)$ „elliptisch", $\pm(++--)$ „ultrahyperbolisch".

2. Zeige, daß (2.4.9) und (2.4.10), als Bedingungsgleichungen für $\Gamma_{\dots}$ angesehen, die Γ-Symbole *eindeutig* zu (1.3.6) festlegen.

2.5 Riemannsche Normalkoordinaten

Mit der Einführung einer Metrik g_{ik} sind wir auch in der Lage, *geodätische Linien*, d. h. Lösungen des Variationsproblems $\delta\int \mathrm{d}s = 0$ anzugeben, die den Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i{}_{kl}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{1.3.10}$$

genügen. Im Fall des euklidischen Raumes sind die Geodätischen besonders geeignete Koordinatenlinien (Cartesische Koordinaten). Es ist daher zu vermuten, daß auch im Falle des Riemannschen Raumes die Metrik eine besonders einfache Form annimmt, wenn man Geodätische als Koordinatenlinien verwendet (Riemannsches Koordinatensystem = RKS).

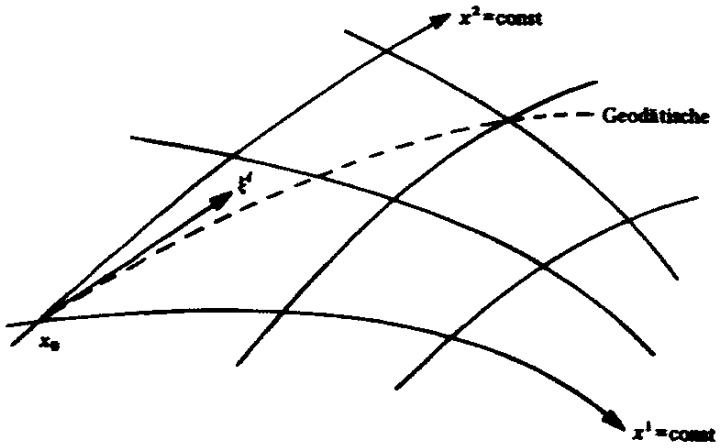

Abbildung 2.2: Zur Einführung von Riemannschen Koordinaten.

Wir gehen dazu von einem beliebigen Koordinatensystem x^i aus, in dem wir eine Geodätische in der Form $x^i = x^i(s)$ darstellen wollen, wobei s die Bogenlänge entlang der Kurve ist (Abbildung 2.2). Den Ursprung des RKS legen wir in einen beliebigen Punkt $x^i{}_0$ des x^i-Systems. Wir nehmen an, wir können die Funktionen $x^i(s)$ in der Umgebung von $x^i{}_0$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$x^i = x^i{}_0 + \xi^i s + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 s^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3x^i}{\mathrm{d}s^3}\right)_0 s^3 + \dots, \tag{2.5.1}$$

wobei

$$\xi^i := \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)_0. \tag{2.5.2}$$

Aus (1.3.10) können wir den Koeffizienten von s^2 in (2.5.1) berechnen, es ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 = -\Gamma^i{}_{kl}\,\xi^k\xi^l, \tag{2.5.3}$$

wobei die Christoffel-Symbole am Punkt $x^i{}_0$ zu nehmen sind. Differentiationen von (1.3.10) liefern die Koeffizienten der höheren Potenzen von s; so erhält man bei einmaliger Differentiation nach s:

$$\frac{\mathrm{d}^3 x^i}{\mathrm{d}s^3} + \Gamma^i{}_{jkl}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{2.5.4}$$

mit

$$\Gamma^i{}_{jkl} := \frac{1}{3!}\,\mathsf{P}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i{}_{kj} - \Gamma^i{}_{rk}\Gamma^r{}_{jl} - \Gamma^i{}_{jr}\Gamma^r{}_{kl}\right), \tag{2.5.5}$$

wobei das Symbol P die Summe über die Permutationen der Indizes j, k, l andeuten soll. Damit ergibt sich schließlich für die Geodätische

$$x^i(s) = x^i{}_0 + \xi^i s - \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{jk}\,\xi^i\xi^k s^2 - \frac{1}{3!}\Gamma^j{}_{klm}\,\xi^k\xi^l\xi^m s^3 \ldots, \tag{2.5.6}$$

wobei die Γ-Koeffizienten jeweils in $x^i{}_0$ zu nehmen sind. ξ^i ist ein beliebiger Einheitsvektor, der die Richtung der Geodätischen im Punkt $x^i{}_0$ angibt. Weiters setzen wir $y^i = \xi^i s$, so daß (2.5.6) die Form

$$x^i = x^i{}_0 + y^i - \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{jk}\,y^j y^k - \ldots \tag{2.5.7}$$

annimmt. Wir betrachten nun (2.5.7) als implizite Definition einer Koordinatentransformation $x \to y$, d. h.

$$y^i = (x^i - x^i{}_0) + \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{jk}(x^j - x^j{}_0)(x^k - x^k{}_0) - \ldots \tag{2.5.8}$$

Die neuen Koordinaten y^i spannen bereits das *RKS* auf, da in ihnen die Gleichung einer Geodätischen durch P_0 einfach $y^i = \xi^i s$ lautet, wobei ξ^i ein konstanter Einheitsvektor ist. Setzt man nämlich $y^i = \xi^i s$ in (2.5.8) bzw. (2.5.7) ein, so ergibt sich sofort die Gleichung (2.5.6), die aber gerade die Gleichung der Geodätischen durch $x^i{}_0$ ist. Daher sind im y-Koordinatensystem die Koordinatenlinien durch P_0 (die durch $\xi^i \propto \delta^i_k$ für die x^k-Linie gegeben sind) Geodätische.

Wir untersuchen nun die Form des Linienelements im *RKS*. Es sei

$$\mathrm{d}s^2 = \bar{g}_{ij}(y)\,\mathrm{d}y^i\,\mathrm{d}y^j, \tag{2.5.9}$$

wobei g_{ij} noch zu bestimmende Funktionen der y^i seien. Die Gleichung einer Geodätischen lautet in diesem Koordinatensystem

$$\frac{\mathrm{d}^2 y^i}{\mathrm{d}s^2} + \bar{\Gamma}^i_{kl}(y)\,\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}y^l}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{2.5.10}$$

Die Linien $y^i = \xi^i s$ müssen Lösungen dieser Gleichung sein, daher wird

$$\bar{\Gamma}^i_{kl}(\xi^m s)\,\xi^k \xi^l = 0.$$

Da die ξ^k beliebige Vektoren sind, folgt für $s = 0$

$$\bar{\Gamma}^i_{kl}(0) = 0. \tag{2.5.11}$$

Im Nullpunkt des Riemannschen Koordinatensystems verschwinden also die Christoffel-Symbole. Wegen (2.4.9) folgt daraus sofort

$$\bar{g}_{ik,l}(0) = 0. \tag{2.5.12}$$

d. h., alle ersten Ableitungen der Metrik verschwinden im Ursprung des *RKS*. Daher hat die Metrik in der Umgebung des Punktes $x^i{}_0$ im *RKS* die Entwicklung

$$\bar{g}_{ik} = \bar{g}_{ik}(0) + c_{iklm}\, y^l y^m + \ldots \tag{2.5.13}$$

Wir wollen nun noch zeigen, daß man auch erreichen kann, daß $\bar{g}_{ik}(0) = \eta_{ik}$. Dazu untersuchen wir das Verhalten des *RKS* bei Änderungen des ursprünglichen Koordinatensystems x^i. Wenn wir statt von x^i von anderen Koordinaten $x^{\bar{i}}$ ausgehen, so darf das die Menge der Geodätischen durch den betrachteten Punkt x_0 nicht ändern. Sei

$$y^{\bar{i}} = \xi^{\bar{i}} s = \left(\frac{\mathrm{d}x^{\bar{i}}}{\mathrm{d}s}\right)_0 s \tag{2.5.14}$$

die Gleichung einer Geodätischen im neuen *RKS*, so lautet diese, ausgedrückt in den y^k,

$$y^{\bar{i}} = \left(\frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^k}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\right)_0 s = \left(p^{\bar{i}}{}_k\right)_0 \xi^k s = \left(p^{\bar{i}}{}_k\right)_0 y^k. \tag{2.5.15}$$

Bei beliebigen Koordinatenänderungen erfahren die Riemannschen Koordinaten daher eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten $(p^{\bar{i}}{}_k)_0$. Diese Transformation kann nun offenbar dazu benutzt werden, die $\bar{g}_{ik}(0)$ auf die gewünschte Form η_{ik} zu bringen. Ein derartiges Koordinatensystem heißt *Riemannsches Normalkoordinatensystem (RNKS)*. Im Ursprung des *RNKS* sind also die $g_{ik} = \eta_{ik}$ und die Christoffel-Symbole $\Gamma^i{}_{kl} = 0$. Ein System, in dem diese beiden Bedingungen erfüllt sind, heißt ein in dem betreffenden Punkt $x^i{}_0$

inertiales Koordinatensystem[4]. Es entspricht so weit wie möglich dem Begriff des Inertialsystems der speziellen Relativitätstheorie; z. B. ist die Gleichung einer Geodätischen durch den Ursprung (d. h. die Bewegungsgleichung eines dort frei fallenden Objektes) einfach durch $d^2y^i/ds^2 = 0$ gegeben, genau wie im flachen Raum. Das *RNKS* entspricht gerade dem Cartesischen Koordinatensystem im frei fallenden Labor (Abbildung 1.3), von dem wir ausgegangen sind. Allerdings ist die Minkowski-Metrik η_{ik} eine gute Näherung an die g_{ik} nur für Raum-Zeit-Distanzen y^i, für die der quadratische Term in (2.5.13) vernachlässigt werden kann. Dieser Term gibt daher die Inhomogenität des Gravitationsfeldes an und wird im Abschnitt 2.7, Gleichung (2.7.15), durch den Riemannschen Krümmungstensor ausgedrückt werden.

Wir bemerken noch abschließend, daß es möglich ist, das *RNKS* zu definieren, ohne die Konvergenz von (2.5.1) zu verwenden.

Aufgaben

1. Zeige, daß im Ursprung eines *RNKS* die in (2.5.5) definierten Koeffizienten $\Gamma^i{}_{jkl}$ verschwinden.

2. Zeige: ist $g_{ik}(0) = \eta_{ik}$ erreicht, so genügt schon eine Transformation (2.5.8) *ohne* die nicht angeschriebenen Terme, um die y^i in P_0 inertial zu machen.

2.6 Tensoranalysis

Die im Abschnitt 2.4 betrachteten Eigenschaften von Tensoren waren die gleichen wie in der speziellen Relativitätstheorie, wobei einzig η_{ik} durch g_{ik} zu ersetzen ist. Wir kommen nun zu einem Punkt, wo sich eine neue Situation ergibt, nämlich zur Tensoranalysis.

Wenn $D^{ik\ldots}{}_{lm\ldots}$ ein Tensor vom Typ (a, b) ist, so ist in Inertialsystemen x^i

$$\frac{\partial}{\partial x^p} D^{ik\ldots}{}_{lm\ldots} =: D^{ik\ldots}{}_{lm\ldots p} = T^{ik\ldots}{}_{plm\ldots} \tag{2.6.1}$$

in der speziellen Relativitätstheorie ein Tensor $T^{ik\ldots}{}_{plm\ldots}$ vom Typ $(a, b+1)$. Partielle Differentiation erhöht also die Stufe eines Tensors um 1. Der Beweis von (2.6.1) ist einfach, man benutzt nur, daß beim Übergang von einem Inertialsystem x^i auf ein anderes $(\bar{x}^i)$ die in (2.1.4) definierten $p^i{}_k$ konstant sind und in (2.6.1) vor die Ableitung gezogen werden können. Bei den hier zu untersuchenden allgemeinen Koordinatentransformationen trifft das nicht zu. Wir wollen die Situation zunächst im Fall eines Vektorfeldes A^i genau analysieren. Bei einer Koordinatentransformation $x^i \to \bar{x}^i$ gilt

[4] Jedes *RNKS* ist ein in seinem Ursprung inertiales Koordinatensystem, aber nicht umgekehrt.

$$A^{\bar{i}} = p^{\bar{i}}{}_k A^k \tag{2.6.2}$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial x^{\bar{k}}} A^{\bar{i}} =: A^{\bar{i}}{}_{,\bar{k}} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{\bar{k}}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(p^{\bar{i}}{}_r A^r \right) = p^l{}_{\bar{k}} p^{\bar{i}}{}_{rl} A^r + p^l{}_{\bar{k}} p^{\bar{i}}{}_r A^r{}_{,l}. \tag{2.6.3}$$

Wäre der erste Term auf der rechten Seite von (2.6.3) nicht vorhanden, so hätte $A^{\bar{i}}{}_{,\bar{k}}$ das Transformationsverhalten eines Tensors vom Typ (1, 1). Das Auftreten des störenden Terms in (2.6.3) kann allerdings nichts mit Raumkrümmung zu tun haben, da dieser Zusatzterm auch im Minkowski-Raum auftritt, wenn man z. B. auf Polarkoordinaten übergeht. Denn in diesem Fall sind die $p^{\bar{i}}{}_k$ nicht konstant, und die Ableitungen $A^{\bar{i}}{}_{,\bar{k}}$ sind keine Tensorkomponenten mehr.

Wir können aber im Minkowski-Raum folgendermaßen vorgehen. Wir benutzen zunächst Inertialkoordinaten $x^{\bar{i}}$, in denen die Metrik die Form η_{ik} annimmt, und bilden dort die Ableitung $A^{\bar{i}}{}_{,\bar{k}}$. Wenn wir von einem derartigen System auf ein anderes Inertialsystem $x^{\bar{\bar{i}}}$ mit dieser Eigenschaft übergehen, so wird die Transformation durch

$$x^{\bar{\bar{i}}} = p^{\bar{\bar{i}}}{}_{\bar{k}} x^{\bar{k}} \tag{2.6.4}$$

gegeben sein, wobei die $p^{\bar{\bar{i}}}{}_{\bar{k}}$ konstante Koeffizienten sind. Bei diesen Transformationen verhält sich $A^{\bar{i}}{}_{,\bar{k}}$ wie ein Tensor:

$$A^{\bar{\bar{i}}}{}_{,\bar{\bar{k}}} = p^{\bar{\bar{i}}}{}_{\bar{l}} p^{\bar{m}}{}_{\bar{\bar{k}}} A^{\bar{l}}{}_{,\bar{m}}. \tag{2.6.5}$$

Wir definieren nun die *kovariante Ableitung* $A^{\bar{i}}{}_{;\bar{k}}$ in jedem *beliebigen* Bezugssystem durch

$$A^{\bar{i}}{}_{;\bar{k}} := p^{\bar{i}}{}_{\bar{l}}(x)\, p^{\bar{m}}{}_{\bar{k}}(x)\, A^{\bar{l}}{}_{,\bar{m}} \tag{2.6.6}$$

(Querstriche beziehen sich auf ein System mit $g_{ik} = \eta_{ik}$). Die so eingeführte kovariante Ableitung verhält sich offenbar wirklich wie ein Tensor der Stufe (1,1), und man überzeugt sich leicht, daß $A^{\bar{i}}{}_{;\bar{k}}$ unabhängig von dem speziellen Koordinatensystem $x^{\bar{i}}$ ist, von dem wir ausgegangen sind (s. Aufgabe 1). Wir wollen nun einen expliziten Ausdruck für $A^{\bar{i}}{}_{;\bar{k}}$ finden, der kein Inertialsystem benützt. Dazu setzen wir den Ausdruck (2.6.3) in (2.6.6) ein:

$$A^{\bar{i}}{}_{;\bar{k}} = p^{\bar{i}}{}_{\bar{l}}\, p^{\bar{m}}{}_{\bar{k}}\, A^{\bar{l}}{}_{,\bar{m}} = p^{\bar{i}}{}_{\bar{l}}\, p^{\bar{m}}{}_{\bar{k}} \left(p^{\bar{l}}{}_a\, p^b{}_{\bar{m}}\, A^a{}_{,b} + p^b{}_{\bar{m}}\, p^{\bar{l}}{}_{ab}\, A^a \right) = A^{\bar{i}}{}_{,\bar{k}} + p^{\bar{i}}{}_{\bar{l}}\, p^{\bar{l}}{}_{ak}\, A^a. \tag{2.6.7}$$

Um den zweiten Term in (2.6.7) auszuwerten, differenzieren wir die Relation

$$g_{ak} = p^{l}{}_{a}\, p^{m}{}_{k}\, \eta_{lm} \tag{2.6.8}$$

partiell nach x^r

$$g_{ak,r} = \left(p^{l}{}_{ar}\, p^{\bar{m}}{}_{k} + p^{l}{}_{a}\, p^{m}{}_{kr}\right) \eta_{l\bar{m}}. \tag{2.6.9}$$

Durch entsprechende Permutation der Indizes erhalten wir daraus für die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{rak} = p^{\bar{l}}{}_{ak}\, p^{\bar{m}}{}_{r}\, \eta_{lm} \tag{2.6.10}$$

oder, mittels (2.1.6),

$$\Gamma^{l}{}_{ak} = \eta^{\bar{b}\bar{c}}\, p^{l}{}_{\bar{b}}\, p^{r}{}_{\bar{c}}\, p^{\bar{l}}{}_{ak}\, p^{\bar{m}}{}_{r}\, \eta_{\bar{l}\bar{m}} = p^{\bar{l}}{}_{ak}\, p^{l}{}_{\bar{l}}. \tag{2.6.11}$$

Damit ergibt sich die kovariante Ableitung eines Vektors endgültig zu

$$\boxed{A^{l}{}_{;k} = A^{l}{}_{,k} + \Gamma^{l}{}_{ka}\, A^{a}.} \tag{2.6.12}$$

Von der oben gegebenen Definition (2.6.6) her ist es klar, daß $A^{l}{}_{;k}$ ein Tensor vom Typ (1.1) ist (s. auch Aufgabe 2).

Die hier für den Minkowski-Raum formulierten Überlegungen kann man sofort auf den Riemannschen Raum übertragen. Wir haben im Abschnitt 2.5 gesehen, daß die Riemannschen Normalkoordinaten bei beliebigen Koordinatenänderungen eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten erfahren. Es ist daher konsistent, die kovariante Ableitung eines Vektors im Riemannschen Raum dadurch zu definieren, daß wir sie im Ursprung eines *RNKS* gleich der gewöhnlichen Ableitung des Vektors setzen und beim Übergang auf beliebige andere Koordinatensysteme wieder das Transformationsverhalten (2.6.6) verlangen. Die von (2.6.6) zu (2.6.12) führende Rechnung kann dabei unverändert übernommen werden. (2.6.12) *ist daher auch eine geeignete Definition der kovarianten Ableitung eines Vektors im Riemannschen Raum.*

Um die kovariante Ableitung anderer Tensortypen zu definieren, bemerken wir zunächst, daß die kovariante Ableitung eines Skalars mit der gewöhnlichen Ableitung übereinstimmend gewählt werden kann,

$$\boxed{\Phi_{;k} := \Phi_{,k},} \tag{2.6.13}$$

da diese bereits einen (kovarianten) Vektor liefert. Wenn wir Φ als Skalarprodukt zweier Vektoren wählen, $\Phi = A^{l} B_{l}$, können wir damit sofort die kovariante Ableitung der Vektorkomponenten B_{l} bestimmen:

$$\Phi_{;k} = (A^{l} B_{l})_{;k} = A^{l}{}_{;k} B_{l} + A^{l} B_{l;k} = \Phi_{,k} = A^{l}{}_{,k} B_{l} + A^{l} B_{l,k}. \tag{2.6.14}$$

Dabei haben wir *gefordert, daß die kovariante Ableitung die Produktregel erfüllt.* Da A und B beliebige Vektoren sein sollen, folgt aus (2.6.14) sofort

$$B_{i;k} = B_{i,k} - \Gamma^l{}_{ik} B_l. \tag{2.6.15}$$

Die oben gewonnenen Resultate (2.6.12) und (2.6.15) ermöglichen es nun, die kovariante Ableitung beliebiger Tensortypen zu definieren. Da es nur auf das Transformationsverhalten des betrachteten Tensors ankommt, ist es ausreichend, als Tensor ein Produkt entsprechend vieler ko- und kontravarianter Vektoren heranzuziehen:

$$T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots} = A^i B^k \ldots C_l D_m \ldots \tag{2.6.16}$$

Aus der *Produktregel,* die wir wieder *fordern,*

$$T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots;r} = A^i{}_{;r} B^k \ldots C_l D_m \ldots + A^i B^k{}_{;r} \ldots C_l D_m \ldots + \ldots \tag{2.6.17}$$

erhalten wir das gewünschte Resultat

$$\boxed{\begin{aligned} T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots;r} &= T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots,r} + \Gamma^i{}_{rs} T^{sk\ldots}{}_{lm\ldots} + \Gamma^k{}_{rs} T^{is\ldots}{}_{lm\ldots} + \ldots \\ &\quad - \Gamma^s{}_{rl} T^{ik\ldots}{}_{sm\ldots} - \Gamma^s{}_{rm} T^{ik\ldots}{}_{ls\ldots} - \ldots \end{aligned}} \tag{2.6.18}$$

Man kann sich auch durch explizite Rechnung davon überzeugen, daß die so definierte kovariante Ableitung aus einem Tensor vom Typ (a, b) einen Tensor vom Typ $(a, b+1)$ macht.

Eine wesentliche Eigenschaft der kovarianten Ableitung ist, daß sämtliche Komponenten des metrischen Tensors „kovariant konstant" sind (Aufgabe 3):

$$\boxed{g_{ik;l} = \delta^k{}_{i;l} = g^{ik}{}_{;l} = 0.} \tag{2.6.19}$$

Man kann daher Indizes innerhalb kovarianter Ableitungen beliebig hinauf- und hinunterziehen, wie hier am Beispiel eines Vektors gezeigt werden soll:

$$\boxed{A^i{}_{;k} = \left(g^{il} A_l\right)_{;k} = g^{il} A_{l;k}.} \tag{2.6.20}$$

Diese Eigenschaft erleichtert das Rechnen mit kovarianten Ableitungen sehr. Da der Ableitungsindex ein ganz normaler Tensorindex ist, kann man ihn weiters wie üblich mit Hilfe der Metrik hinauf- und hinunterziehen:

$$A^{i;k} := g^{kl} A^i{}_{;l}. \tag{2.6.21}$$

Für kovariante Ableitungen erster Ordnung gelten somit alle Rechenregeln, die für partielle Ableitungen gelten.

Partielle Ableitungen – und das sind ja die hier definierten kovarianten Ableitungen im wesentlichen – sind Spezialfälle des Begriffes der *absoluten Ableitung* entlang einer beliebigen Kurve C: $x^i = x^i(\tau)$, wobei τ ein willkürlich gewählter Parameter ist. Für ein kontravariantes Vektorfeld A^i ist diese Ableitung durch

$$\frac{\mathrm{D}A^i}{\mathrm{D}\tau} = A^i{}_{;k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}A^i}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^i{}_{kj}\,A^j\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} \tag{2.6.22}$$

definiert[5]. Wählt man als Kurve eine der Koordinatenlinien, so reduziert sich die absolute Ableitung offenbar auf die kovariante Ableitung nach der entsprechenden Koordinate. Völlig analog definiert man die absolute Ableitung beliebiger Tensorfelder.

Wenn die absolute Ableitung eines Vektors v^i längs einer Kurve C verschwindet,

$$\frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{2.6.23}$$

nennt man den Vektor v^i entlang der Kurve parallelverschoben. Bei der *Parallelverschiebung* entlang eines infinitesimalen Stückes $\mathrm{d}x^i$ einer Kurve ändern sich die Vektorkomponenten um

$$\mathrm{d}v^i = -\Gamma^i{}_{kl}\,v^k\,\mathrm{d}x^l. \tag{2.6.24}$$

Aufgaben

1. Zeige, daß die Definition (2.6.6) der kovarianten Ableitung unabhängig von der Wahl des zugrundegelegten Inertialsystems $\bar{x}^i$ ist.

2. Zeige durch explizite Rechnung, daß (2.6.12) ein Tensor vom Typ (1,1) ist.

3. Beweise (2.6.19).

4. Beweise, daß die Divergenz eines Vektorfeldes v^k durch

$$v^k{}_{;k} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{|g|}\,v^k\right) \tag{2.6.25a}$$

und der allgemein kovariante d'Alembert-(Laplace-) Operator eines skalaren Feldes A durch

$$\Box A := A_{;k}{}^{;k} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{|g|}\,g^{ki}\frac{\partial}{\partial x^i}A\right) \tag{2.6.25b}$$

[5] In der zweiten Version von (2.6.22) ist die Kenntnis von A^i nur mehr längs C erforderlich!

gegeben sind. Ist ferner $F^{i\ldots k}$ ein *antisymmetrisches* Tensorfeld, so ist seine Divergenz durch

$$F^{i\ldots k}{}_{:k} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{|g|}\, F^{i\ldots k} \right) \tag{2.6.25c}$$

gegeben. Kann die Divergenz $T^{ik}{}_{:k}$ eines symmetrischen Tensorfeldes in eine analoge Form gebracht werden?

5. Zeige, daß sich bei Parallelverschiebung eines Vektors v^i entlang einer Geodätischen C der Winkel zwischen dem Tangentialvektor u^i von C und dem verschobenen Vektor v^i nicht ändert.

6. Zeige, daß die *Fermi-Walker-Verschiebung* eines Vektors w^i längs einer Kurve $x^i = x^i(s)$ (s ... Bogenlänge, also $u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ mit $u^i u_i = 1$), definiert durch

$$\frac{\mathrm{D}w^i}{\mathrm{d}s} = w_k\, u^k \frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{d}s} - w_k \frac{\mathrm{D}u^k}{\mathrm{d}s} u^i,$$

folgende Eigenschaften hat:

a) Das Skalarprodukt zweier F-W-transportierter Vektoren ändert sich nicht.

b) Ist C geodätisch, so ist der F-W-Transport mit der geodätischen Parallelverschiebung identisch.

c) F-W-Transport führt Tangentialvektoren in Tangentialvektoren über.

2.7 Der Riemannsche Krümmungstensor

Die bisher diskutierten Eigenschaften von partiellen und kovarianten Ableitungen stimmen völlig miteinander überein. Wir werden im folgenden zeigen, daß es aber doch wesentliche Unterschiede zwischen beiden gibt, da die Differentiationsreihenfolge im Falle von kovarianten – im Gegensatz zu partiellen – Ableitungen im allgemeinen nicht vertauschbar ist.

Betrachten wir zunächst einen Skalar Φ. Für diesen lassen sich die zweiten kovarianten Ableitungen vertauschen, da

$$\Phi_{;i;j} = \Phi_{;j;i} = \Phi_{,ij} - \Phi_{,m}\Gamma^m{}_{ij}$$

offenbar in i und j symmetrisch ist. Für einen Vektor A_i ist das nicht der Fall. Um dies zu zeigen, berechnen wir zunächst $A_{i;k;j}$. Es ist

$$
\begin{aligned}
A_{i;k;j} &= (A_{i;k})_{,j} - A_{m;k}\,\Gamma^m{}_{ji} - A_{i;m}\,\Gamma^m{}_{jk} - \\
&= A_{i,jk} - A_{m,j}\,\Gamma^m{}_{ik} - A_m\,\Gamma^m{}_{ik,j} - A_{i,m}\,\Gamma^m{}_{kj} + \\
&\quad + A_r\,\Gamma^r{}_{mi}\,\Gamma^m{}_{kj} - A_{m,k}\,\Gamma^m{}_{ji} + A_r\,\Gamma^m{}_{ji}\,\Gamma^r{}_{mk}.
\end{aligned}
$$

Vertauscht man die Ableitungen nach k und j, so ergibt sich die *Ricci-Identität*

$$\boxed{A_{i,k;j} - A_{i;j,k} = A_r\,R^r{}_{ikj}.} \tag{2.7.1}$$

wobei

$$\boxed{R^r{}_{ikj} := \Gamma^r{}_{ij,k} - \Gamma^r{}_{ik,j} + \Gamma^r{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^r{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{ik}} \tag{2.7.2}$$

der *Riemannsche Krümmungstensor* ist. Die Tensoreigenschaft des in (2.7.2) definierten Symbols $R^r{}_{ikj}$ brauchen wir nicht eigens zu beweisen, da sie sofort aus dem Quotiententheorem folgt. Auf der linken Seite von (2.7.1) steht offenbar ein Tensor, auf der rechten Seite muß daher ebenfalls ein Tensor stehen. Da A_r ein Tensor ist, folgt daraus sofort, daß auch $R^r{}_{ikj}$ ein Tensor sein muß. Durch Herunterziehen des ersten Index in (2.7.2) erhält man den vollständig kovarianten Riemannschen Krümmungstensor

$$R_{hijk} := R^r{}_{ijk}\,g_{hr}. \tag{2.7.3}$$

Nach leichter, aber längerer Rechnung kann man dies in folgenden äquivalenten Formen schreiben[6]:

$$R_{hijk} = \Gamma_{hik,j} - \Gamma_{hij,k} + \Gamma^l{}_{ij}\,\Gamma_{lhk} - \Gamma^l{}_{ik}\,\Gamma_{lhj}. \tag{2.7.4}$$

$$R_{hijk} = \tfrac{1}{2}(g_{hk,ij} + g_{ij,hk} - g_{ik,jh} - g_{jh,ik}) + g^{ml}(\Gamma_{mij}\,\Gamma_{lhk} - \Gamma_{mik}\,\Gamma_{lhj}). \tag{2.7.5}$$

Die letztere Form des Riemanntensors ist besonders nützlich, da sie explizit die *Symmetrieeigenschaften* dieses Tensors aufzeigt:

$$R_{hijk} = -R_{ihjk} \tag{2.7.6a}$$

$$R_{hijk} = -R_{hikj} \tag{2.7.6b}$$

$$R_{hijk} = R_{jkhi} \tag{2.7.6c}$$

$$R_{hijk} + R_{hjki} + R_{hkij} = 0. \tag{2.7.6d}$$

[6]Siehe z. B. A. Lichnérowicz (1966), p. 90. Beachte unterschiedliche Konventionen bei der Indexstellung an Christoffel-Symbolen.

wie man mit Hilfe von (2.7.5) leicht nachrechnet. Diese Symmetrieeigenschaften reduzieren die Zahl der unabhängigen Komponenten des Krümmungstensors wesentlich, so daß schließlich im n-dimensionalen Raum nur mehr $n^2(n^2-1)/12$ unabhängige Komponenten übrig bleiben. Für $n = 4$, also für die Raum-Zeit, sind das 20 Komponenten.

Der Krümmungstensor nimmt in der Riemannschen Geometrie und damit auch in der allgemeinen Relativitätstheorie eine zentrale Stellung ein. Wir wollen seine Bedeutung hier vorläufig an einem einfachen Beispiel illustrieren. Im flachen Raum gibt es stets ein Koordinatensystem, in dem die Metrik die einfache Form $g_{ik} = \eta_{ik}$ annimmt (cartesische Koordinaten). In diesem Koordinatensystem verschwinden alle Christoffel-Symbole und daher auch alle Komponenten des Riemann-Tensors. Da aber das Verschwinden eines Tensors unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist, so ist der Riemanntensor im flachen Raum für ein beliebiges Koordinatensystem identisch Null. Wenn nun eine Metrik vorgelegt wird, von der man vermutet, daß sie nur eine komplizierte Form der Metrik des ebenen Raumes ist (wie etwa parabolische Koordinaten etc.), so braucht man zunächst nur den Riemann-Tensor für diese Metrik zu berechnen: falls er verschwindet, hat der Raum die Chance, flach zu sein. Es ist eine schwierigere Aufgabe, zu beweisen, daß tatsächlich aus dem Verschwinden des Riemanntensors folgt, daß der Raum lokal flach ist (d. h. jeder Punkt hat eine Umgebung, in der ein Koordinatensystem mit $g_{ik} = \eta_{ik}$ existiert), und im konkreten Fall eine Transformation auf solche cartesische Inertialkoordinaten zu finden[7].

Aus dem Riemann-Tensor können durch Kontraktion zwei weitere Größen gebildet werden, die in der allgemeinen Relativitätstheorie eine große Rolle spielen. Es sind dies der Ricci-Tensor

$$\boxed{R_{ik} := R^h{}_{ikh} = R_{ki}} \tag{2.7.7}$$

und der Krümmungs-Skalar

$$\boxed{R := R_{ik}\, g^{ik}.} \tag{2.7.8}$$

Der Ausgangspunkt unserer Überlegungen war in diesem Abschnitt die Nichtvertauschbarkeit der kovarianten Ableitungen eines Vektors. Es wäre nun ohne Schwierigkeiten möglich, die Formel (2.7.1) für beliebige Tensoren zu verallgemeinern. Da wir aber das Resultat nicht weiter brauchen werden, wollen wir stattdessen lieber die Vertauschung der in (2.6.22) definierten absoluten

[7] Man geht dazu von der Bemerkung aus, daß der Gradient einer cartesischen Koordinate ein (längs beliebiger Kurven) paralleles Vektorfeld ist, das daher durch seinen Wert in einem beliebig gewählten Punkt gemäß (2.6.23) bestimmt ist. Die Lösung kann für n = 3 und 4 mittels Spinoren auf die Integration einer einzigen Riccatischen Differentialgleichung und Quadraturen zurückgeführt werden.

Ableitungen eines Vektors studieren. Um die Vertauschbarkeit von Ableitungen zu untersuchen, braucht man mindestens zwei Richtungen, in die abgeleitet wird. Es sei daher in der Mannigfaltigkeit X^n ein Kurvennetz $x^i = x^i(u, v)$ gegeben. Ein derartiges Kurvennetz ist eine zweidimensionale Fläche, die in der Mannigfaltigkeit eingebettet ist, samt einer Schar von darauf befindlichen Koordinatenlinien (u-, v-Linien). Eine einfache Rechnung, die völlig analog zu der durchgeführten ist, ergibt dann

$$\frac{D^2 A^i}{\partial u\, \partial v} - \frac{D^2 A^i}{\partial v\, \partial u} = R^i{}_{jmk}\, A^j \frac{\partial x^m}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} \tag{2.7.9}$$

Dieses Resultat werden wir in Kapitel 8 bei der Diskussion von Singularitäten verwenden.

Durch kovariante Differentiation der Gl. (2.7.2) ergeben sich neue wesentliche Eigenschaften des Krümmungstensors, nämlich die *Bianchi-Identitäten*:

$$\boxed{R^h{}_{ijk:l} + R^h{}_{ikl:j} + R^h{}_{ilj:k} = 0.} \tag{2.7.10}$$

Daß derartige Identitäten existieren müssen, ergibt sich daraus, daß wir den Riemann-Tensor mittels eines „Kommutators" zweier kovarianter Ableitungen einführten und für Kommutatoren die Jacobi-Identität gilt. Wollte man diese Identitäten allerdings durch direkte Rechnung und Ausführung der kovarianten Differentiation mit Hilfe der Regeln (2.6.18) verifizieren, so wäre dies eine überaus lange und unübersichtliche Rechnung. Man geht daher folgendermaßen vor: Wir führen die Rechnung zunächst im Ursprung eines Riemannschen Koordinatensystems durch. Dort verschwinden alle Christoffel-Symbole, $\Gamma^i{}_{kl}(x = 0) = 0$, aber nicht deren Ableitungen $\Gamma^i{}_{kl,m}$. Der Riemann-Tensor hat in $x = 0$ die einfache Form

$$R^h{}_{ijk} = \Gamma^h{}_{ik,j} - \Gamma^h{}_{ij,k}. \tag{2.7.11}$$

Aber auch die Ableitung des Riemann-Tensors hat, wie man sich leicht überlegt, im Ursprung des *RNKS* eine ebenso einfache Form

$$R^h{}_{ijk:l} = \Gamma^h{}_{ik,jl} - \Gamma^h{}_{ij,kl}. \tag{2.7.12}$$

Durch zyklische Permutation der Indizes j, k und l erhält man daraus sofort das gewünschte Resultat (2.7.10). Da diese Gleichung die Form einer Tensorgleichung hat, gilt sie nicht nur im zugrundegelegten *RNKS*, sondern auch in einem beliebigen Koordinatensystem.

Kontrahiert man die Bianchi-Identitäten (2.7.10) über h und j, so erhält man $R_{ik:l} + R^h{}_{ikl,h} - R_{il,k} = 0$. Nach Multiplikation mit g^{il} ergibt sich daraus

$$R^h{}_{k:h} = \frac{1}{2} R_{:k}. \tag{2.7.13}$$

Diese Formel können wir auch in der Form

$$\boxed{G^i{}_{k;i} = 0, \qquad G^i{}_k := R^i{}_k - \tfrac{1}{2}\,\delta^i{}_k R} \tag{2.7.14}$$

schreiben. (2.7.14) zeigt, daß die Divergenz des *Einstein-Tensors* $G^i{}_k$ verschwindet. Dieses Resultat ist von grundlegender Bedeutung für die allgemeine Relativitätstheorie. G_{ik} ist nämlich für $n = 4$ neben g_{ik} selbst der einzige Tensor zweiter Stufe mit $G^i{}_{k;i} = 0$, der aus g_{ik} und dessen ersten zwei Ableitungen gebildet werden kann[8].

Aufgaben

1. Zeige, daß nahe dem Ursprung P_0 eines *RNKS* die Metrik die Form

$$g_{ik}(x) = \eta_{ik} + \tfrac{1}{3} R_{ilmk}(0)\, x^l x^m + O(x^3) \tag{2.7.15}$$

annimmt, d. h., in (2.5.13)

$$c_{iklm} = \tfrac{1}{2} g_{ik,lm}(0) = \tfrac{1}{3} R_{i(lm)k}(0) \tag{2.7.16}$$

gilt und dieser in l, m symmetrisierte Anteil des Riemanntensors letzteren bereits voll bestimmt:

$$R_{imlk}(0) \equiv 4\, c_{i[kl]m}. \tag{2.7.17}$$

Anleitung: $g_{ik,lm}(0)\, x^l x^m$ kann berechnet werden, indem man (2.7.5) in P_0 auswertet und das Resultat von Aufgabe 1, Abschnitt 2.5 benutzt. – Die höheren Entwicklungsterme lassen sich durch die kovarianten Ableitungen des Riemanntensors in P_0 ausdrücken. Wegen ihrer rekursiven Berechnung siehe z. B. den Appendix II zu M. Atiyah, R. Bott, V. Patodi, Inv. Math. **19**, 279 (1973) + Errata ebenda, **28**, 280 (1975), oder P. Günther, Z. angew. Math. u. Mech. **55**, 205 (1975).

2. Zeige, daß die in (2.6.23) eingeführte *Parallelverschiebung* eines Vektors wegabhängig ist und bei einer Verschiebung eines Vektors w^i rund um eine (infinitesimale) geschlossene Kurve (Abbildung 2.3) in einem Kurvennetz $x^i = x^i(u, v)$ ein Vektor $\bar{w}^i$ entsteht, der sich von w^i um

$$\Delta w^i = -\frac{1}{2}\left(R^i{}_{jkl}\, w^j \frac{\partial x^k}{\partial u}\frac{\partial x^l}{\partial v}\right)_P \Delta u \Delta v \tag{2.7.18}$$

unterscheidet (Eisenhart (1960), p. 67).

[8] D. Lovelock, J. Math. Phys. 13, 874 (1972).

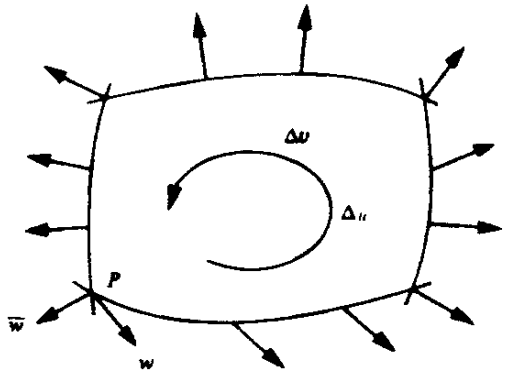

Abbildung 2.3: Parallelverschiebung längs einer geschlossenen Kurve.

2.8 Räume konstanter Krümmung

Von besonderer Bedeutung für die Kosmologie sind Räume konstanter Krümmung, die die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Kugel auf n-dimensionale Räume darstellen. Die Eigenschaften, die eine Kugel im 3-dimensionalen Raum charakterisieren, sind ihre Homogenität und Isotropie. Kein Punkt und keine Richtung auf der Kugel sind vor anderen Punkten bzw. Richtungen ausgezeichnet. Wir wollen diese Eigenschaften – wie in der Kosmologie – zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen machen und sie auf n Dimensionen verallgemeinern.

Beginnen wir zunächst mit der Isotropie. Wenn in einem Punkt der Mannigfaltigkeit X^n keine Richtung vor einer anderen ausgezeichnet sein soll, so muß der Riemannsche Krümmungstensor (wie auch jeder andere aus g_{ik} gebildete Tensor) im Ursprung eines *RNKS* ein unter beliebigen Drehungen invarianter Tensor sein, wobei unter „Drehungen" im Falle der speziellen Relativitätstheorie natürlich Lorentz-Transformationen zu verstehen sind. Wir suchen daher einen Tensor 4. Stufe, der die Symmetrie des Riemann-Tensors aufweist und rotationsinvariant ist. Der allgemeinste Tensor, der der zweiten Forderung genügt, ist von der Form[9]

$$R_{iklm} = a\,\eta_{ik}\,\eta_{lm} + b\,\eta_{il}\,\eta_{km} + c\,\eta_{im}\,\eta_{kl} + d\,\epsilon_{iklm}; \tag{2.8.1}$$

a, b, c, d sind darin Konstante. Da R_{iklm} ein Tensor sein soll und ϵ_{iklm} ein Pseudotensor ist, muß $d = 0$ sein (dieser Term hätte nur für $n = 4$ auftreten können). Wegen (2.7.6) muß auch der erste Term in (2.8.1) verschwinden und $c = -b$ sein. R_{iklm} hat daher im Ursprung des *RNKS* die einfache Form

$$R_{iklm} = b(\eta_{il}\,\eta_{km} - \eta_{im}\,\eta_{kl}). \tag{2.8.2}$$

[9] Im allgemeinen Fall einer X^n mit indefiniter Metrik ist unter η_{ik} eine Diagonalmatrix mit einer entsprechenden Anzahl von $+1$ (r-mal) bzw. -1 ($n-r$ mal) in der Hauptdiagonale zu verstehen, anstelle der Lorentz-Transformationen tritt dann die Gruppe $SO(r, n-r)$.

Wenn wir zu einem beliebigen Koordinatensystem übergehen, so nimmt die Tensorrelation (2.8.2) die allgemeine Form

$$R_{iklm} = b(x)(g_{il}\, g_{km} - g_{im}\, g_{kl}) \tag{2.8.3}$$

an. Wäre dabei, wie angedeutet, b eine nichtkonstante Funktion von x, so gäbe ihr Gradient eine im Punkt x ausgezeichnete Richtung an. Daher ist b tatsächlich eine Konstante. In diesem Sinn ist die Krümmung somit auch homogen und die Homogenität eine Folge der Isotropie.

Da der Riemann-Tensor für einen Raum konstanter Krümmung eine einfache Form hat, wird man vermuten, daß sich auch das Linienelement auf einfache Weise schreiben läßt. Um dies zu zeigen, brauchen wir den Begriff der Konformität zweier Räume. Wenn die metrischen Tensoren g_{ij} und $\bar{g}_{ij}$ zweier Räume die Relation

$$\bar{g}_{ij} = \psi^2 g_{ij} \tag{2.8.4}$$

erfüllen, so heißen die beiden Räume zueinander konform. In diesem Fall stimmen die *Weylschen konformen Krümmungstensoren*

$$\boxed{\begin{aligned} C^h{}_{ijk} := R^h{}_{ijk} &+ \frac{1}{n-2}\left(\delta^h{}_j\, R_{ik} - \delta^h{}_k\, R_{ij} + g_{ik}\, R^h{}_j - g_{ij}\, R^h{}_k\right) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^h{}_k\, g_{ij} - \delta^h{}_j\, g_{ik}\right) \end{aligned}} \tag{2.8.5}$$

der beiden Räume überein (siehe Aufgabe 1), d. h.

$$\bar{C}^m{}_{ijk} = C^m{}_{ijk}. \tag{2.8.6}$$

Entspricht $\bar{g}_{ij}$ einem flachen Raum, so muß auch der Weyltensor von g_{ij} verschwinden; umgekehrt ist diese Bedingung für $n \geq 4$ auch hinreichend dafür, daß g_{ij} konform zu einer flachen Metrik ist *(konform-flacher Raum)*. Für $n = 3$ verschwindet der Weyltensor identisch, und es ist das Verschwinden von

$$C_{ijk} = R_{ij;k} - R_{ik;j} + \tfrac{1}{4}(g_{ik}\, R_{,j} - g_{ij}\, R_{,k}) \tag{2.8.7}$$

notwendig und hinreichend für konforme Flachheit[10]. Einsetzen von (2.8.3) in (2.8.5), (2.8.7) zeigt nun, daß jeder Raum konstanter Krümmung *konform-flach* ist.

Das Linienelement eines Raumes konstanter Krümmung läßt sich daher stets in der einfachen Form $g_{ik} = \psi^{-2}(x)\delta_{ik}$ schreiben, wobei δ_{ik} für die Raum-

[10] Siehe z. B. Eisenhart (1960), p. 90. Der Leser sei hier vor einer unzutreffenden Feststellung bezüglich des Weyltensors in Anderson (1967), p. 63 gewarnt, aufgrund derer z. B. $n = 3$ keine Ausnahme bilden dürfte.

Zeit durch η_{ik} zu ersetzen ist. Setzt man dies in (2.7.5) ein, so erhält man für den Krümmungstensor

$$R_{hijk} = v^{-3}(\delta_{jh}\, v_{,ik} + \delta_{ik}\, v_{,hj} - \delta_{hk}\, v_{,ij} - \delta_{ij}\, v_{,hk})$$

$$+ v_{,l}\, v_{,m}\, \delta^{lm}(\delta_{ij}\, \delta_{hk} - \delta_{hj}\, \delta_{ik})v^{-4}.$$

(2.8.3) und (2.8.8) führen für einen Raum konstanter Krümmung auf

$$v(\delta_{jh}\, v_{,ik} + \delta_{ik}\, v_{,hj} - \delta_{hk}\, v_{,ij} - \delta_{ij}\, v_{,hk}) = -(b + v_{,l}\, v_{,m}\, \delta^{lm})(\delta_{ij}\, \delta_{hk} - \delta_{hj}\, \delta_{ik}).$$

Für $h \neq i = j \neq k \neq h$ folgt $v_{,hk} = 0$, so daß v die Form $\sum_k f_k(x^k)$ haben muß. Für $i = j \neq h = k$ ergibt die letzte Gleichung bei aufgehobener Summenkonvention

$$f_{i,ii} + f_{h,hh} = \left(b + \sum f_{k,k}^2\right)/v.$$

Da die linke Seite nur von x^i und x^h abhängt, die rechte Seite aber von allen Koordinaten, folgt

$$\left(b + \sum f_{k,k}^2\right)/v = c = \text{const.}, \qquad f_{h,hh} = \frac{c}{2}, \qquad f_h = \frac{c}{4}(x^h + a^h)^2 + d_h.$$

Wählen wir $a^h = 0$, was durch Verschiebung des Koordinatenursprungs erreichbar ist, und setzen $\sum d_h = d$, so wird

$$v = \sum_h f_h = d + \frac{c}{4}\sum_h (x^h)^2, \qquad b = cd.$$

$d \neq 0$ setzen wir ferner $x = \bar{x}d$ und erhalten schließlich

$$\mathrm{d}s^2 = v^{-2}\delta_{ik}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^k = \frac{\delta_{\bar{i}\bar{k}}\, \mathrm{d}x^{\bar{i}}\, \mathrm{d}x^{\bar{k}}}{\left(1 + \frac{b}{4}\, \delta_{\bar{l}\bar{m}}\, x^{\bar{l}}\, x^{\bar{m}}\right)^2}. \tag{2.8.8}$$

Für $d = 0$ ($b = 0$, flacher Raum) ist stattdessen eine Inversion $x^i \to x^i / \sum (x^h)^2$ vorzunehmen, um auf die Form (2.8.8) zu kommen. Wir werden dieses Resultat in der Kosmologie weiterverwenden.

Aufgaben

1. Berechne R_{ik} und R für einen konform-flachen Raum und zeige, daß der Weylsche Krümmungstensor verschwindet.

2. Ein dreidimensionaler Raum konstanter Krümmung hat nach (2.8.8) in Polarkoordinaten das Linienelement

$$ds^2 = (1 + b\bar{r}^2/4)^{-2}(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2). \tag{2.8.9}$$

Zeige, daß für $b \neq 0$ die Substitution $-kr^2 = (1+b\bar{r}^2/4)^{-2} \cdot b\bar{r}^2$ – wobei $k = \pm 1$ für $b \lessgtr 0$ – dieses Linienelement auf die in der Kosmologie gebräuchliche Form

$$ds^2 = \mathcal{R}^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2\right] \tag{2.8.10}$$

bringt, wobei $\mathcal{R}^2 = -k/b = n(n-1)k/R$.

3. Bestätige (2.7.15) im Falle eines Raumes konstanter Krümmung durch explizite Rechnung mit Hilfe von (2.8.3), (2.8.8).

2.9 Symmetriegruppen und Killing-Vektoren

Räume konstanter Krümmung (z. B. Kugel) weisen eine Symmetriegruppe auf, die sorgfältig von der Gruppe der Koordinatentransformationen zu unterscheiden ist. Bei der folgenden Untersuchung dieser Symmetriegruppen wollen wir uns auf die infinitesimalen Gruppenelemente beschränken. Symmetrieoperationen (oder Bewegungen) eines Riemannschen Raumes können wir ganz allgemein folgendermaßen charakterisieren. Durch die Transformation

$$\bar{x}^i = x^i + \epsilon\, v^i(x) \tag{2.9.1}$$

(ϵ ... infinitesimaler Parameter, v^i ... beliebiges Vektorfeld) wird jedem Punkt x ein neuer Punkt $\bar{x}$ auf der Mannigfaltigkeit X^n zugeordnet. Wenn dabei alle Abstände ungeändert bleiben, so heißt (2.9.1) eine *Bewegung* oder *Isometrie* der X^n. Es muß dabei der Abstand der Nachbarpunkte x, $x + dx$ der gleiche sein wie jener der Bildpunkte $\bar{x}$, $\bar{x} + d\bar{x}$:

$$ds^2 = g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k = g_{ik}(\bar{x})\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^k = d\bar{s}^2. \tag{2.9.2}$$

Diese Forderung entspricht genau der anschaulichen Vorstellung, die man z. B. von der Symmetrie einer Kugel hat: Liegen zwei (unendlich benachbarte konzentrische) Kugelschalen ineinander, so kann man sie relativ zueinander frei bewegen (ineinander drehen), da die metrischen Zusammenhänge in jedem Punkt $\bar{x}$, der durch eine Drehung um den Mittelpunkt über x zu liegen kommt, die gleichen sind wie in x.

Werten wir (2.9.2) mittels (2.9.1) aus, so ist

$$
\begin{aligned}
g_{ik}(\bar{x}) &= g_{ik}(x) + \epsilon\, g_{ik,j}\, v^j, \\
\mathrm{d}\bar{x}^i &= \mathrm{d}x^i + \epsilon\, v^i{}_{,m}\, \mathrm{d}x^m, \\
\mathrm{d}\bar{s}^2 &= \mathrm{d}s^2 + \epsilon(g_{mn,j}\, v^j + g_{in}\, v^i{}_m + g_{mk}\, v^k{}_n)\, \mathrm{d}x^m\, \mathrm{d}x^n
\end{aligned}
\tag{2.9.3}
$$

bis auf Glieder $\sim \epsilon^2$, die wir vernachlässigen. Soll (2.9.2) für alle benachbarten Punktepaare gelten, so muß der Ausdruck

$$
\mathcal{L}_v g_{mn} := g_{mn,j}\, v^j + g_{jn}\, v^j{}_{,m} + g_{mj}\, v^j{}_{,n} \equiv v_{n;m} + v_{m;n} \tag{2.9.4}
$$

verschwinden (die Übereinstimmung der beiden Versionen von (2.9.4) ist direkt verifizierbar und durch Übergang zu einem *RNKS* sofort einzusehen: $\mathcal{L}_v g_{mn}$ definiert nämlich als Koeffizientenmatrix der Invarianten $(\mathrm{d}\bar{s}^2 - \mathrm{d}s^2)/\epsilon$ einen Tensor). $\mathcal{L}_v g_{mn}$ heißt die *Lie-Ableitung* von g_{mn}; ihre Bedeutung und Verallgemeinerung wird im nächsten Abschnitt erläutert. Als Bedingung dafür, daß das Vektorfeld v^i gemäß (2.9.1) eine infinitesimale Bewegung (Symmetrie, Isometrie) erzeugt, erhalten wir die *Killing-Gleichung*

$$
\boxed{v_{n;m} + v_{m;n} = 0,} \tag{2.9.5}
$$

ihre Lösungen um heißen Killing-Vektoren.

Als Beispiel betrachten wir zunächst den Minkowski-Raum. In Cartesischen Koordinaten vereinfachen sich die Killing- Gleichungen (2.9.5) zu

$$
v_{m,n} + v_{n,m} = 0 \tag{2.9.6}
$$

mit der allgemeinen Lösung

$$
v_m = a_m + \alpha_{mn} x^n, \qquad \alpha_{mn} = -\alpha_{nm}. \tag{2.9.7}
$$

Diese Lösung enthält 10 freie Parameter und entspricht genau den infinitesimalen Transformationen der Poincaré-Gruppe. Der ebene, 4-dimensionale Raum läßt daher eine 10-parametrige (in n Dimensionen $n(n+1)/2$–parametrige) Bewegungsgruppe zu. Man kann zeigen, daß auch die Räume konstanter Krümmung ($\neq 0$) Bewegungsgruppen mit dieser Maximalzahl von Parametern (aber anderer Struktur) aufweisen.

Bei einem beliebigen Riemannschen Raum wird die Killing-Gleichung i. a. überhaupt keine Lösung haben (die Integrabilitätsbedingungen, die zu dem System von partiellen Differentialgleichungen (2.9.5) gehören, werden i. a. nicht erfüllbar sein), und nur in Spezialfällen werden Killing-Vektoren existieren; die Anzahl linear unabhängiger Lösungen gibt die Anzahl der Parameter der Symmetriegruppe an. Hinzu kommen noch eventuell diskrete Symmetrien, die von den hier angestellten infinitesimalen Überlegungen nicht erfaßt werden.

Aufgaben

1. Zeige (durch systematische Integration des Systems (2.9.6) unter Verwendung der Integrabilitätsbedingungen), daß (2.9.7) die allgemeine Lösung von (2.9.6) ist.

2. Zeige: $u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ sei der Tangentenvektor einer Geodätischen; dann ist der Ausdruck $\xi_i u^i$ längs der Geodätischen konstant, wenn ξ_i ein Killing-Vektor ist. Erläutere die physikalische Bedeutung dieser Erhaltungsgrößen für den flachen Raum. Leite diese Erhaltungsgrößen auch aus dem Variationsprinzip für Geodätische mittels des 1. Noether-Theorems her.

3. Zeige: Ist v^i ein Killing-Vektor, so gibt es ein Koordinatensystem, in dem die Komponenten g_{ik} von einer Koordinate unabhängig sind; ist v^i zeitartig ($g_{ik}v^iv^k > 0$), so ist diese Koordinate t zeitartig (Benutze die erste Form von (2.9.4) und wähle das System so, daß v einfache Komponenten erhält):

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} = 0 \quad \text{(stationär)}. \tag{2.9.8}$$

Riemannsche Räume, bei denen ein zeitartiger Killing-Vektor existiert, heißen aus diesem Grund *stationär*: Existenz eines zeitartigen Killing-Vektors ist die geometrisch-invariante Ausdrucksweise für Zeitunabhängigkeit.

4. Bei *statischen* Feldern sind zusätzlich positive und negative Richtung der zeitartigen Koordinate t gleichwertig. Zeige, daß diese Bedingung $g_{0\alpha} = 0$ in dem speziellen Koordinatensystem (2.9.8) erfordert und dies äquivalent zu der geometrischen Aussage ist, daß der zeitartige Killing-Vektor orthogonal zur Hyperfläche $t = \text{const}$ ist. Zeige weiter, daß für ein hyperflächenorthogonales Vektorfeld v gelten muß

$g_{00}(x)dt^2 + g_{ik}\,dx^i dx^k$

$$v_{[j}v_{k,m]} = 0. \tag{2.9.9}$$

Die invariante Kennzeichnung statischer Gravitationsfelder besteht also in der Existenz eines zeitartigen hyperflächenorthogonalen Killing-Vektors.

5. *Räume maximaler Symmetrie.* Die Killing-Gleichungen bilden ein System von $\frac{1}{2}n(n+1)$ partiellen Differentialgleichungen für die n unbekannten Funktionen v_m.
a) Leite durch kovariantes Differenzieren von (2.9.5) mittels (2.7.1, 6d) folgende *Integrabilitätsbedingung* ab:

$$v_{m;nj} = -R^r{}_{jmn}v_r. \tag{2.9.10}$$

Die zweiten und höheren Ableitungen von v_m lassen sich also linear-homogen durch v_m, $v_{m;n}$ ausdrücken.

b) Durch erneute Differentiation ergeben sich die weiteren Integrabilitätsbedingungen

$$v_r(R^r{}_{jmn;k} - R^r{}_{kmn;j}) + v_{r;k}R^r{}_{jmn} - v_{r;j}R^r{}_{kmn} + v_{r;n}R^r{}_{mjk} + v_{m;r}R^r{}_{njk} = 0, \tag{2.9.11}$$

und dieser Prozeß kann fortgesetzt werden, um immer weitere Bedingungen für die v_m, $v_{m;n}$ zu liefern. Das ergibt ein linear-homogenes Gleichungssystem, von dessen Rang es abhängt, ob und wieviele unabhängige nichttriviale Lösungen für die $\frac{1}{2}n(n+l)$ Größen v_m, $v_{m;n}$ $(= -v_{n;m})$ existieren. (Das System ist formal unendlich, in Sonderfällen kann es aber sein, daß von einer gewissen Differentiationsordnung an keine neuen unabhängigen Gleichungen mehr auftreten.)

c) Die *größtmögliche Anzahl von Lösungen* ergibt sich, wenn bereits (2.9.11) identisch erfüllt ist, d. h.

$$R^r{}_{jmn;k} = R^r{}_{kmn;j}, \tag{2.9.12}$$

$$\delta^{[s}{}_{[k}R^{r]}{}_{j]mn} = \delta^{[s}{}_{[m}R^{r]}{}_{n]jk}. \tag{2.9.13}$$

Für $n > 2$ folgt daraus durch Kontraktion, daß der Raum *konstante Krümmung* hat (vgl. (2.8.3ff.)). Zeige, daß dann (2.9.12, 13) automatisch erfüllt sind. Für $n = 2$ ist zu zeigen, daß aus (2.9.12) konstante Gaußsche Krümmung folgt, d. h., $b(x) = \text{const.}$ in (2.8.3), und daß dann (2.9.13) erfüllt ist.

d) Diskutiere die *Struktur der maximalen Symmetriegruppe* eines konstant gekrümmten Raumes in Abhängigkeit von Signatur der Metrik und Vorzeichen der Krümmung. Beweise dabei die Möglichkeit einer lokalen Einbettung als *Pseudo-Sphäre* in einem $(n+1)$- dimensionalen pseudoeuklidischen Raum.

Anleitung: Sei $b \neq 0$ und z^i $(i = 1, \ldots, n)$ und z^0 cartesische Koordinaten in einem Raum mit Metrik (vgl. Fußnote bei (2.8.1), $\epsilon = \operatorname{sign} b$)

$$\mathrm{d}s^2 = \epsilon\,(\mathrm{d}z^0)^2 + \eta_{ik}\,\mathrm{d}z^i\,\mathrm{d}z^k. \tag{2.9.14}$$

Projiziere die Pseudosphäre $\epsilon(z^0)^2 + \eta_{ik}\,z^i\,z^k = b^{-1}$ stereographisch auf die Hyperebene $z^0 + |b|^{-1/2} = 0$. Verwende die übrigen cartesischen Koordinaten als krummlinige Koordinaten x^i auf der Sphäre, so daß $z^i = x^i(1 + b\,\eta_{ik}\,x^i\,x^k/4)^{-1}$. Es ergibt sich dann (2.8.8) aus (2.9.14).

Zusammengefaßt: n-dimensionale Riemann-Räume maximaler Symmetrie haben konstante Krümmung. Die Symmetriegruppe ist $n(n+1)/2$-parametrig und hat die Struktur der Drehgruppe eines pseudoeuklidischen R_{n+1} (Krümmung $\neq 0$) oder die der Bewegungsgruppe eines pseudoeuklidischen R_n (Krümmung $= 0$).

2.10 Invariante Tensorfelder und Lie-Ableitungen

Wir wollen in diesem Abschnitt den Begriff der Symmetriegruppe und der Lie-Ableitung auf beliebige Tensorfelder verallgemeinern. Um eine Vorstellung von Tensorfeldern zu bekommen, die unter Symmetrieoperationen invariant sind, betrachten wir zunächst drei Beispiele *invarianter Vektorfelder* (Abbildung 2.4). Dabei ist Abbildung 2.4a unter beliebigen Translationen invariant (d. h., wenn man die Abbildung auf Transparentpapier zeichnet und beliebig parallelverschiebt, kommt sie mit sich zur Deckung). Abbildung 2.4b unter Translationen senkrecht zur Richtung des Vektorfeldes und Abbildung 2.4c unter Rotationen (offenbar gibt es keine Vektorfelder, die zugleich translations- und rotationsinvariant sind).

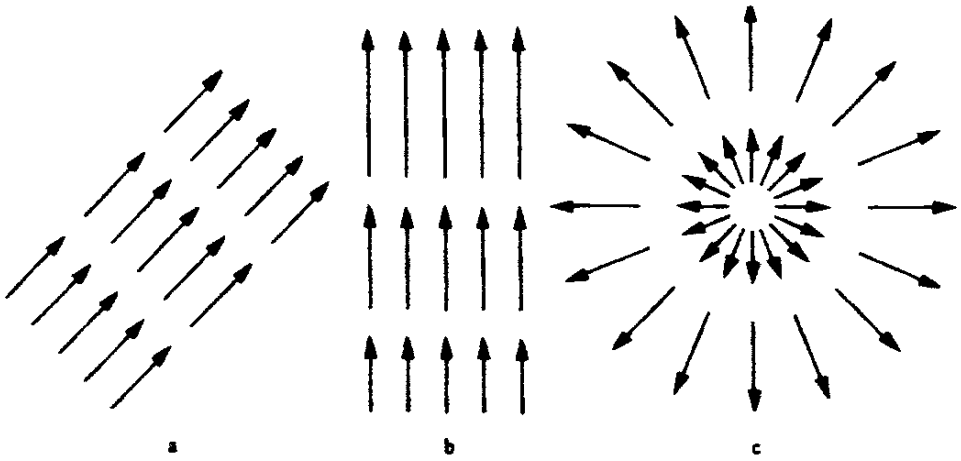

Abbildung 2.4: Invariante Vektorfelder im $\mathbf{R}_2$.

Analog kann man die Invarianzeigenschaften von *skalaren Feldern* veranschaulichen, indem man die „Isoskalarflächen" zeichnet und die Abbildungen bestimmt, unter denen diese Flächen ineinander übergehen. Schließlich können noch invariante *symmetrische Tensorfelder* zweiter Stufe einfach veranschaulicht werden, indem man in jedem Punkt die zugehörige Fläche zweiter Ordnung („Indikatrix") einzeichnet. (2.9.2) bedeutet dann genau, daß das g_{ik} entsprechende Indikatrix„muster" bei der Verschiebung (2.9.1) mit sich selbst zur Deckung kommt. Ein Beispiel eines translationsinvarianten Indikatrixmusters zeigt Abbildung 2.5.

Formal ergeben sich zwei Problemstellungen, nämlich die Bestimmung der vollen Symmetriegruppe eines gegebenen Tensorfeldes und die Bestimmung aller Tensorfelder, die eine gegebene Symmetriegruppe aufweisen. Die oben anschaulich beschriebenen Operationen kann man mathematisch folgendermaßen formulieren: Bei der Verschiebung der Abbildungen 2.4a - c wird jedem Punkt P der Mannigfaltigkeit ein neuer Punkt $\bar{P}$ zugeordnet, wobei der Wert des Vektor-

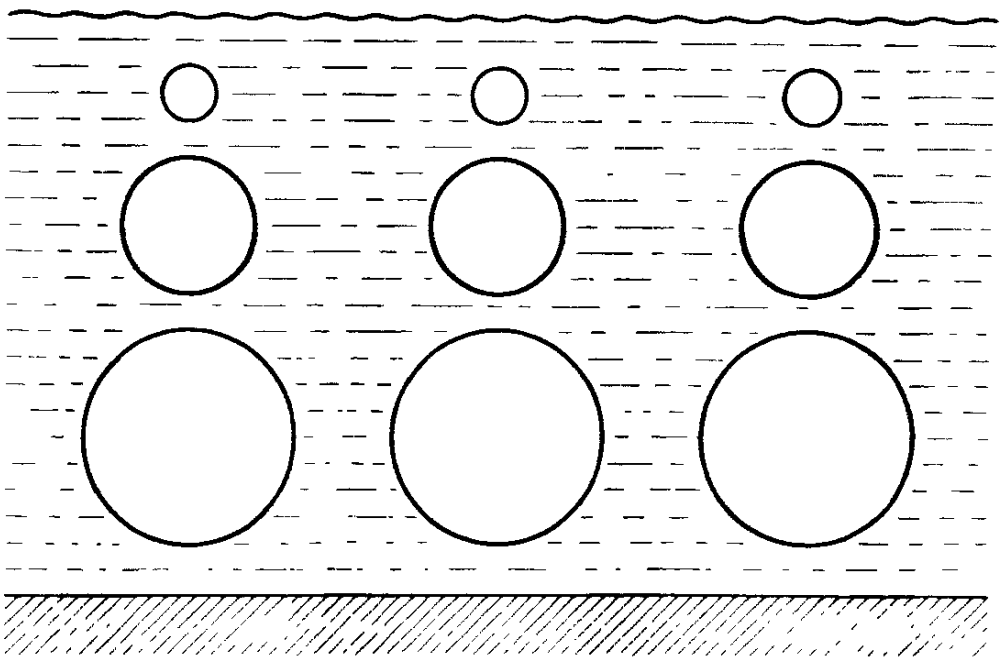

Abbildung 2.5: Indikatrixfeld des Spannungstensors einer Flüssigkeit im Schwerefeld.

(allgemeiner Tensor-) felds in P nach $\bar{P}$ übertragen wird. In $\bar{P}$ sind dann zwei verschiedene Tensoren (der ursprünglich dort gegebene und der hintransportierte) definiert. Damit entstehen zwei Tensorfelder. Falls der Unterschied zwischen diesen beiden Tensorfeldern verschwindet, ist die von den P nach den $\bar{P}$ führende Transformation eine Symmetrieoperation des Tensorfeldes. Dabei wollen wir uns wie früher auf infinitesimale Transformationen $P \to \bar{P}$ der Form

$$\bar{x}^i = x^i + \epsilon\, v^i(x^k) \tag{2.10.1}$$

beschränken[11]. Wir müssen nur noch spezifizieren, wie der Wert des Tensorfelds in P nach $\bar{P}$ übertragen werden soll. Am einfachsten ist das bei einem skalaren Feld $T(x)$: Der Zahlenwert $T(x)$ wird von x nach $\bar{x}$ übertragen, wobei dort dann zwei Werte, $T(\bar{x})$ und $T(x)$, definiert sind. Falls $T(\bar{x}) = T(x)$ gilt, ist (2.10.1) eine Symmetrieoperation des skalaren Feldes. In diesem Fall verschwindet die *Lie-Ableitung*

$$\mathcal{L}_v T = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[T(\bar{x}^i) - T(x^i)] \tag{2.10.2}$$

des skalaren Feldes T nach v^i. Einsetzen von (2.10.1) liefert

$$\mathcal{L}_v T = T_{,i} v^i. \tag{2.10.3}$$

[11] Diese Transformationen brauchen keine Bewegungen der Mannigfaltigkeit zu sein, sondern können auf völlig beliebige Art Punkte einander zuordnen. Auch auf einer Mannigfaltigkeit ohne jede Symmetriegruppe kann ja z. B. ein skalares Feld mit Symmetrie definiert sein, wie etwa ein konstantes Feld, das unter allen Operationen (2.10.1) invariant ist.

Als nächstes betrachten wir ein Vektorfeld, wobei wir wieder feststellen müssen, wie der Vektor von P nach $\bar{P}$ übertragen wird. Dies geschieht nicht durch irgendeine Art von Parallelverschiebung, sondern, wie man aus den oben gegebenen Beispielen abliest, folgendermaßen (Abbildung 2.6).

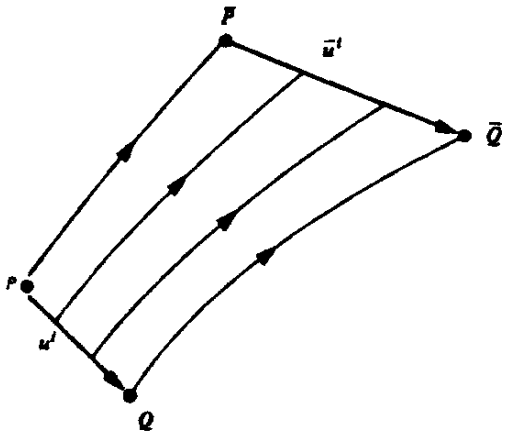

Abbildung 2.6: Lie-Übertragung eines Vektorfeldes.

Wenn der Vektor u^i im Punkt P tangential an eine durch P laufende Kurve $x^i(\tau)$ ist, d. h. $u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\tau$, dann soll sein Bild im Punkt $\bar{P}$ tangential an die durch $\bar{P}$ verlaufende Bildkurve sein. Mit anderen Worten, der Vektor u^i soll bei der Abbildung das gleiche Verhalten zeigen wie die Koordinatendifferentiale, d. h.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{x}^i(\bar{x}) &= \mathrm{d}x^i + \epsilon\, v^i{}_{.k}\, \mathrm{d}x^k, \\ \bar{u}^i(\bar{x}^k) &= u^i(x^k) + \epsilon\, v^i{}_{.k}\, u^k. \end{aligned} \tag{2.10.4}$$

Falls die Lie-Ableitung

$$\mathcal{L}_v u^i = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[u^i(\bar{x}) - \bar{u}^i(\bar{x})]. \tag{2.10.5}$$

also die Differenz der beiden nun in $\bar{x}$ definierten Vektoren, verschwindet, ist (2.10.1) eine Symmetrieoperation des Vektorfeldes. Einsetzen von (2.10.1) und (2.10.4) ergibt

$$\mathcal{L}_v u^i(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[u^i(x^k + \epsilon\, v^k) - u^i(x^k) - \epsilon\, v^i{}_{.k}\, u^k] = u^i{}_{,k}\, v^k - v^i{}_{,k}\, u^k. \tag{2.10.6}$$

Als Differenz zweier verschiedener Vektoren am gleichen Punkt $\bar{x}$ muß $\mathcal{L}_v u^i$ ein Vektor sein, was man auch daraus ersieht, daß (2.10.6) in der Form

$$\boxed{\mathcal{L}_v u^i = u^i{}_{;k}\, v^k - v^i{}_{;k}\, u^k} \tag{2.10.7}$$

geschrieben werden kann.

Für beliebige Tensorfelder können wir genauso vorgehen wie im Kapitel 2.6 bei der Diskussion der kovarianten Ableitung, also die Verträglichkeit der Lie-Ableitung mit den Operationen der Tensoralgebra und die Gültigkeit der Produktregel fordern. Wir erhalten z. B. die Lie-Ableitung eines kovarianten Vektorfeldes w_i aus der Bedingung (u^i = beliebiges Vektorfeld)

$$\mathcal{L}_v(w_i\, u^i) = (w_i\, u^i)_{.k} = (\mathcal{L}_v w_i)u^i + w_i\, \mathcal{L}_v u^i \tag{2.10.8}$$

zu

$$\boxed{\mathcal{L}_v w_i = w_{i:k}\, v^k + v^k{}_{:i}\, w_k.} \tag{2.10.9}$$

Im allgemeinen Fall eines Tensorfeldes $T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots} &= T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots:n} v^n + T^{ik\ldots}{}_{am\ldots} v^a{}_{:l} + T^{ik\ldots}{}_{la\ldots} v^a{}_{:m} + \ldots \\ &\quad - T^{ak\ldots}{}_{lm\ldots} v^i{}_{:a} - T^{ia\ldots}{}_{lm\ldots} v^k{}_{:a} - \ldots\end{aligned} \tag{2.10.10}$$

oder dieselbe Formel mit gewöhnlichen Ableitungen: die Lie-Übertragung ist unabhängig von der Existenz einer Metrik, kovarianten Differentiation etc. auf jeder X^n erklärt. Die Lie-Ableitung eines Tensors beliebigen Typs ergibt einen Tensor des gleichen Typs. In jedem Fall ist $\mathcal{L}_v T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots} = 0$ die Bedingung dafür, daß das Tensorfeld unter den Operationen (2.10.1) invariant ist, wie wir am Beispiel des skalaren und Vektorfeldes anschaulich gezeigt haben.

Beobachter mit Weltlinien, die überall von Killingvektoren berührt werden, registrieren also im Lauf der Zeit stets dieselbe lokale Geometrie *(stationäre Beobachter)*.

Aufgaben

1. Es gilt $\mathcal{L}_v v^i = 0$; was bedeutet das anschaulich?

2. Zeige, daß ein drehinvariantes Skalarfeld im euklidischen $\mathbf{R}^n$ die Form $f(r)$ hat ($r^2 = x^i x^i$, x^i ... Cartesische Koordinaten).

3. Zeige, daß für das Vektorfeld $w^i(x) = x^i$ die volle Invarianzgruppe durch v^i erzeugt wird, wo die v^i beliebige homogene Funktionen 1. Grades der x^i sind. – Die Invarianzoperationen bilden also hier nicht einmal mehr eine Lie-Gruppe (mit endlich vielen Parametern) – im Gegensatz etwa zur Invarianzgruppe Riemannscher Metriken.

4. Zeige, daß ein drehinvariantes Vektorfeld im $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) die Form $w^i(x) = x^i f(r)$ haben muß. Wie ist die Situation in der Ebene? (Folgere zuerst aus der Invarianzbedingung, daß $x^i w^i$ und $w^i{}_{,i}$ drehinvariante Skalarfelder sind.)

5. Zeige für die (pseudo)euklidische Bewegungsgruppe (Drehungen und Translationen):
   a) Es gibt kein nichttriviales invariantes Vektorfeld.
   b) Invariante Skalarfelder sind konstant.
   c) Invariante Tensorfelder 2. Stufe sind konstante Vielfache des metrischen Tensors, wenn $n \geq 3$. (*Hinweis:* die Komponenten d_{kl} des invarianten Tensors müssen konstant sein: die Drehinvarianzbedingung gibt, nach 2 Indizes verjüngt, den anderen beiden symmetrisiert und antisymmetrisiert:

$$n\, d_{(lk)} = d_m{}^m\, \eta_{lk}, \qquad (n-2) d_{[lk]} = 0.)$$

   In ähnlicher Weise können im Prinzip die invarianten Tensoren höherer Stufe bestimmt werden; üblicherweise werden die Resultate direkt angeschrieben mit dem bekannten Argument: „Was kann es anderes sein?".

6. Zeige, daß die Killing-Gleichung (2.9.5) gerade

$$\mathcal{L}_v g_{lk} = 0 \tag{2.9.5'}$$

   bedeutet und daß unter dieser Voraussetzung (2.9.11) mit

$$\mathcal{L}_v R^l{}_{kmn} = 0 \tag{2.9.11'}$$

   äquivalent ist. Interpretiere nun (2.9.11')!

7. Bestimme die hyperflächenorthogonalen Killingfelder des flachen Raumes. Welche davon sind zeitartig?

8. Klassifiziere die Killingfelder des flachen Raumes bis auf Poincaré-Transformationen und entscheide die Zeitartigkeit.

9. Betrachte eine Flüssigkeitsströmung im flachen Raum von einem Inertialsystem aus. Diskutiere die Beziehungen zwischen dem System der Teilchenweltlinien, der Teilchenbahnen und der Stromlinien. Wodurch ist eine stationäre Strömung charakterisiert?

Kapitel 3

Die Einsteinschen Feldgleichungen

In diesem Kapitel werden wir die von Einstein aufgestellten Feldgleichungen der Gravitation und einige ihrer Konsequenzen diskutieren.

3.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Wir haben im Abschnitt 1.2 gesehen, daß freifallende Bezugssysteme Inertialsysteme im Kleinen darstellen. Die Relation zwischen zwei derartigen Inertialsystemen ist im allgemeinen – wie auch Abb. 1.3 zeigt – ziemlich kompliziert und durch die Massenverteilung bestimmt. Mathematisch drückt sich das dadurch aus, daß die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Struktur aufweist, d. h. gekrümmt ist. Wir haben im Abschnitt 1.4 die Form der Metrik in der Newtonschen Näherung bereits ermittelt. Es ist nun unsere Aufgabe, den allgemeinen Zusammenhang zwischen Raumkrümmung und Massenverteilung exakt aufzustellen. Wir suchen daher ein System von Gleichungen, das die Potentialgleichung

$$\Delta U = 4\pi G \rho \tag{3.1.1}$$

der Newtonschen Theorie ersetzt. Wir wollen im folgenden die von Einstein gegebenen Feldgleichungen axiomatisch an die Spitze unserer Überlegungen stellen und die speziellen Eigenschaften dieser Gleichungen dann genauer diskutieren.

Die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie lauten[1]

$$\boxed{R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik}.} \tag{3.1.2}$$

[1] Bezüglich der Eindeutigkeit dieser Gleichungen siehe Abschnitt 2.7.

wobei

$$\kappa = 8\pi G/c^2 = 1.86 \cdot 10^{-27}\text{cm/g}. \tag{3.1.2}$$

Dabei ist T_{ik} der Energie-Impulstensor der betrachteten Materie, der wegen der Symmetrie der linken Seite – sowohl R_{ik} als auch g_{ik} sind ja symmetrisch – symmetrisch sein muß. (3.1.2) ist daher ein System von 10 partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der g_{ik}. Wie der Ausdruck für die R_{iklm} (2.7.5) zeigt, sind diese Differentialgleichungen in den zweiten Ableitungen der g_{ik} linear, in den ersten Ableitungen dagegen nicht linear. Diese Nichtlinearität der Einsteinschen Feldgleichungen erschwert die Auffindung exakter Lösungen sehr, so daß bis vor einigen Jahren nur wenige Lösungen dieser Gleichungen bekannt waren[2]. Wir werden in Kapitel 10 den physikalischen Grund für diese spezielle Eigentümlichkeit der Feldgleichungen der Gravitation angeben.

Die Linearität von (3.1.2) in den zweiten Ableitungen der g_{ik} ist eine Eigenschaft, die analog zu (3.1.1) ist. Es wird sich noch zeigen, daß diese Linearität in den zweiten Ableitungen wesentlich für die Ableitbarkeit der Einsteinschen Feldgleichungen aus einem Variationsprinzip ist.

Man könnte nun vermuten, daß die Feldgleichungen (3.1.2) die 10 Funktionen g_{ik} unter physikalisch vernünftigen Bedingungen eindeutig bestimmen. Dies ist jedoch nicht der Fall, da wegen der Bianchi-Identitäten (2.7.14) nicht alle der Gleichungen (3.1.2) voneinander unabhängig sind. Die Bianchi-Identitäten

$$\left(R_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}R\right)^{;k} = 0, \qquad i = 0, \ldots, 3, \tag{3.1.4}$$

ergeben nämlich 4 Relationen zwischen den Einsteinschen Feldgleichungen. Es sind daher in Wirklichkeit nur 6 Relationen zur Bestimmung der 10 Funktionen g_{ik} vorhanden, und es bleiben noch 4 Freiheitsgrade übrig. Diese 4 Freiheitsgrade entsprechen genau den Transformationen der g_{ik}, die durch Koordinatentransformationen

$$x^{\bar{i}} = f^i(x^k) \tag{3.1.5}$$

zustande kommen.

Aus den Bianchi-Identitäten (2.7.14) folgt weiters der Erhaltungssatz für den Energie- Impulstensor

$$T_{ik}{}^{;k} = 0. \tag{3.1.6}$$

Geht man auf ein lokales Inertialsystem über, so reduziert sich dieser Erhaltungssatz auf die übliche Energie-Impuls-Erhaltung

$$T_{ik}{}^{,k} = 0. \tag{3.1.7}$$

[2]Einen neueren Stand beschreiben Kramer et. al. (1980).

Die in den Einstein-Gleichungen enthaltene Größe T_{ik} muß also nicht nur symmetrisch, sondern auch divergenzfrei sein. Falls der Energie-Impulstensor aus einer Lagrange-Funktion hergeleitet wird, folgt dies als eine Konsequenz der Bewegungsgleichungen (vgl. Abschnitt 3.4). Hier gilt zusätzlich, daß auch die Feldgleichungen nur bei erhaltenem Energie-Impuls-Tensor konsistent sind. In dieser Beziehung sind die Einstein-Gleichungen analog zu den Maxwell-Gleichungen, die bekanntlich auch nur dann widerspruchsfrei sind, wenn der darin enthaltene Strom einem Erhaltungssatz genügt.

Außer den Feldgleichungen brauchen wir noch die Bewegungsgleichungen für im Gravitationsfeld befindliche Materie. Für ein Punktteilchen haben wir bereits früher die geodätischen Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i{}_{kl}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} = 0} \tag{3.1.8}$$

aufgestellt. Mit Hilfe der Vierergeschwindigkeit $v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ kann diese Gleichung der Geodätischen in die einfachere Form

$$\frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{3.1.9}$$

gebracht werden. Diese geodätische Gleichung (3.1.8) gilt für klassische Punktteilchen. Da man es aber in der Praxis niemals mit derartigen Teilchen zu tun hat, wird es notwendig sein zu untersuchen, ob die Gleichung in hinreichender Näherung auch für ausgedehnte Probekörper mit komplizierter Struktur gilt. Wir werden später noch auf diese Frage zurückkommen und hier nur einige vorläufige Bemerkungen dazu machen. Offenbar wird es zur Gültigkeit von (3.1.8) notwendig sein, daß man das Eigenfeld des Körpers (d. h. das vom Körper selbst erzeugte Gravitationsfeld) gegenüber dem äußeren Gravitationsfeld vernachlässigen kann. Eine weitere Forderung wird sich daraus ergeben, daß die Gezeitenkräfte im Körper, die durch den Gradienten des Gravitationsfeldes innerhalb des Körpers zustande kommen, gegenüber den inneren Kräften innerhalb des Körpers zu vernachlässigen sein sollen. Auch darf sich der Körper nicht allzu schnell drehen, d. h. keinen sehr großen Eigendrehimpuls besitzen, wie wir später noch zeigen werden. Liegt nämlich ein spinnendes Teilchen vor, das etwa durch die Dirac-Gleichung beschrieben wird, so ergibt sich für dieses Teilchen – auch im Limes eines Punktteilchens – eine von der Geodätischen abweichenden Bewegungsgleichung[3]. Diese Abweichung kommt durch eine Wechselwirkung des Spins mit dem Krümmungstensor zustande.

Aus den angeführten Gründen muß man daher die Gültigkeit der Bewegungsgleichung (3.1.8) auf strukturlose kleine Probekörper einschränken.

Die Differentialgleichungen für das Gravitationsfeld (3.1.2) sind ohne geeignete Rand- und Anfangsbedingungen unvollständig. Wir müssen daher hin-

[3]Siehe dazu Abschnitt 4.1.

zufügen, welche Art von Rand- und Anfangswertproblemen wir im folgenden lösen wollen. Es gibt dabei zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Randbedingungen:

Üblicherweise betrachtet man in der Physik ein *abgeschlossenes System*, das etwa durch eine experimentelle Anordnung, ein Labor, unsere Erde, das Sonnensystem etc. realisiert sein kann. Man vernachlässigt den Einfluß aller übrigen Körper im Weltall und betrachtet das System isoliert für sich. Die Gravitationsfelder müssen in großer Entfernung von einem derartigen System wie $1/r$ abnehmen[4]. Als Randbedingung ist zu fordern, daß der Raum im Unendlichen in einen flachen (Minkowski-) Raum übergeht, es also ein Koordinatensystem gibt, in dem asymptotisch $g_{ik} \to \eta_{ik}$ gilt.

Es gibt aber noch eine zweite Art von Randbedingungen: Wegen der Nichtabschirmbarkeit der Gravitationswechselwirkung kann auch die Wechselwirkung mit beliebig entfernten Systemen nicht vernachlässigt werden. Man betrachtet daher in der *Kosmologie* das *Weltall als Ganzes*, wobei die Frage der Randbedingungen im üblichen Sinn ihre Bedeutung verliert. Wir werden bei der Diskussion derartiger Fragen die Randbedingungen durch Homogenitätsforderungen („kosmologisches Prinzip") ersetzen.

Die Frage der Anfangsbedingungen wollen wir hier nur kurz streifen, da sie für die uns interessierenden Problemstellungen nicht relevant ist. Sie ist folgendermaßen zu formulieren: Auf einer raumartigen Hyperfläche seien die Werte der g_{ik} und deren ersten Ableitungen normal zur Hyperfläche gegeben[5]. Man kann dann zeigen[6], daß die Einsteinschen Feldgleichungen (3.1.2) die (zeitliche) Entwicklung der g_{ik} von der Hyperfläche weg eindeutig bestimmen, bis auf die oben erwähnten Koordinatentransformationen (3.1.5), die natürlich immer zulässig sein müssen.

3.2 Die lineare Näherung

Die wichtigste Eigenschaft, die wir im folgenden von den Einsteinschen Feldgleichungen zeigen müssen, ist, daß sie sich in einem geeigneten Limes auf die Newtonsche Theorie (3.1.1) reduzieren. Dies kann offenbar nur für schwache Gravitationsfelder der Fall sein, für die der Raum annähernd eine Minkowskische, flache Struktur hat. Wir setzen daher

$$g_{ik} = \eta_{ik} + 2w_{ik}, \tag{3.2.1}$$

wobei w eine von erster Ordnung kleine Größe sein soll, so daß w^2 (und auch die

[4]Eine $1/r^2$- Abnahme kann wie in der Elektrodynamik wegen der möglichen Existenz von Gravitationswellen nicht gefordert werden.

[5]Falls Massenverteilungen im Raum vorhanden sind, so müssen für diese die entsprechenden Daten - d. h. Lage und Geschwindigkeit ebenfalls auf der Hyperfläche gegeben sein.

[6]Siehe z. B. Adler, Bazin, Schiffer (1965), p. 210 - 233. Globale Fragen, z. B. nach dem Langzeitverhalten, sind aber schwierig und noch Gegenstand der Forschung.

Quadrate seiner Ableitungen etc.) vernachlässigt werden kann. Die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{jik} = v_{ij,k} + v_{kj,i} - v_{ik,j} \tag{3.2.2}$$

sind dann von der Ordnung v. Γ^2 kann in den Formeln (2.7.2) für den Riemann-Tensor vernachlässigt werden, so daß sich die einfache Form

$$R^l{}_{kjm} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l{}_{km} - \frac{\partial}{\partial x^m}\Gamma^l{}_{kj} \tag{3.2.3}$$

ergibt. Aus (3.2.2) und (3.2.3) erhalten wir für den Ricci- Tensor

$$R_{km} = v_{km}{}^{,i}{}_i + v^i{}_{i,km} - v^l{}_{m,lk} - v^l{}_{k,ml} \tag{3.2.4}$$

und durch Kontraktion daraus für R

$$R = 2v^i{}_{i,}{}^k{}_k - 2v^{ik}{}_{,ik}. \tag{3.2.5}$$

(In Übereinstimmung mit der gewählten Näherung wurden Indizes in diesen und den folgenden Gleichungen stets mit η_{ik} – nicht g_{ik} – hinauf- und hinuntergezogen.) Setzen wir diese beiden Resultate in (3.1.2) ein, so resultiert die linearisierte Form der Einsteinschen Feldgleichungen

$$v_{km,i}{}^i + v^i{}_{i,km} - v^l{}_{m,ik} - v^i{}_{k,im} + \eta_{km}\, v^{ij}{}_{,ij} - \eta_{km}\, v^i{}_{i,}{}^j{}_j = -\kappa T_{km}. \tag{3.2.6}$$

Dieses Gleichungssystem ist zwar linear, aber auf eine sehr komplizierte Art gekoppelt und kann daher nicht unmittelbar mit Hilfe der Methode der Green-Funktionen gelöst werden. Um (3.2.6) zu entkoppeln, benutzen wir die Tatsache, daß wir noch die Freiheit der Wahl des Koordinatensystems haben, die wir bisher nicht verwendet haben. Dazu untersuchen wir zunächst das Verhalten der v_{ik} bei Koordinatentransformationen der Form

$$x^i = x^{\bar{i}} + 2\Lambda^{\bar{i}}(x), \qquad (\Lambda^i)^2 \approx 0. \tag{3.2.7}$$

Wie angedeutet, soll Λ^i eine von erster Ordnung kleine Größe sein, so daß Λ^2 vernachlässigt werden kann. Das Verhalten von v_{ik} bei dieser Koordinatentransformation ist offenbar durch

$$\eta_{ik} + 2v_{\bar{i}\bar{k}} = g_{\bar{i}\bar{k}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{i}}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{\bar{k}}} g_{jm} = \left(\delta^j{}_{\bar{i}} + 2\Lambda^j{}_{,\bar{k}}\right)\left(\delta^m{}_k + 2\Lambda^m{}_{,\bar{k}}\right)\left(\eta_{jm} + 2v_{jm}\right) \tag{3.2.8}$$

gegeben, d. h.

$$v_{\bar{i}\bar{k}} = v_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i} \tag{3.2.9}$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß sowohl ψ als auch Λ von erster Ordnung klein sind und der Unterschied zwischen Λ^i und $\bar{\Lambda}^i$ in (3.2.9) zu vernachlässigen ist. (3.2.9) gibt das Verhalten von ψ_{ik} bei infinitesimalen Koordinatentransformationen wieder. Wenn ψ_{ik} eine Lösung der linearisierten Feldgleichungen (3.2.6) ist, so muß auch $\psi_{\bar{i}\bar{k}}$ eine Lösung dieser Gleichungen sein, wobei nur ein leicht verändertes Koordinatensystem zugrundegelegt ist. Die Gleichungen (3.2.6) müssen daher unter den Transformationen (3.2.9) invariant sein. Wenn man (3.2.9) in (3.2.6) einsetzt, so sieht man explizit, daß auch $\psi_{\bar{i}\bar{k}}$ diese Gleichung erfüllt, falls ψ_{ik} sie erfüllt. Die Transformationen (3.2.9) sind völlig analog zu den bekannten Eichtransformationen

$$A_i = \overline{A_i} + \Lambda_{,i} \tag{3.2.10}$$

der Maxwellschen Theorie und werden (vgl. Kap. 10) auch als Eichtransformationen bezeichnet. Wir werden später noch auf diese Analogie zurückkommen.

Wie im Fall der Maxwell-Gleichungen kann man auch hier die Eichinvarianz der Feldgleichungen (3.2.6) dazu benutzen, um diese Gleichungen zu entkoppeln. Im Falle des Elektromagnetismus geschieht dies durch die Wahl der Lorentz-Eichung $A^i{}_{,i} = 0$, während hier harmonische Koordinaten[7] zur Entkopplung führen. Diese sind durch die Bedingung

$$\boxed{\psi_{ik,}{}^{k} = \tfrac{1}{2}\psi^{k}{}_{k,i}} \tag{3.2.11}$$

definiert: Man überzeugt sich leicht, daß dies Koordinatenbedingungen sind, d. h. stets durch geeignete Wahl der 4 Funktionen Λ_i erreichbar sind (siehe Aufgabe 1). Die beiden Formeln (3.2.4) und (3.2.5) vereinfachen sich dann zu

$$R_{ik} = \Box\psi_{ik}, \qquad R = \Box\psi_i^i. \tag{3.2.12}$$

Die lineare Näherung der Feldgleichungen lautet somit

$$\Box\left(\psi_{km} - \tfrac{1}{2}\eta_{km}\,\psi_l^l\right) = -\kappa\, T_{km}. \tag{3.2.13}$$

Durch Spurbildung ergibt sich

$$\Box\psi_l^l = \kappa\, T_l^l \tag{3.2.14}$$

und daher schließlich die endgültige Form der *linearisierten Einsteinschen Gleichungen*

$$\boxed{\Box\psi_{km} = -\kappa\left(T_{km} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{km}\,T_l^l\right).} \tag{3.2.15}$$

[7] Vergleiche Abschnitt 9.3.

Damit ist unser Ziel erreicht, wir haben ein entkoppeltes lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Metrik erhalten. Es dürfen jedoch nur Lösungen verwendet werden, die (3.2.11) erfüllen.

Dieses Gleichungssystem kann nun mit Hilfe der Methode der Green-Funktion gelöst werden. Bevor wir dies aber allgemein tun, wollen wir zunächst zeigen, daß in (3.2.15) die Newtonschen Gleichungen (3.1.1) als Spezialfall enthalten sind. Um den klassischen Grenzfall zu betrachten, müssen wir den Energie-Impulstensor geeignet nähern. Im nichtrelativistischen Grenzfall ist nur T_{00} groß, während die anderen Komponenten von T_{ik} vernachlässigt werden können. Diese Näherung ist zulässig, wenn es sich um Quellen ohne sehr starken inneren Druck (geringe Dichten) und mit kleinen Geschwindigkeiten handelt. Es ist dann

$$T_{km} = \left(\begin{array}{c|c} \rho & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \tag{3.2.16}$$

wobei ρ die Massendichte des betrachteten Körpers ist. Die Gleichungen (3.2.15) vereinfachen sich dann zu

$$\begin{aligned} &\Box\psi_{00} = -\kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2}T_{00}\right) = -\frac{\kappa}{2}\rho, \quad \Box\psi_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \\ &\Box\psi_{11} = \kappa\frac{\eta_{11}}{2}\rho = -\frac{\kappa}{2}\rho = \Box\psi_{22} = \Box\psi_{33}. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Es ist daher

$$\psi_{00} = \psi_{11} = \psi_{22} = \psi_{33}, \tag{3.2.18}$$

wobei ψ_{00} die Gleichung (3.2.17)

$$\Box\psi_{00} = -\frac{4\pi G}{c^2}\rho \tag{3.2.19}$$

erfüllt. Wegen der vorausgesetzten langsamen Bewegung der Massen kann man in (3.2.19) auch die im d'Alembert-Operator enthaltene Zeitableitung vernachlässigen, so daß sich schließlich

$$\Delta\psi_{00} = \frac{4\pi G}{c^2}\rho \tag{3.2.20}$$

ergibt. Der Vergleich mit (3.1.1) zeigt, daß ψ_{00} bis auf den Faktor c^2 identisch mit dem Newtonschen Gravitationspotential U ist:

$$\psi_{00} = U/c^2. \tag{3.2.21}$$

Setzt man dies in (3.2.1) ein, so erhält man die Endformel für das Linienelement in der linearen Näherung

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2\left(1+\frac{2U}{c^2}\right) - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2\left(1-\frac{2U}{c^2}\right).} \tag{3.2.22}$$

Wir wollen abschließend noch die Annahmen zusammenstellen, die in der Ableitung dieses Linienelements eingegangen sind. Grundvoraussetzung ist, daß die Abweichungen vom flachen Raum klein sind, d. h. $U \ll c^2$. Ferner müssen die Massen, die das Gravitationsfeld erzeugen, langsam bewegt sein und dürfen auch keine großen inneren Spannungen (die durch Komponenten $T_{\alpha\beta}$ des Energie-Impulstensors gegeben wären) aufweisen.

Ein Vergleich mit (1.4.6) zeigt, daß die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen (3.1.2) tatsächlich den Newtonschen Grenzfall korrekt wiedergeben. Die hier gewonnene Lösung geht aber über (1.4.6) hinaus, da sie auch die Korrekturen zum Term $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$ des Linienelements berücksichtigt. Daher sind die im Kapitel 1 gemachten Einschränkungen in bezug auf die Geschwindigkeit der betrachteten Testkörper hier nicht notwendig, und das Linienelement kann auch zur Berechnung der Bewegung schneller Teilchen (Photonen) herangezogen werden.

Aus der linearisierten Form (3.2.12) des Linienelements kann man außer der Newtonschen Näherung auch einige der Tests der allgemeinen Relativitätstheorie ableiten[8]. Die bisherigen Resultate ermöglichen die Berechnung der Lichtablenkung und der Rotverschiebung eines Lichtquants im Gravitationsfeld. Auch die wesentlichen Beiträge zu der 1969 von Shapiro gemessenen Laufzeitverlängerung eines an der Venus reflektierten Radarstrahls können aus (3.2.12) berechnet werden. Nur zur Bestimmung der Perihelverschiebung braucht man eine über (3.2.12) hinausgehende Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, die wir im nächsten Abschnitt berechnen wollen.

Bevor wir uns dieser exakten Lösung, der Schwarzschild-Metrik zuwenden, wollen wir noch der Vollständigkeit halber die allgemeine Form der Metrik in der linearen Näherung angeben. Die vereinfachenden Annahmen über den Energie-Impulstensor und über die Vernachlässigbarkeit der zeitlichen Ableitungen in (3.2.15) brauchen bei dieser allgemeinen Lösung nicht gemacht zu werden, nur die Bedingung $|\psi_{ik}| \ll 1$ ist für die Gültigkeit notwendig.

Die retardierte Green-Funktion $G(x)$, die zur Gleichung (3.2.15) gehört, ist bekanntlich durch

$$G(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\delta(|\boldsymbol{x}|-t) \tag{3.2.23}$$

gegeben. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung hat damit die Form

[8] Siehe Kapitel 4.

$$\begin{aligned} \upsilon_{ik}(\boldsymbol{x},t) &= -2G \int \mathrm{d}^3x' \, \frac{T_{ik}(\boldsymbol{x}',t') - \frac{1}{2}\eta_{ik}\, T_l^l(\boldsymbol{x}',t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \\ t' &= t - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|. \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

die in vielen Fällen nützlich ist. Dabei garantiert die linearisierte Form des Erhaltungssatzes (3.1.6) die Erfüllung von (3.2.11).

Aufgaben

1. Zeige, daß man durch geeignete Wahl der Funktion $\Lambda_i(x)$ stets (3.2.11) erreichen kann.

2. Beweise, daß für eine isolierte Massenverteilung, die durch einen symmetrischen erhaltenen Energie-Impulstensor T^{ik} beschrieben wird, im Grenzfall des Minkowski-Raumes die Gleichung

$$\int T_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int T_{00}\, x^\alpha x^\beta\, \mathrm{d}^3x \tag{3.2.25}$$

gilt *(Laue-Theorem)*.

3. Die Komponente υ_{00}, die dem Newtonschen Gravitationspotential entspricht, ist nach (3.2.24) in großer Entfernung r von einer Massenverteilung durch

$$\upsilon_{00}(r) = -\frac{2G}{r}\int \mathrm{d}^3x \left(T_{00} - \frac{1}{2}T_l^l\right)$$

gegeben. Da für elektromagnetische Felder $T_l^l = 0$ ist, entsteht leicht der Eindruck, daß elektromagnetische Selbstenergien, die in einer Masse enthalten sind, zu einer doppelt so starken Anziehung führen wie „normale" Materie, für die $T_l^l = T_{00}$. Zeige mit Hilfe des Laue-Theorems (3.2.25), daß für jede statische Massenverteilung

$$\upsilon_{00}(r) = -\frac{G\mathcal{M}}{r}, \tag{1.4.7a}$$

wobei $\mathcal{M} = \int T_{00}\, \mathrm{d}^3x$ die träge Masse ist. Die träge Masse und die in die Formel (1.4.7a) eingehende „aktive schwere Masse" sind stets gleich.

(Diesbezüglich ist in Tolman (1934), p. 272 ein bekannter Fehler enthalten.)

4. Zeige, daß die Koordinatentransformation

$$r = r'(1 + U/c^2)$$

für kugelsymmetrische Gravitationsfelder $U = U(r)$ (3.2.12) auf die Form

$$ds^2 = c^2 dt^2 (1 + 2U/c^2) - dr'^2 \left(1 + 2r' \frac{dU}{dr'}\right) - r'^2 d\Omega^2$$

bringt.

3.3 Die Schwarzschild-Metrik

Wir haben bereits bemerkt, daß die lineare Näherung der Einstein-Gleichungen nicht ausreicht, um die Perihelverschiebung und damit den wichtigsten Test der allgemeinen Relativitätstheorie zu berechnen. Wir wollen in diesem Abschnitt eine exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen bestimmen, die dem Gravitationsfeld der Sonne, also dem Feld im Außenraum einer kugelförmigen Massenverteilung, entspricht. Wir haben daher eine kugelsymmetrische Lösung der Vakuumgleichungen

$$R_{ik} = 0$$

zu finden. Dieses Beispiel wird zugleich zeigen, welch komplizierte nichtlineare Differentialgleichungen sich hinter den einfach aussehenden Feldgleichungen (3.1.2) in Wirklichkeit verbergen.

Der erste Schritt zur Auffindung einer exakten Lösung ist die Wahl eines *geeigneten Koordinatensystems*. Dieser Schritt ist entscheidend, da eine ungeeignete Wahl der Koordinaten eine Auflösung der Differentialgleichungen praktisch unmöglich macht. Hier müssen wir zunächst die offensichtliche Kugelsymmetrie des Problems benutzen, um das Linienelement zu vereinfachen. Dazu schreiben wir ds^2 zuerst in der allgemeinen Form

$$ds^2 = g_{00}\,(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}\,dx^0\,dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta, \qquad (3.3.1)$$

wobei die Summen über α und β von 1 bis 3 gehen. Nun benutzen wir die Tatsache, daß das Linienelement invariant unter Rotationen der Koordinaten

$$x^{\bar\alpha} = D^{\bar\alpha}{}_\beta\, x^\beta, \qquad DD^T = \mathbf{1},^9 \qquad (3.3.2)$$

sein soll. Die allgemeinsten Funktionen g_{00}, $g_{0\alpha}$ und $g_{\alpha\beta}$, die diese Forderung erfüllen, sind von der Gestalt

[9] D^T bezeichnet die zu D transponierte Matrix. Intuitiv ist bei dieser Herleitung des Linienelements die Geometrie über einem flachen Hintergrund aufgebaut zu denken, genau wie bei der linearen Näherung. Die x^i kann man sich als kartesische Inertialkoordinaten für den flachen Hintergrund vorstellen. Eine völlig im Rahmen der Riemanngeometrie verbleibende und damit befriedigendere Herleitung des kugelsymmetrischen Linienelements befindet sich im Anhang von Hawking & Ellis (1973), basierend auf B. G. Schmidt, Zs. f. Naturforsch. **22a**, 1351 (1967).

$$g_{00} = f(r, x^0), \qquad g_{0\alpha} = -g(r, x^0)\, x^\alpha / r,$$
$$g_{\alpha\beta} = -h(r, x^0)\, \delta_{\alpha\beta} - j(r, x^0)\, x^\alpha x^\beta / r^2. \tag{3.3.3}$$

Dabei ist die neu eingeführte Koordinate r durch

$$r^2 = \delta_{\alpha\beta}\, a^\alpha x^\beta =: x^\alpha x^\alpha, \qquad \mathrm{d}r = \frac{x^\alpha \mathrm{d}x^\alpha}{r} \tag{3.3.4}$$

definiert. Setzt man (3.3.3) in (3.3.1) ein und führt die Abkürzung $x^0 = t$ ein, so ergibt sich

$$\mathrm{d}s^2 = f(r, t)\, \mathrm{d}t^2 - 2g(r, t)\, \mathrm{d}t\, x^\alpha \mathrm{d}x^\alpha / r - h(r, t)\, \mathrm{d}x^\alpha\, \mathrm{d}x^\alpha - j(r, t)(x^\alpha \mathrm{d}x^\alpha / r)^2. \tag{3.3.5}$$

Führt man anstelle der Koordinaten x^α Polarkoordinaten (r, θ, ϕ) ein, die wie üblich die Relationen

$$\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\Omega^2, \qquad \mathrm{d}\Omega^2 := \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\phi^2 \tag{3.3.6}$$

erfüllen, so läßt sich das Linienelement auf die Gestalt

$$\mathrm{d}s^2 = f(r, t)\, \mathrm{d}t^2 - 2g(r, t)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}t - [h(r, t) + j(r, t)]\, \mathrm{d}r^2 - r^2 h(r, t)\, \mathrm{d}\Omega^2 \tag{3.3.7}$$

bringen. Damit sind alle Aussagen, die man aus der gegebenen Kugelsymmetrie über die Form des Linienelements machen kann, benutzt. Man hätte natürlich (3.3.7) auch intuitiv als die allgemeinste mögliche kugelsymmetrische Form des Linienelements anschreiben können.

Es wäre möglich, die Zeitunabhängigkeit des gesuchten Linienelements auszunutzen, das ja das Gravitationsfeld einer ruhenden Massenverteilung beschreiben soll. Wir wollen diese Forderung aber hier nicht verwenden, da man auch ohne sie auskommen kann und allein aus der Kugelsymmetrie bereits die statische Natur der Metrik folgt.

Man könnte nun (3.3.7) direkt in die Feldgleichungen einsetzen und versuchen, sie zu lösen. Diese Vorgangsweise wäre aber ungünstig, da wir die Freiheit in der Wahl des Koordinatensystems noch nicht voll ausgenutzt haben, um die Metrik möglichst weitgehend zu vereinfachen. Dazu bemerken wir, daß Transformationen der Form

$$r = u(\bar{r}, \bar{t}), \qquad t = v(\bar{r}, \bar{t}) \tag{3.3.8}$$

mit der Umkehrung

$$\bar{r} = \bar{u}(r, t), \qquad \bar{t} = \bar{v}(r, t) \tag{3.3.9}$$

zwar die Funktionen f, g, h und j abändern, die Form des Linienelements (3.3.7) aber invariant lassen, da die Kugelsymmetrie des Linienelements (3.3.7) durch Transformationen der Radial- und Zeitkoordinaten nicht beeinträchtigt wird. Führen wir zunächst eine neue Radialkoordinate durch[10]

$$r^2 h(r,t) = \bar{r}^2, \qquad t = \bar{t} \tag{3.3.10}$$

ein, so vereinfacht sich der Winkelteil $\mathrm{d}\sigma^2$ des Linienelements zu

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \bar{r}^2 \mathrm{d}\Omega^2. \tag{3.3.11}$$

Diese Form ist die gleiche wie im flachen Raum, daher hat zum Beispiel eine Kugel die Oberfläche $4\pi\bar{r}^2$. Diese Forderung legt die Normierung der Radialkoordinate fest. Durch die Transformation (3.3.10) ändern sich auch die Funktionen f, g, h, j, die im Linienelement (3.3.7) enthalten sind, und wären daher ebenso wie r durch einen Querstrich zu kennzeichnen, was der Einfachheit halber nicht geschehen soll. Das Linienelement hat danach die Form

$$\mathrm{d}s^2 = f(r,t)\,\mathrm{d}t^2 - 2g(r,t)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t - (h(r,t) + j(r,t))\,\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\Omega^2. \tag{3.3.12}$$

Nun können wir noch die Freiheit in der Wahl der Zeitkoordinate benutzen. Diese wollen wir dazu verwenden, um durch eine Transformation der Form (3.3.8) mit $r = \bar{r}$ den gemischten Term in (3.3.12) wegzuschaffen. Differentiation von (3.3.8) ergibt

$$\mathrm{d}t = \frac{\partial v}{\partial \bar{t}}\,\mathrm{d}\bar{t} + \frac{\partial v}{\partial r}\,\mathrm{d}r. \tag{3.3.13}$$

Setzt man dies in (3.3.12) ein, so resultiert

$$\mathrm{d}s^2 = f\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{t}}\,\mathrm{d}\bar{t}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial \bar{t}}\left(f\frac{\partial v}{\partial r} - g\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\bar{t}\ldots \tag{3.3.14}$$

Wir wählen nun die r-Abhängigkeit von $v(r,\bar{t})$ gemäß einer Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{g(v,r)}{f(v,r)}; \tag{3.3.15}$$

dies läßt noch beliebige Transformationen

$$r \to r, \qquad \boxed{\bar{t} \to v(\bar{t})} \tag{3.3.16}$$

offen und bringt das Linienelement auf die weiter vereinfachte Form

[10] Dies ist unmöglich, wenn $h \propto r^{-2}$. Man kann aber zeigen, daß dieser Ausnahmsfall zu keinen Vakuumlösungen führt. Vgl. die genauere Diskussion im Anhang von Hawking & Ellis (1973).

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\nu}\mathrm{d}t^2 - e^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{3.3.17}$$

Dabei haben wir wieder Querstriche weggelassen und die Koeffizienten der Metrik durch die Funktionen $\nu(r,t)$ und $\lambda(r,t)$ ausgedrückt. Diese Schreibweise hat rein rechnerische Vorteile und wird daher üblicherweise verwendet.

Damit haben wir sowohl die Symmetrie des vorliegenden Problems, als auch die Freiheit in der Wahl der Koordinatenbedingungen fast voll ausgenutzt. Nun müssen wir daran gehen, den Krümmungstensor $R^i{}_{klm}$ aus dem Linienelement (3.3.17) zu berechnen. Die erste Aufgabe dabei ist offensichtlich die Ermittlung der Christoffel-Symbole. Man könnte nun versuchen, dazu (1.3.6) zu benutzen, doch stellt sich bald heraus, daß dies umständlich ist. Man geht besser vom zugrundeliegenden Variationsprinzip in der Form (1.3.12) aus. Durch Vergleich der entsprechenden Euler-Gleichungen mit (1.3.10) lassen sich direkt die Christoffel-Symbole ablesen. Im vorliegenden Fall ist $K = g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k$ durch

$$K = e^{\nu}\dot{t}^2 - e^{\lambda}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 \tag{3.3.18}$$

gegeben, wobei der Punkt wie vorher eine Ableitung nach einem Parameter s bedeutet, der entlang der Geodätischen variiert. Aus den Bedingungen

$$\frac{\partial K}{\partial x^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i}, \qquad i = 0,1,2,3, \qquad x^1 = r, \qquad x^2 = \theta, \qquad x^3 = \phi \tag{3.3.19}$$

folgt zunächst für $i = 0$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \nu_t e^{\nu}\dot{t}^2 - \lambda_t e^{\lambda}\dot{r}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{t}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(2e^{\nu}\dot{t}) = 2\ddot{t}e^{\nu} + 2\dot{t}^2\nu_t e^{\nu} + 2\dot{t}\dot{r}\nu_r e^{\nu}. \tag{3.3.20}$$

wobei wir die Ableitungen nach der Zeit bzw. Radialkoordinate durch

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} =: \nu_t, \qquad \frac{\partial \nu}{\partial r} =: \nu_r \tag{3.3.21}$$

bezeichnet haben. Vergleich mit

$$\ddot{t} + \Gamma^0{}_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0 \tag{3.3.22}$$

zeigt

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\nu_t, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{\nu_r}{2}, \quad \Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{03} = \ldots = 0, \quad \Gamma^0_{11} = +\frac{\lambda_t}{2}e^{\lambda-\nu}. \tag{3.3.23}$$

Analog berechnet man die anderen Christoffel-Symbole zu (Aufgabe 1)

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{00} = \frac{\nu_r}{2} e^{\nu-\lambda} \quad \Gamma^1_{10} = \frac{\lambda_t}{2} \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_r}{2} \\
&\Gamma^1_{22} = -r\, e^{-\lambda} \quad \Gamma^1_{33} = -r \sin^2\theta\, e^{-\lambda} \quad \Gamma^2_{21} = 1/r \\
&\Gamma^3_{31} = 1/r \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \quad \Gamma^3_{23} = \cot\theta.
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Die hier nicht angeführten Christoffel-Symbole verschwinden. Diese Resultate muß man nun in (2.7.2) einsetzen und den so berechneten Krümmungstensor dann, wie in (2.7.7) angegeben, kontrahieren, um den für die Einsteinschen Gleichungen relevanten Ricci-Tensor zu gewinnen. Da diese Methode zur Berechnung des Krümmungstensors überaus umständlich ist und wir später ein besseres Verfahren kennenlernen werden (Kapitel 7), wollen wir hier nur die Resultate angeben und es dem Leser als Übungsaufgabe überlassen, einige der Komponenten von $R^i{}_{klm}$ wirklich explizit zu berechnen.

Nach der erwähnten längeren Rechnung ergibt sich für die nichtverschwindenden Komponenten des Einstein-Tensors (2.7.14)

$$G^1{}_1 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu_r}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}. \tag{3.3.25a}$$

$$G^2{}_2 = G^3{}_3 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu_{rr} + \frac{\nu_r{}^2}{2} + \frac{\nu_r - \lambda_r}{r} - \frac{\nu_r\lambda_r}{2}\right) - \frac{1}{4}e^{-\nu}\left(2\lambda_{tt} + \lambda_t{}^2 - \lambda_t\nu_t\right). \tag{3.3.25b}$$

$$G^0{}_0 = \frac{1}{r^2}e^{-\lambda}(1 - \lambda_r r) - \frac{1}{r^2}, \qquad G^0{}_1 = e^{-\lambda}\lambda_t/r. \tag{3.3.25c, d}$$

Da im Außenraum $G^i{}_k = 0$ sein muß, folgt aus (3.3.25d) zunächst $\lambda_t = 0$, also ist λ zeitunabhängig. Durch Subtraktion von (3.3.25a) und (3.3.25c) erhält man weiters

$$\lambda_r + \nu_r = 0 \tag{3.3.26}$$

und daher

$$\lambda + \nu = q(t), \tag{3.3.27}$$

wobei $q(t)$ eine beliebige Funktion der Zeit ist. Die Transformation (3.3.16) mit

$$\bar{t} = \int \mathrm{d}t\, e^{+q(t)/2} \tag{3.3.28}$$

bewirkt aber gerade $\nu \to \nu - q$, so daß bei Benutzung dieser neuen Zeitkoordinate

$$\lambda + \nu = 0 \tag{3.3.29}$$

resultiert. Wir brauchen daher nur λ aus (3.3.25c) zu berechnen. Nach Multiplikation dieser Gleichung mit $r^2 e^\lambda$ ergibt sich

$$r\lambda_r = 1 - e^\lambda, \qquad \int \frac{\mathrm{d}\lambda}{1 - e^\lambda} = \int \frac{\mathrm{d}r}{r}, \tag{3.3.30}$$

mit $e^\lambda = 1/\Phi$ folgt daraus

$$\ln r = -\ln|1 - \Phi| + C. \tag{3.3.31}$$

Setzen wir die Integrationskonstante $C = \ln 2M$, wodurch M definiert wird, so ergibt sich endgültig

$$\Phi = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r}. \tag{3.3.32}$$

Aus (3.3.29) kann dann auch ν bestimmt werden, und wir erhalten das *Schwarzschild-Linienelement*

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2.} \tag{3.3.33}$$

Ein Vergleich mit der Newtonschen Näherung (1.4.7) zeigt, daß die als Integrationskonstante eingeführte Größe $2M$ tatsächlich mit dem Schwarzschild-Radius übereinstimmt.

Die derart berechnete Metrik ist in vielerlei Beziehung bemerkenswert. Zunächst ist hervorzuheben, daß sie tatsächlich statisch ist. Das haben wir als Konsequenz der Feldgleichungen erhalten. Ferner enthält die Metrik nur eine einzige Integrationskonstante, nämlich den Schwarzschild-Radius der betrachteten Masse. Diese beiden Tatsachen haben bedeutende physikalische Konsequenzen. Es folgt daraus, daß das Gravitationsfeld im Außenraum eines kugelförmigen Körpers – denn nur dieses haben wir ja berechnet – unabhängig von der Zusammensetzung des Körpers ist. Was immer wir für einen Energie-Impulstensor in die Einsteinschen Feldgleichungen einsetzen, das Feld im Außenraum hat stets die Form (3.3.33). Interessant ist, daß es auch keine Rolle spielt, ob der betrachtete Körper (etwa ein Stern) radial oszilliert. Selbst in diesem Fall wird das Feld im Außenraum stets statisch sein. Die oft als *Birkhoff-Theorem* bezeichnete Tatsache, daß die *Schwarzschild-Metrik die einzige kugelsymmetrische Lösung der Einsteinschen Vakuumgleichungen* ist, erleichtert die physikalische Interpretation der allgemeinen Relativitätstheorie beträchtlich. So brauchen wir uns bei der folgenden Berechnung der Tests der Theorie nicht um etwaige Ansätze für den Innenraum und die Anstückelungsbedingungen an der Grenzfläche zu kümmern. Wir werden daher die Frage der Innenraumlösung erst im Kapitel 8 behandeln.

Bemerkenswert an der obigen Ableitung der Schwarzschild-Metrik ist, daß wir an keiner Stelle die Gleichung (3.3.25b) benutzt haben. Wie man sich leicht überzeugt, ist es nicht notwendig, diese Gleichung gesondert zu betrachten, da sie wegen der Bianchi-Identitäten identisch erfüllt ist (siehe Aufgabe).

Das Schwarzschild-Linienelement weist eine Singularität in $r = 2M$ auf, die *Schwarzschild-Singularität*, die in der Literatur viel diskutiert wurde. Allerdings zeigen die im Kapitel 1 diskutierten Beispiele, daß der Schwarzschild-Radius $2M$ für die Sonne, die Planeten und allen irdischen Körper sehr viel kleiner als der wirkliche Radius dieser Körper ist. Die Singularität liegt daher im Innenraum, wo die Lösung (3.3.33) nicht mehr gilt. Es ist aber noch zu untersuchen, was geschieht, wenn man einen Körper auf einen Radius, der kleiner oder gleich dem Schwarzschild-Radius ist, komprimiert. Diese Frage soll im Kapitel 8 erörtert werden. Wir wollen aber schon hier feststellen, daß die *Singularität des Koeffizienten*

$$g_{11} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{3.3.34}$$

in $r = 2M$ nur eine Eigenschaft des Koordinatensystems ist und nicht eine Eigenschaft der Geometrie, die durch dieses Koordinatensystem beschrieben wird. Führen wir etwa eine Transformation der Radialkoordinate der Form

$$r = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 \bar{r} \tag{3.3.35}$$

durch, so ergibt sich die folgende *isotrope Form*

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}}\right)^2 \mathrm{d}t^2 - (1 + M/2\bar{r})^4\, \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}^2} \tag{3.3.36}$$

des Schwarzschild-Linienelements, wobei

$$\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}^2 = \mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2\, \mathrm{d}\Omega^2. \tag{3.3.37}$$

Der Koeffizient von $\mathrm{d}\bar{r}^2$ hat im Punkt $\bar{r} = M/2$ – der $r = 2M$ entspricht – den endlichen Wert 16 und weist nur eine Singularität in $\bar{r} = 0$ auf. Allerdings verschwindet in $\bar{r} = M/2$ der Koeffizient von $\mathrm{d}t^2$. Ferner ist (3.3.36) auch ein Beispiel dafür, in wieviel verschiedenen Formen das Schwarzschild-Linienelement auftreten kann. Alle diese Formen können durch Koordinatentransformationen ineinander übergeführt werden, doch ist es bei einer vorgelegten Metrik oft nicht leicht zu erkennen, ob es sich dabei um eine in ungewohnten Koordinaten geschriebene Schwarzschild-Metrik handelt und durch welche Transformation sie in die Standardform (3.3.33) übergeführt werden kann.

Mit der hier erfolgten Aufstellung einer Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen ist aber nur ein Teil der Probleme bewältigt. Es bleiben noch die geometrischen Eigenschaften der Lösungen zu studieren – was zum Teil in den folgenden Aufgaben geschehen soll –, und vor allem ist das Verhalten von Testkörpern in dem Gravitationsfeld zu untersuchen. Dazu müssen die Gleichungen der Geodätischen in der betrachteten Metrik berechnet und mit dem Experiment verglichen werden. Dies soll im Kapitel 4 geschehen.

Aufgaben

1. Berechne alle Christoffel-Symbole für (3.3.17).

2. Berechne R^0_{101}, R^0_{202}.

3. Zeige, daß für das Linienelement (3.3.17) unter der Annahme, $G^0{}_0 = G^1{}_1 = G^0{}_1 = 0$ sei schon erreicht, von den Ausdrücken $G^i{}_{k;i}$ nur $G^i{}_{1;i} = -\frac{2}{r}G^2{}_2$ noch nicht verschwindet, die kontrahierte Bianchi-Identität (2.7.14) also tatsächlich $G^2{}_2 \equiv G^3{}_3 = 0$ impliziert.

4. Berechne die Fläche F zwischen den Kreisen $\bar{r} = M/2$ und $\bar{r} = \bar{R}$ $(\theta = \pi/2)$ in der isotropen Form (3.3.36) des Schwarzschild-Linienelements.

$$\text{Resultat: } F = \pi\left(\bar{R}^2 + 4M\bar{R} + 3M^2 \ln\frac{2\bar{R}}{M} - \frac{M^3}{\bar{R}} - \frac{M^4}{16\bar{R}^2}\right).$$

5. Übersetze das Resultat mittels $\bar{r} = \left(r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr}\right)/2$ in die Standard-Koordinaten (3.3.33) und berechne die Grenzfälle $r = R \gg M$ und $R = 2M + \epsilon$, $\epsilon \ll 2M$. *Resultat:* $F = \pi R^2 + 2MR\pi$; $R \gg M$. $F = 8\pi M^2\sqrt{2\epsilon/M}$, $R = 2M + \epsilon$.
Ein Kreis mit Umfang $2\pi R$ hat daher in der Schwarzschild-Metrik eine größere Innenfläche als im ebenen Raum, obwohl wir den Teil mit $r < 2M$ ausgelassen haben!

6. Führe die gleiche Rechnung auch für den Abstand Δ zweier Kreise und das Volumen V zwischen zwei Kugelschalen aus, und vergleiche mit dem ebenen Raum.
Die geometrische Veranschaulichung der Resultate wird im ersten Teil von Abschnitt 8.4 gegeben.

7. Wie sieht das Schwarzschild-Linienelement in einem Koordinatensystem aus, in dem der Radialteil die einfache Form $d\sigma^2 = dr^2$ hat?

8. In der „Äquatorebene" $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ der Schwarzschild-Metrik werde ein Körper durch eine (reibungsfreie) Schiene auf einer Kreisbahn $r = \text{const.}$ geführt und bewege sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, $\varphi = \omega t$. Berechne die radiale Viererbeschleunigung und zeige, daß sie für $r = 3M$ – und für

$r < 3M$ ihr Vorzeichen nicht mehr von ω abhängt („Abramowicz'sche *Fliehkraftumkehr*").

3.4 Variationsprinzip

In lorentzinvarianten Feldtheorien ist es üblich, Feldgleichungen nicht einfach zu postulieren, sondern aus einem Variationsprinzip herzuleiten. Dadurch wird automatisch die Existenz von Erhaltungssätzen gesichert (Noether-Theorem) und außerdem eine Grundlage für die Quantisierung (Schwingersches Variationsprinzip, Feynmansches Wegintegral)[11] geschaffen. Wir wollen hier zeigen, daß auch die Feldgleichungen (3.1.2) aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden können, wobei wir uns zunächst auf das freie Gravitationsfeld ($T_{ik} = 0$) beschränken wollen. Das Wirkungsintegral W_F des Feldes ist in diesem Fall durch

$$W_F = \frac{1}{2\kappa} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} R \tag{3.4.1}$$

gegeben, wie wir zeigen wollen, wobei R der Krümmungsskalar (2.7.8) ist. W_F ist eine Invariante, da R ein Skalar ist und $\mathrm{d}V = \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}$ das invariante Volumelement des 4-dimensionalen Raumes angibt (s. Aufg. 1). Die Feldgleichungen sollen aus (3.4.1) und der Bedingung $\delta W_F = 0$ bei beliebigen Variationen δg_{ik} folgen. $R\sqrt{-g}$ ist daher die Lagrange-Funktion des freien Gravitationsfeldes, g_{ik} sind die Feldvariablen.

Merkwürdig erscheint zunächst, daß die Lagrange-Funktion die zweiten Ableitungen der Feldvariablen g_{ik} enthält, was in Feldtheorien nicht üblich ist. Man kann diese Ableitungen aber durch eine partielle Integration eliminieren, da sie in R nur linear enthalten sind:

$$\begin{aligned} &\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}\, g^{ik} R_{ik} = \\ &\sqrt{-g}\left\{g^{ik}\Gamma^m{}_{im,k} - g^{ik}\Gamma^m{}_{ik,m} + g^{ik}\Gamma^m{}_{ir}\Gamma^r{}_{km} - g^{ik}\Gamma^m{}_{ik}\Gamma^r{}_{mr}\right\}. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Ableitungen zweiter Ordnung kommen in den ersten beiden Termen vor. Wir formen diese wie folgt um:

$$\sqrt{-g}\, g^{ik}\Gamma^m{}_{ik,m} = \left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\Gamma^m{}_{ik}\right)_{,m} - \Gamma^m{}_{ik}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right)_{,m}. \tag{3.4.3}$$

Mit Hilfe von (2.4.9) und (2.4.10) kann die Differentiation im letzten Term ausgeführt werden, wobei wieder Terme resultieren, die quadratisch in Γ sind. Daher wird

[11] Vgl. Thirring (1958); Nash (1978).

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}\,G - \left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^m{}_{ik} - \sqrt{-g}g^{im}\Gamma^r{}_{ir}\right)_{,m}, \tag{3.4.4}$$

wobei G quadratisch in den Christoffel-Symbolen ist:

$$G = -g^{ik}(\Gamma^m{}_{ir}\,\Gamma^r{}_{km} - \Gamma^m{}_{ik}\,\Gamma^r{}_{mr}). \tag{3.4.5}$$

G ist natürlich kein Skalar, was schon daraus folgt, daß G im Ursprung eines Riemannschen Koordinatensystems gleich Null ist. Es gilt aber

$$\delta\int\sqrt{-g}\,R\,\mathrm{d}^4x = \delta\int\sqrt{-g}\,G\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.4.6}$$

da der Divergenzterm in (3.4.4) in ein Hüllenintegral umgewandelt werden kann und bei der Variation keine Rolle spielt. Da auf der linken Seite von (3.4.6) eine Invariante steht, folgt, daß auch die rechte Seite eine Invariante ist. Die Erklärung dafür ist, daß die Variationen der Γ (im Gegensatz zu den Γ selbst) Tensorgrößen sind. Nach (2.6.24) ist nämlich $\Gamma^k{}_{im}A_k\mathrm{d}x^m$ die Änderung eines Vektors bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung um $\mathrm{d}x^m$. Daher ist $\delta\Gamma^k{}_{im}A_k\mathrm{d}x^m$ die Differenz zweier Vektoren, die bei zwei Parallelverschiebungen (mit variiertem und nichtvariiertem Γ) resultieren. Die Differenz zweier Vektoren in einem Punkt ist aber wieder ein Vektor, $\delta\Gamma$ daher ein Tensor.

Wir können also $\sqrt{-g}\,G$ als Lagrange-Funktion des freien Gravitationsfeldes benutzen. Sie ist quadratisch in den Ableitungen $g_{ik,l}$ der Feldvariablen, enthält aber die g_{ik} selbst in sehr komplexer Weise. Es ist daher nicht zweckmäßig, zur Verifikation unserer Behauptung die Euler-Gleichungen des Variationsproblems

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial g_{ik,l}} = \frac{\partial\sqrt{-g}G}{\partial g_{ik}} \tag{3.4.7}$$

heranzuziehen. Das gewünschte Resultat ergibt sich schneller, wenn man die Variation direkt an (3.4.1) ausführt:

$$\begin{aligned} 2\kappa\,\delta W_F &= \delta\int R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = \delta\int g^{ik}R_{ik}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &= \int\delta g^{ik}R_{ik}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x + \int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x + \int R\delta\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Der letzte Term kann mit Hilfe von (vgl. die Herleitung von (2.4.11))

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}}\,g_{ik}\,\delta g^{ik} \tag{3.4.9}$$

umgeformt werden. Wir erhalten dann

$$2\kappa\,\delta W_F = \int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x + \int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.10}$$

Wäre der zweite Term in (3.4.10) nicht vorhanden, so würde $\delta W = 0$ bereits das gewünschte Resultat für ein quellenfreies Gravitationsfeld

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik}\, R = 0 \tag{3.4.11}$$

liefern. Wir können aber zeigen, daß der störende Term in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden kann. Dazu gehen wir zunächst in den Ursprung eines $RNKS$ über, wo $\Gamma^i{}_{kl} = 0$ und $g_{ik,l} = 0$ gilt. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} g^{ik}\delta R_{ik} &= g^{ik}\{(\delta\Gamma^m{}_{im})_{,k} - (\delta\Gamma^m{}_{ik})_{,m}\} \\ &= g^{im}(\delta\Gamma^k{}_{ik})_{,m} - g^{ik}(\delta\Gamma^m{}_{ik})_{,m} = w^m{}_{,m}, \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

wobei

$$w^m = g^{im}\delta\Gamma^k{}_{ik} - g^{ik}\delta\Gamma^m{}_{ik}. \tag{3.4.13}$$

Da die Variationen der Γ einen Tensor bilden, ist die Größe um ein Vektor. Die Gleichung (3.4.12) kann daher auf ein beliebiges Koordinatensystem verallgemeinert werden, indem man die Ableitung auf der rechten Seite durch die kovariante Ableitung ersetzt:

$$g^{ik}\delta R_{ik} = w^m{}_{;m} \equiv \frac{(\sqrt{-g}\, w^m)_{,m}}{\sqrt{-g}}. \tag{3.4.14}$$

Es ist also tatsächlich

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = \int \left(\sqrt{-g}w^m\right)_{,m}\mathrm{d}^4x \tag{3.4.15}$$

ein Integral über eine Divergenz, das durch Umwandlung in ein Oberflächenintegral entfernt werden kann. Man beachte, daß auf Grund von (3.4.13) dabei vorausgesetzt ist, daß auf dem Rand des Integrationsgebiets sowohl δg_{ik} wie auch die ersten Ableitungen hiervon verschwinden. Erst der Übergang von R zu G enthebt uns von der letzteren Voraussetzung.

Bisher haben wir nur das freie Gravitationsfeld betrachtet. Wir müssen nun auch die Quellen des Feldes, also die Wechselwirkung von Gravitation mit Materie berücksichtigen. Die Materie wollen wir dabei durch ein oder mehrere Felder $A(x)$ beschreiben. (Den Tensor- bzw. Spinorcharakter dieser Felder lassen wir hier offen, es kann sich bei $A(x)$ z. B. um das Feld des Dirac-Elektrons oder um ein Mesonenfeld etc. handeln. Die Probleme, die mit der Spinor- bzw. Tensornatur des Feldes zusammenhängen, sollen in Kapitel 9 erörtert werden.) Es stellt sich heraus, daß die Einsteinschen Feldgleichungen (3.1.2) durch Addition des Wirkungsintegrals

$$W_M = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}L_M(A, g_{ik}). \tag{3.4.16}$$

zu demjenigen des freien Gravitationsfeldes folgen. Dabei ist L_M die kovariante Lagrange-Funktion der Materiefelder $A(x)$, die wie angedeutet außer von $A(x)$ auch von der Metrik g_{ik} abhängt.

Ein Beispiel möge dies erläutern. Für ein skalares Feld[12] lautet die Lagrange-Funktion (in Cartesischen Koordinaten im flachen Raum)

$$L_M = \frac{1}{2}\left(A_{,i}A_{,k}\eta^{ik} - m^2A^2\right). \tag{3.4.17}$$

Führen wir krummlinige Koordinaten im flachen Raum ein, so erhalten wir die kovariante Form von L

$$L_M = \frac{1}{2}\left(A_{,i}A_{,k}g^{ik} - m^2A^2\right). \tag{3.4.18}$$

L_M hat daher in krummlinigen Koordinaten die Eigenschaft, sowohl von A als auch von g_{ik} abzuhängen, was für eine Wechselwirkung charakteristisch ist.

Die allgemeine Vorschrift zur Berechnung der in (3.4.16) enthaltenen Lagrange-Funktion L_M lautet: Man schreibe die Lagrange-Funktion der Materiefelder im flachen Raum zunächst in Cartesischen Koordinaten an und führe dann beliebige krummlinige Koordinaten ein. Die so entstehende kovariante Lagrange-Funktion ist dann auch die Lagrange-Funktion der Materie im Graviatationsfeld[13].

Demnach ist das *vollständige Wirkungsintegral der allgemeinen Relativitätstheorie* durch

$$W = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2\kappa} + L_M(A, g_{ik})\right] \tag{3.4.19}$$

gegeben.

Die *Bewegungsgleichungen* für die Felder $A(x)$ folgen wie üblich aus der Stationarität des Wirkungsintegrals bei Variationen von A um δA:

$$\delta W_F = 0 = \delta W_M = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(\frac{\partial L_M}{\partial A} - \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial L_M}{\partial A_{,k}}\right)\delta A.$$

$$\boxed{\frac{\partial L_M}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial L_M}{\partial A_{,k}}} \tag{3.4.20}$$

Beliebige kleine Änderungen δA der Materiefelder lassen also das Wirkungsintegral W_M ungeändert, wenn A den Bewegungsgleichungen genügt.

[12] Siehe etwa Bjørken-Drell (1967). $1/m$ ist die Compton-Wellenlänge der durch (3.4.17) beschriebenen skalaren Teilchen (in Einheiten mit $c = 1 = \hbar$).

[13] „Minimale Kopplung", entspricht der minimalen Kopplung $p \to p - eA$ in der Elektrodynamik.

Wir haben nun aus (3.4.19) noch durch Variation der g_{ik} die Feldgleichungen des Gravitationsfeldes bei Anwesenheit von Materie herzuleiten. Den ersten Term von (3.4.19), W_F, haben wir bereits variiert, das Resultat war

$$\delta W_F = \frac{1}{2\kappa} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik}. \tag{3.4.21}$$

Nun ist noch W_M zu variieren:

$$\delta W_M = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial (L_M \sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial (\sqrt{-g} L_M)}{\partial g^{ik}{}_{,l}} \delta g^{ik}{}_{,l} \right]. \tag{3.4.22}$$

Nach der üblichen partiellen Integration erhält man

$$\delta W_M = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} T_{ik} \delta g^{ik}. \tag{3.4.23}$$

wo

$$\boxed{T_{ik} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial (\sqrt{-g} L_M)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{(\sqrt{-g} L_M)}{\partial g^{ik}{}_{,l}} \right\}} \tag{3.4.24}$$

der *Energie-Impulstensor* der betrachteten Materie ist. Die Tensor-Eigenschaft von T_{ik} ergibt sich direkt aus (3.4.23). Aus $\delta W = 0$ erhalten wir daher mit (3.4.21) und (3.4.22) schließlich

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik}. \tag{3.4.25}$$

Es ist noch zu zeigen, daß der durch (3.4.24) definierte Tensor tatsächlich der Energie-Impulstensor ist. Dazu zeigen wir zunächst, daß T_{ik} erhalten ist, d. h.

$$T_{ik;}{}^{k} = 0. \tag{3.4.26}$$

Diese Erhaltungssätze folgen aus der Bianchi-Identität (2.7.14), können aber auch aus der Invarianz des Wirkungsintegrals (3.4.16) gegen beliebige Koordinatentransformationen abgeleitet werden. Wenn wir in (3.3.23) Variationen δg^{ik} einsetzen, die einer Koordinatentransformation entsprechen, muß sich $\delta W_M = 0$ ergeben (Aufgabe 2).

Die Übereinstimmung des erhaltenen Tensors (3.4.24) mit dem symmetrischen (Belinfante) Energie-Impulstensor kann in den einfachsten Fällen (skalares Feld, Dirac-Feld, Maxwell-Feld) explizit gezeigt werden. Ein allgemeiner Beweis für diese Übereinstimmung wurde von Rosenfeld und Marx gegeben.[14]

[14] L. Rosenfeld, Mem. Acad. Roy. Belg. **18**, 2 (1938), G. Marx, Acta Phys. Hung. **1**, 209 (1952). Vgl. auch E. A. Lord, J. Math. Phys. **17**, 37 (1976).

Aufgaben

1. Zeige, daß das invariante Volumelement im 4-dimensionalen Raum durch

$$\mathrm{d}V = \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \tag{3.4.27}$$

gegeben ist.
Anleitung: a) Besonders anschaulich wird die Herleitung, wenn man sich auf orthogonale Koordinaten beschränkt. Wegen

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=0}^{3} g_{ii}(\mathrm{d}x^i)^2$$

sind die Strecken, die $\mathrm{d}x^i$ $(i = 0, \ldots, 3)$ entsprechen, einfach durch

$$\mathrm{d}s_{(i)} = \sqrt{|g_{ii}|}\,\mathrm{d}x^i$$

gegeben. Das Volumelement ist dann das Produkt dieser 4 orthogonalen Strecken $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_{(0)}\mathrm{d}s_{(l)}\mathrm{d}s_{(2)}\mathrm{d}s_{(3)} = \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$, da $g = g_{00}\,g_{11}\,g_{22}\,g_{33}$.
b) Allgemeiner ist das Volumelement der Raum-Zeit in der Umgebung des Ursprungs eines *RNKS* $\bar{x}^i$ einfach durch $\mathrm{d}V = \mathrm{d}^4\bar{x}$ gegeben: beim Übergang auf beliebige andere Koordinaten gilt dann $\mathrm{d}^4x = \det(\partial\bar{x}/\partial x)\mathrm{d}^4x$ (Multiplikation mit Funktionaldeterminante), wie aus der Differentialrechnung bekannt ist. Mit

$$g = \det g_{ik} = \det\left(\frac{\partial x^{\bar{l}}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{\bar{m}}}{\partial x^k}\,\eta_{\bar{l}\bar{m}}\right) = \det\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}\right)^2 \det\eta_{\bar{l}\bar{m}}$$

erhalten wir das gesuchte Resultat

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}^4\bar{x} = \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x.$$

Das Problem der Integration im Riemannschen Raum werden wir nochmals im Kapitel 7 aufnehmen.

2. Zeige, daß aus der Invarianz von W_F bzw. W_M gegen Koordinatentransformationen die kontrahierten Bianchi-Identitäten bzw. die Erhaltungssätze (3.4.26) folgen.
Anleitung: Um Variationen $\delta g^{ik}(x)$ zu erhalten, die nur von einem Argument x abhängen, führt man zuerst eine Transformation der Form (2.9.1) durch, wobei die ξ^i am Rande des Integrationsgebietes so gegen 0 gehen, daß alle Bildpunkte P auch innerhalb des Integrationsgebietes liegen, und führt dann genau wie in Abschnitt 2.10 die Koordinatentransformation (2.10.1)

durch, worauf sich $\delta g^{ik} = \epsilon(v^{i;k} + v^{k;i})$ ergibt (Variationen δA, die dabei entstehen, brauchen wegen (3.4.20) nicht berücksichtigt zu werden), während W bei diesen Prozessen ungeändert bleiben muß. Setzt man dies in (3.4.23) ein, so folgt nach einer partiellen Integration (3.4.26) bzw. (2.7.14).

3. Berechne den Energie-Impulstensor für das skalare Feld (3.4.18) nach der Vorschrift (3.4.24) unter Benutzung von

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} = -\frac{1}{2} g_{ik}. \tag{3.4.9a}$$

4. Zeige, daß $\epsilon_{ikjm} = \sqrt{-g}\epsilon(ikjm)$ ein Pseudotensor ist und daß die kontravarianten Komponenten

$$\epsilon^{ikjm} = -\frac{\epsilon(ikjm)}{\sqrt{-g}} \tag{3.4.28}$$

lauten. Berechne $\epsilon_{ikjm;e}$ und $\mathcal{L}_v \epsilon_{ikjm}$!
Hinweis: Aus der trivialen Identität (totale Antisymmetrisierung!)

$$\delta^f_{[e} \epsilon_{ikjm]} \equiv 0$$

folgt unter Beachtung der Antisymmetrie von $\epsilon \ldots$

$$\delta^f_e \epsilon_{ikjm} \equiv \delta^f_i \epsilon_{lkjm} + \delta^f_i \epsilon_{ilmj} + \delta^f_j \epsilon_{iklm} + \delta^f_m \epsilon_{ikjl}.$$

Resultat:

$$\epsilon_{ikjm;e} = 0, \tag{3.4.29}$$

$$\mathcal{L}_v \epsilon_{ikjm} = v^l{}_{;l}\, \epsilon_{ikjm}. \tag{3.4.30}$$

Bemerkung: Daß totale Antisymmetrisierung über mehr Indizes als die Raumdimension beträgt Null ergibt, ist die Quelle einer erstaunlichen Anzahl von Identitäten. Siehe dazu A. Höglund, Theses No. 828 (Matematiska institutionen, Linköpings universitet, SE–581 83 Linköping, Sweden).

Kapitel 4

Experimentelle Tests

Dieses Kapitel enthält das physikalische Kernstück der allgemeinen Relativitätstheorie, nämlich ihre Überprüfung durch das Experiment. Der Grund für das starke Nachlassen des Interesses an der Einsteinschen Gravitationstheorie in den Jahren 1920 bis 1960 war ja gerade die geringe Zahl von Experimenten zur Relativitätstheorie und die Aussichtslosigkeit, diese Experimente in irgendeiner Weise entscheidend zu verbessern. Durch die Weiterentwicklung der physikalischen Meßverfahren und vor allem durch die neu entstandene Satellitentechnik hat sich diese Situation grundlegend geändert[1]. In der folgenden Diskussion der experimentellen Evidenz soll die Reihenfolge eher historisch als systematisch sein.

4.1 Äquivalenzprinzip und Eötvös-Experiment

Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie bestehen aus zwei Teilen, den Feldgleichungen

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik}\, R = -\kappa\, T_{ik} \tag{4.1.1}$$

und den Bewegungsgleichungen, die z. B. für strukturlose Probeteilchen die Form haben

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i{}_{kl} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{4.1.2}$$

Man kann zeigen, daß in den einfachsten Fällen die Bewegungsgleichungen eine Folge der Feldgleichungen sind. Sie brauchen daher in diesen Fällen nicht gesondert postuliert werden. Man kann aber nicht umgekehrt aus den Bewegungs-

[1] Die experimentelle Situation wird im Detail von C. N. Will in Hawking & Israel (1979) und von I. I. Shapiro in Held (1980), Vol. II, analysiert; s. auch R. D. Reasenberg, in Bergmann & de Sabbata (1980) und die am Ende von Abschnitt 4.4.c genannten Werke.

gleichungen auf die Feldgleichungen schließen. Bei der folgenden Diskussion der Experimente zur Relativitätstheorie ist es wesentlich, die Aussagen, die in den Gleichungen (4.1.1) bzw. (4.1.2) stecken, klar zu trennen. Die Bewegungsgleichungen sagen aus, daß der Raum eine Riemannsche Struktur hat, und wie sich strukturlose kleine Probekörper darin bewegen. Die Bewegungsgleichungen sagen aber nichts über die Form der Metrik g_{ik} aus. In den Feldgleichungen (4.1.1) wird dagegen die Geometrie des Riemannschen Raumes, in dem sich die Teilchen bewegen, als Funktion der Massenverteilung bestimmt.

Die Grundidee der allgemeinen Relativitätstheorie steckt in den Bewegungsgleichungen. Sie enthalten bereits die Hypothese, daß Gravitationsfelder durch die Raum-Zeit-Geometrie beschrieben werden können. Wie immer auch die durch die Feldgleichungen bestimmte Struktur der Metrik g_{ik} beschaffen sein mag, stets kann in einem Raum-Zeitpunkt ein $RNKS$ eingeführt werden, so daß sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{4.1.3}$$

vereinfachen. In dem so definierten, momentan frei fallenden Koordinatensystem verharren alle Körper in gleichförmiger unbeschleunigter Bewegung. Daraus folgt, daß die Gravitationsbeschleunigung unabhängig von der Zusammensetzung eines Körpers ist und für alle Massen den gleichen Wert hat. Dieses Resultat erscheint, oberflächlich betrachtet, nicht sehr interessant, da es bereits von der Newtonschen Theorie vorhergesagt wird. Eine nähere Analyse wird aber weitgehende Unterschiede aufdecken.

4.1.1 Die Situation in der Newtonschen Theorie

Aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz

$$m_t \ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{G m_s \mathcal{M}}{r^3} \boldsymbol{x} \tag{4.1.4}$$

fällt unter der Annahme, daß für alle Körper

$$m_t = m_s \tag{4.1.5}$$

gilt, die Masse heraus, und es ergibt sich genau wie in der allgemeinen Relativitätstheorie das Resultat, daß alle Körper die gleiche Gravitationsbeschleunigung erleiden. Während dies aber in der Einsteinschen Theorie eine Notwendigkeit war – man könnte die Theorie sonst gar nicht formulieren –, ist (4.1.5) in der Newtonschen Theorie ein Faktum, das dem Experiment entnommen wird, das aber genau so gut anders sein könnte. In der Newtonschen Theorie besteht kein Grund für die Gleichheit von träger und schwerer Masse, während

diese Tatsache in der allgemeinen Relativitätstheorie ihre natürliche Erklärung findet.[2]

Noch etwas weiteres steckt in den obigen Gleichungen. Auch $\mathcal{M}$ kann als Testmasse benutzt werden, wobei sich die Bewegungsgleichung

$$\mathcal{M}_t \ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{G\mathcal{M}_s m_A}{r^3}\boldsymbol{x} \tag{4.1.6}$$

ergibt. Die Masse m spielt jetzt die Rolle der aktiven schweren Masse m_A, die das Gravitationsfeld erzeugt. Auch diese Masse wird in der Newtonschen Theorie gleich der trägen Masse gesetzt:

$$m_A = m_t = m_s. \tag{4.1.7}$$

Diese Gleichsetzung von m_s und m_A ist eine Konsequenz des dritten Newtonschen Axioms (actio = reactio): jede Abänderung hätte eine Verletzung des Impulserhaltungssatzes zur Folge. Die Gleichheit von aktiver und passiver schwerer Masse ist also in der Newtonschen Theorie wesentlich, während die Übereinstimmung dieser beiden Größen mit der trägen Masse als Zufall erscheint.

4.1.2 Die Situation in der allgemeinen Relativitätstheorie

Die Ableitung der Formel (4.1.3), die zeigen soll, daß alle Körper mit der gleichen Gravitationsbeschleunigung fallen, hat den Nachteil, nur für Massenpunkte gültig zu sein. In Wirklichkeit sind aber Massen sehr komplizierte Gebilde, deren innere Struktur der Reihe nach von der Festkörperphysik, Atomphysik, Kernphysik und schließlich Elementarteilchenphysik beschrieben wird, wobei die letztere Beschreibung noch keinesfalls eine endgültige Form erreicht hat. Es fragt sich nun, inwieweit die Gravitationsbeschleunigung von dieser inneren Struktur des Körpers unabhängig ist. Diese Frage ist keinesfalls so trivial, wie sie auf den ersten Blick erscheinen mag. Man denke nur an den komplizierten Aufbau eines Festkörpers aus Atomkernen und Elektronen, die sich mit Geschwindigkeiten bewegen, die mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind. Dieser Aufbau ist völlig verschieden für z. B. Gold und Aluminium, und doch stellt man – wie wir noch sehen werden – fest, daß die Gravitationsbeschleunigung dieser beiden Elemente im Erdschwerefeld sich um weniger als 10^{-11} unterscheiden. Würde man nun naiv eine Feldtheorie der Gravitation konstruieren, so würde daraus im allgemeinen keinesfalls diese extreme Gleichheit der Gravitationsbeschleunigung völlig unterschiedlich aufgebauter Massen folgen[3].

[2] E. Cartan hat auch eine Geometrisierung der Newtonschen Theorie unter Inkorporierung von $m_t = m_s$ angegeben; s. A. Trautman in Deser & Ford (1965). Einsteins Theorie berücksichtigt darüber hinaus noch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitationswechselwirkung.

[3] In der Tat war eine derartige Überlegung der historische Grund, warum Einstein die skalare Theorie der Gravitation verwarf. Nordström (Phys. Zs. **13**, 1126, 1912) hatte eine

Es ist daher unzureichend, die Gleichheit der Gravitationsbeschleunigung nur für Massenpunkte zu zeigen, in hinreichender Näherung muß diese Tatsache auch für komplex aufgebaute Massen bewiesen werden. Da dieses Problem im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie äußerst kompliziert und vielschichtig ist, wie die zahllosen Abhandlungen über die Bewegung ausgedehnter Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie bezeugen, wollen wir es hier nur ganz allgemein erörtern.

Das einfachste Argument, das die Unabhängigkeit der Fallbeschleunigung von der inneren Struktur eines Körpers im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie beweist, ist folgendes. In (2.7.15) wurde gezeigt, daß die Metrik in der Umgebung des Ursprungs eines $RNKS$ in der Form

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \tfrac{1}{3} R_{ilkm}\, x^l x^m + \dots \tag{4.1.8}$$

geschrieben werden kann. Wenn man sich daher auf Raum-Zeit- Abstände beschränkt, für die

$$\delta := |R_{iklm}\, x^k x^m| \ll 1 \tag{4.1.9}$$

gilt, so kann man die Raumkrümmung vernachlässigen und die Raum-Zeit durch den Minkowski-Raum der speziellen Relativitätstheorie ersetzen. Im so eingeführten frei fallenden (RNK –) System sind also alle Einflüsse des Gravitationsfeldes innerhalb der in (4.1.9) gegebenen Raum-Zeit-Einschränkungen wegtransformiert. Kein Körper erleidet in der Umgebung des Ursprungs dieses Koordinatensystems eine Schwerebeschleunigung, so daß, gesehen von einem beliebigen anderen Bezugssystem, alle Körper die gleiche Fallbeschleunigung aufweisen. Etwaige Abweichungen von dieser Konstanz der Fallbeschleunigung werden proportional zu der in (4.1.9) eingeführten Konstante δ sein. Für etwa metergroße Objekte auf der Erde sind derartige Abweichungen, die von der Inhomogenität des Schwerefeldes herrühren, von der Größenordnung 10^{-24} und daher zu vernachlässigen.

Gegen dieses Argument könnte man folgenden Einwand erheben: Es ist bekannt, daß für Massen, die einen Eigendrehimpuls aufweisen, eine von einer Geodätischen abweichende Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}s} + \Gamma^i{}_{kl}\, v^k v^l = \frac{1}{\mathcal{M}} R^i{}_{klm}\, v^k \sigma^{lm} \tag{4.1.10}$$

derartige speziell-relativistische Feldtheorie 1912 vorgeschlagen, doch glaubte Einstein zeigen zu können, daß diese Theorie eine starke Verminderung der Schwerebeschleunigung schnell umeinander kreisender Massen vorhersagen würde. Dieses Argument blieb unveröffentlicht und wurde erst von Harvey (Ann. Phys. (N. Y.) **29**, 383, 1964) publiziert. Es enthält jedoch einen Fehler, wie von Dicke (Ann. Phys. (N. Y.) **31**, 235, 1965) gezeigt werden konnte. Es kann vielleicht aber trotzdem als Illustration dafür dienen, welche Arten von Effekten man bei einer willkürlichen Aufstellung einer speziell-relativistischen Gravitationstheorie erwarten könnte. (Siehe auch R. U. Sexl, Forts. Phys., **15**, 269, 1967.)

gilt[4]. Dabei beschreibt σ_{ik} den Eigendrehimpuls des Teilchens, der in speziell-relativistischer Näherung durch

$$\sigma_{ik} = \int \mathrm{d}^3x\, \rho(x)(x_i u_k - x_k u_i) \tag{4.1.11}$$

gegeben ist: ρ ist die Dichte des Körpers, u^i sein inneres Geschwindigkeitsfeld (im Gegensatz zur Schwerpunktsbewegung v^i). Man könnte nun annehmen, daß bei genügend großem Eigendrehimpuls die Abweichungen von der geodätischen Bewegung beliebig groß werden und damit ein Gegenbeispiel zu unseren früheren Überlegungen gefunden ist. Um dies zu widerlegen, gehen wir wieder in den Ursprung eines *RNKS* über. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}s} = R^i{}_{klm}\, v^k \sigma^{lm}/\mathcal{M}. \tag{4.1.12}$$

Nun kann der Eigendrehimpuls eines Körpers, der von der Ausdehnung d ist, höchstens

$$\sigma^{lm} \propto \mathcal{M}d \tag{4.1.13}$$

betragen, da die Drehgeschwindigkeit des Körpers am Rande die Lichtgeschwindigkeit nicht überschreiten kann. Setzt man diesen Höchstwert in (4.1.12) ein, so ergibt sich für die Strecke x, die der Körper in der Zeit t durch die anomale Fallbeschleunigung zurücklegt, der Wert

$$x \propto \frac{t^2 d}{2} R_{iklm} \tag{4.1.14}$$

oder

$$\frac{x}{d} \propto \frac{t^2}{2} R_{iklm}. \tag{4.1.15}$$

Falls die Ungleichung (4.1.9) erfüllt ist, so ist die zusätzlich zurückgelegte Strecke x stets sehr viel kleiner als der Durchmesser der betrachteten Masse, und zwar ist das Verhältnis der beiden durch δ gegeben. Im Grenzfall sehr kleiner rotierender Körper ist die Fallbeschleunigung folglich unabhängig von der inneren Struktur (bzw. Rotation) der Körper.

4.1.3 Das Eötvös-Dicke Experiment

Wir haben bereits angedeutet, daß in diesem grundlegenden Experiment zur Gravitationstheorie die Gleichheit von (passiver) schwerer und träger Masse gezeigt werden soll. Das Experiment wurde erstmals von Baron Eötvös im Jahre 1890 ausgeführt und in seiner Präzision nach und nach gesteigert, bis

[4]Siehe z. B. A. Papapetrou, E. Corinaldesi, Proc. Roy. Soc. **A209**, 259 (1951).

Eötvös 1922 eine Genauigkeit von 10^{-9} erreichte[5]. Dieses Experiment wurde in den Jahren 1960 bis 1963 von Dicke und seinen Mitarbeitern in Princeton wiederholt[5]. Es gelang ihnen dabei, die Gleichheit von träger und passiver schwerer Masse mit einer Genauigkeit von 10^{-11} zu beweisen. Das Experiment verläuft etwa folgendermaßen: Zwei Zylinder, die aus Gold bzw. Aluminium bestehen, werden an den Enden einer in Nord-Süd-Richtung orientierten Drehwaage aufgehängt. Auf die Zylinder wirkt sowohl die Gravitationsanziehung der Sonne als auch die Zentrifugalkraft, die von der Bewegung der Erde um die Sonne herrührt. Falls sich diese beiden Kräfte nicht genau aufheben, kommt es zu einer Torsion der Drehwaage, die um 6 Uhr früh ihren maximalen Wert erreicht, zu Mittag und um Mitternacht verschwinden muß und um 6 Uhr abends ein Maximum mit umgekehrtem Vorzeichen aufweist. Wenn träge und schwere Masse nicht genau gleich sind, tritt eine Torsion der Drehwaage mit einer Periode von 24 Stunden auf, deren Ausbleiben zu den oben angegebenen Grenzen für die Gleichheit von m_t und m_s führt. Da man nach einem zeitabhängigen Effekt sucht und die Lage der beiden Zylinder in bezug auf das Erdschwerefeld immer die gleiche bleibt, braucht in der obigen Diskussion dieses Feld nicht berücksichtigt werden, was die Auswertung des Experiments wesentlich erleichtert.

Für weitere Verbesserungen und Details sei der Leser auf die zitierten Überblicksartikel verwiesen. Wir wollen hier aber einige der Folgerungen diskutieren, die man aus dem Eötvös-Dicke-Experiment ziehen kann. Wir betonen aber, daß das Äquivalenzprinzip mehr enthält als die Aussage $m_t = m_s$.

4.1.4 Die Gravitationsbeschleunigung von Positronen

Es wird vielfach die Frage gestellt, ob Antimaterie im Gravitationsfeld nach oben fällt. Offenbar kann man diese Frage nicht direkt auf experimentellem Weg beantworten, da größere Mengen von Antimaterie auf der Erde nicht herzustellen und Gravitationsexperimente mit einzelnen Elementarteilchen sehr schwierig durchzuführen sind. Die Frage kann aber indirekt mittels quantenfeldtheoretischer Argumente[6] eindeutig entschieden werden. Zunächst sind Photonen ihre eigenen Antiteilchen und sollten nach der genannten Hypothese überhaupt nicht fallen, was aber durch die bloße Existenz der Lichtablenkung bereits widerlegt ist. Nehmen wir weiter einmal an, das Positron hätte negative schwere Masse und fiele im Erdschwerefeld nach oben. Nun sind Positronen in normaler Materie zwar nicht in reeller, aber doch in virtueller Form enthalten und machen sich durch Beiträge virtueller Elektron-Positron-Paarerzeugung zur elektromagnetischen Selbstenergie bemerkbar, die ihrerseits zu beobachtbaren Ef-

[5] R. V. Eötvös, D. Pekar, und E. Petek, Ann. Phys. **68**, 11, (1922); R. H. Dicke, in C. DeWitt und B. DeWitt (1964), p. 163 ff. Braginsky & Panov erreichten 1972 die Genauigkeit 10^{-12}; siehe JETP **34**, 463.

[6] Leser, denen die im folgenden verwendeten Begriffe nicht geläufig sind, können diesen Punkt überspringen bzw. etwa Bjørken-Drell (1966) zurate ziehen.

fekten wie etwa dem Lambshift führt. Ein Atomkern (Z-fach geladen) emittiert ständig virtuelle Photonen, die dann reabsorbiert werden; diese Photonen wiederum zerfallen für einen gewissen Bruchteil der Zeit in Elektron-Positron-Paare. Die für uns interessanten Beiträge dieser Prozesse zur Selbstenergie des Atomkerns sind durch den Graphen in Abbildung 4.1 gegeben.

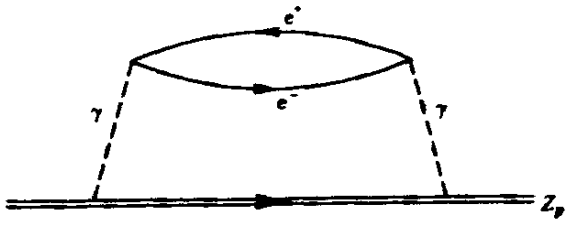

Abbildung 4.1: Beitrag zur elektromagnetischen Selbstenergie.

Falls dieser Graph auf normale Art zur *trägen* Masse des betrachteten Atomkerns beiträgt, aber wegen der als negativ angenommenen *schweren* Masse des Positrons einen anomalen Beitrag zur schweren Masse des Kerns liefert, so ergibt sich daraus eine Differenz von träger und schwerer Masse, die von der Struktur des Atomkerns abhängt. Diese Differenz wurde von Schiff[7] berechnet und ergibt sich zu

$$\left(\frac{3m}{8\pi}\right)(Z\alpha)^2 \int_0^\infty |F(q)|^2 (q^2 + 4m^2)^{-1/2}\, \mathrm{d}q. \tag{4.1.16}$$

Dabei ist m die Elektronenmasse und $\alpha = 1/137$ die Feinstrukturkonstante. $F(q)$ ist der Formfaktor der nuklearen Ladungsverteilung, der auf Eins normiert sein soll. Der obige Ausdruck verhält sich zur atomaren Masse wie 10^{-7}, $2 \cdot 10^{-7}$ und $4,3 \cdot 10^{-7}$ für Aluminium, Kupfer und Platin. Da diese Zahlen um vier Größenordnungen über der Genauigkeit des Eötvös-Dicke Experiments liegen und keine derartigen Effekte gefunden werden konnten, können wir die Möglichkeit einer negativen Gravitationsmasse des Positrons auch ohne Fallexperimente sofort ausschließen.

Eine noch genauere Schranke für die Differenz der Massen von Teilchen und zugehörigem Antiteilchen erhält man nach M. L. Good[8] für neutrale K-Mesonen aufgrund der empfindlichen Phasenrelationen im $K\bar{K}$-System, das bei ungleichen Schwerebeschleunigungen von K und $\bar{K}$ völlig durcheinanderkäme: die relative Massendifferenz muß kleiner als 10^{-14} sein. Fallexperimente mit einzelnen Elektronen[9] haben gezeigt, daß diese weniger als 9% der normalen Schwerebeschleunigung erfahren. Dies ist nicht im Widerspruch zum Äquivalenzprinzip, sondern auf ein elektrisches Feld zurückzuführen, das im Innern

[7] L. I. Schiff, Phys. Rev. Lett. **1**, 254, (1958).
[8] Phys. Rev. **119**, 1743 (1961); s. auch W. Thirring in Conn u. Fowler (1972).
[9] F. C. Witteborn, W. M. Fairbanks, Phys. Rev. Lett. **19**, 1049 (1967).

eines im Schwerefeld aufgestellten, die elektrischen Felder der Umgebung abschirmenden Faradaykäfigs auftritt und theoretisch[10] sogar zum Schwebenbleiben führen sollte. Die Fallbeschleunigung von Neutronen wurde von Dabbs et. al.[11] zu $g = (974 \pm 5)$ cm/sec^2 bestimmt (lokaler g-Wert 979.24). Innerhalb der Fehlergrenzen wurde keine Spinabhängigkeit festgestellt. Weitere Experimente dazu sind seit der Entwicklung der Neutroneninterferometrie möglich geworden.[12]

4.1.5 Konstanz der Feinstrukturkonstante

Noch eine wesentliche Folgerung kann man aus dem Eötvös-Dicke Experiment ziehen: Die Feinstrukturkonstante α, die die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung angibt, muß vom Gravitationspotential weitgehend unabhängig sein. Um dies einzusehen, nehmen wir an, daß α eine Funktion des (Newtonschen) Gravitationspotentials U ist:

$$\alpha = \alpha(U/c^2) \tag{4.1.17}$$

($1/c^2$ dient dazu, das Argument U/c^2 dimensionslos zu machen). Setzen wir weiter an, daß ein Bruchteil $\mathcal{M}_e = \alpha f \mathcal{M}$ der Masse $\mathcal{M}$ eines Atomes elektromagnetischen Ursprungs ist (f ist ein noch zu erörternder dimensionsloser Faktor) und daher wie angedeutet mit α variiert. Wenn man das Atom im Schwerefeld der Erde hebt, so verändert sich U um δU, $\mathcal{M}_e$ daher um $\delta\mathcal{M}_e = \alpha' f \mathcal{M}\,\delta U/c^2$ (α' = Ableitung von α nach seinem Argument). Dieser Massenveränderung des Atomes entspricht eine Energieänderung $\delta E = c^2\,\delta\mathcal{M}_e$, die zur potentiellen Energie $\mathcal{M}\delta U$ im Gravitationsfeld hinzukommt. Insgesamt verändert sich daher die potentielle Energie der Masse bei der Hebung der Masse im Gravitationsfeld um

$$\mathcal{M}\,\delta U(1 + \alpha' f). \tag{4.1.18}$$

Der anomale Term $\alpha' f$ unterscheidet sich nun für verschiedene Atome. Den größten Beitrag erhalten wir dabei, wenn wir die Proton-Neutron-Massendifferenz (1,3 MeV) auf elektromagnetische Selbstmassen zurückführen, was zumindest der Größenordnung nach richtig sein sollte, wenn auch eine konsistente Rechnung noch nicht möglich ist. Für f ergibt sich daraus $f = 0.2$. Da der Anteil der Neutronen im Kern zwischen 0 (Wasserstoff) und $\approx 60\%$ (schwere Kerne) schwankt, wäre demnach der anomale Anteil für schwere Kerne $\approx 0.1\alpha'$, während er für Wasserstoff nicht auftritt. Diese Anomalie im Gravitationspotential führt zu einem Unterschied in der Gravitationsbeschleunigung der gleichen Größe, der experimentell unter 10^{-11} liegen muß. Daher folgt $0.1\alpha' \leq 10^{-11}$ oder

[10] L. I. Schiff, M. V. Barnhill Phys. Rev. **151**, 1067 (1966).
[11] J. Dabbs et al., Phys. Rev. **139B**, 756 (1965); L. Koester, Phys. Rev. **214**, 907 (1976).
[12] A. Werner, Physics Today, Dec. 1980.

$$\alpha' \leq 10^{-10}. \tag{4.1.19}$$

Falls also die Feinstrukturkonstante tatsächlich vom Gravitationspotential abhängt, so kann ihre Veränderlichkeit nur eine äußerst schwache sein. Für unsere Galaxis ist z. B. $U/c^2 \leq 10^{-6}$, daher müssen die Unterschiede in α innerhalb der Galaxis kleiner als $\Delta\alpha \leq 10^{-16}$ sein. Ähnlich kann man zeigen, daß α auch über kosmologische Zeiträume konstant geblieben sein muß, so daß eine Erklärung der Rotverschiebung der Spektrallinien entfernter Galaxien durch Veränderung von α auszuschließen ist[13].

Die besten Schranken für kosmische Variationen der elektromagnetischen, schwachen und starken Kopplungskonstanten wurden von Shlyakhter[13] aus den Spaltprodukten des Naturreaktors von Oklo gewonnen. Aus der Isotopenverteilung dieses zwei Milliarden Jahre alten Reaktors ergeben sich als Grenze für die Variation der Feinstrukturkonstante $5 \cdot 10^{-9}$, für die schwache Kopplungskonstante 10^{-5} und für die starke Kopplungskonstante $4 \cdot 10^{-10}$ als Obergrenze der möglichen relativen Veränderung pro Milliarde Jahre.

4.2 Die Rotverschiebung von Spektrallinien

Wir kommen nun zum ersten der drei klassischen Tests der allgemeinen Relativitätstheorie, der Rotverschiebung von Spektrallinien im Gravitationsfeld eines Sternes bzw. der Erde.

Betrachten wir zunächst ganz allgemein eine Lichtquelle, die sich in einem Gravitationsfeld bewegt und mit einer Frequenz ν_0 (gemessen im eigenen Ruhsystem) strahlt. Ein Beobachter wird eine im allgemeinen veränderte Frequenz ν_1 empfangen (gemessen im Ruhsystem des Beobachters). Sind Δs_0, Δs_1 die jeweils einer Periode entsprechenden Eigenzeitintervalle, so gilt

$$\nu_1/\nu_0 = \Delta s_0/\Delta s_1. \tag{4.2.1}$$

Dabei ist Δs_1 durch Δs_0 eindeutig bestimmt als das Intervall auf der Weltlinie des Beobachters, das von jenen Nullgeodätischen[14] auf ihr ausgeschnitten wird, die von den Endpunkten von ds_0 ausgehen und diese Weltlinie treffen (Abbildung 4.2).

Im allgemeinen wird die Frequenzänderung (4.2.1) sowohl den Einfluß des Gravitationsfeldes als auch den des Bewegungszustandes (Dopplereffekt) von Quelle und Beobachter enthalten. Im Falle eines stationären Gravitationsfeldes lassen sich die beiden Effekte aber trennen. Wir betrachten dazu eine Quelle und einen Beobachter, die in einem stationären Feld

[13] A. I. Shlyakhter, Nature **264**, 340 (1976).

[14] Die Annahme, daß sich Lichtstrahlen entlang von Nullgeodätischen ausbreiten, wird im Kapitel 9 aus den Maxwellschen Gleichungen bewiesen werden.

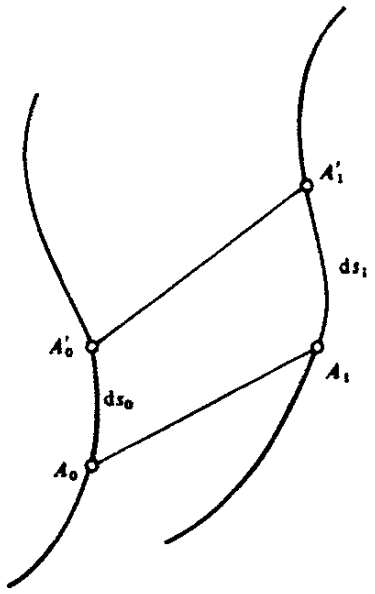

Abbildung 4.2: Zur Rotverschiebung.

$$ds^2 = g_{00}(x^\lambda)\,dt^2 + 2g_{0\mu}(x^\lambda)\,dt\,dx^\mu + g_{\mu\nu}(x^\lambda)\,dx^\mu\,dx^\nu \tag{4.2.2}$$

bei $x^\mu(0)$ bzw. $x^\mu(1)$ ruhen. Dann ist

$$\Delta s_0 = \sqrt{g_{00}(A_0)}\,\Delta t_0, \qquad \Delta s_1 = \sqrt{g_{00}(A_1)}\,\Delta t_1. \tag{4.2.3}$$

Sei $x^i(\lambda) = (t(\lambda), x^\mu(\lambda))$ die Nullgeodätische, die für die Werte $\lambda = 0$ bzw. $\lambda = 1$ des affinen Parameters λ (s. Abschnitt 1.3) durch A_0 $(t(0), x^\mu(0))$ bzw. A_1 $(t(1), x^\mu(1))$ geht. Da die Koeffizienten in der Geodätengleichung (1.3.10) nun nicht von t abhängen, ist auch $(t(\lambda) + \Delta t_0, x^\mu(\lambda))$ wieder eine Nullgeodätische; sie führt von A_0' $(t(0) + \Delta t_0, x^\mu(0))$ zur Beobachterweltlinie $x^\mu = x^\mu(1)$ und trifft sie in A_1' $(t(1) + \Delta t_0, x^\mu(1))$. Für den hier betrachteten Spezialfall ist also einfach $\Delta t_1 = \Delta t_0$, und (4.2.3) ergibt daher für das Verhältnis der beiden Frequenzen

$$\nu_1/\nu_0 = (g_{00}(A_0)/g_{00}(A_1))^{1/2} \approx \left[\left(1 + \frac{2U_0}{c^2}\right)\Big/\left(1 + \frac{2U_1}{c^2}\right)\right]^{1/2} \approx 1 + \frac{U_0 - U_1}{c^2}, \tag{4.2.4}$$

wobei wir die Newtonsche Näherung (1.4.6) für die g_{ik} benutzt haben (U ist das Newtonsche Gravitationspotential). Für die relative Frequenzänderung erhalten wir demnach

$$\frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0} \approx \frac{U_0 - U_1}{c^2} = \frac{\Delta U}{c^2}. \tag{4.2.5}$$

Diese Frequenzänderung wurde am genauesten von Pound und Snider[15] 1965 mit Hilfe des Mößbauer-Effektes gemessen. Bei einem Höhenunterschied

[15] R. V. Pound, J. L. Snider, Phys. Rev. **140B**, 788, (1965).

von 20 Metern ergibt (4.2.5) im Erdschwerefeld eine Rotverschiebung $\Delta\nu/\nu = 2.5 \cdot 10^{-15}$, die auf 1% genau gemessen werden konnte. Frühere Bestimmungen der Rotverschiebung im Gravitationsfeld der Sonne und von weißen Zwergen hatten wegen der dabei auftretenden Beobachtungsschwierigkeiten (wie z. B. Konvektionsströme in der Sternatmosphäre) nie eine vergleichbare Genauigkeit erreicht.

Allerdings sagen diese Experimente leider nichts über die Struktur der Feldgleichungen der Gravitation aus. In (4.2.4) ist nur die Newtonsche Näherung (1.4.6) eingegangen, die wir auch ohne Kenntnis der Einsteinschen Feldgleichungen aus dem Äquivalenzprinzip herleiten konnten, so daß die Rotverschiebung ein Test des Äquivalenzprinzips ist. Tatsächlich kann man (4.2.5) auch einfach aus dem Energiesatz herleiten, indem man die Relation $E = h\nu$ für Photonen benutzt und ihnen die Masse $m = E/c^2 = h\nu/c^2$ zuschreibt:

$$\frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{m\,\Delta U}{E} = \frac{\Delta U}{c^2}. \tag{4.2.6}$$

4.3 Lichtablenkung und Perihelverschiebung

Wir kommen nun zu zwei der echten Tests der allgemeinen Relativitätstheorie, zur Lichtablenkung und Perihelverschiebung. Zur Berechnung dieser Effekte müssen wir zunächst die Geodätischen in der Schwarzschild-Metrik finden. Der größeren Allgemeinheit halber gehen wir dabei von einer radialsymmetrischen Metrik der Form

$$\mathrm{d}s^2 = e^\nu \mathrm{d}t^2 - e^\lambda \mathrm{d}r^2 - e^\mu r^2 \mathrm{d}\theta^2 - e^\mu r^2 \sin^2\theta\, \mathrm{d}\phi^2 \tag{4.3.1}$$

aus, wobei ν, λ, μ Funktionen von r sind. Da wir auch Nullgeodätische mitberücksichtigen müssen, verwenden wir das Variationsprinzip (1.3.12):

$$\delta \int K\,\mathrm{d}\lambda = 0, \qquad K = e^\nu \dot{t}^2 - e^\lambda \dot{r}^2 - e^\mu r^2 \dot{\theta}^2 - e^\mu r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2. \tag{4.3.2}$$

In (4.3.2) sind t, ϕ zyklische Variable (sie kommen in K nicht explizit vor), und wir erhalten daher

$$-\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}} = 2e^\mu r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi} = \text{const.} =: 2l, \tag{4.3.3}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{t}} = 2e^\nu \dot{t} = \text{const.} =: 2F \tag{4.3.4}$$

Als Bewegungsgleichung für θ ergibt sich dagegen

$$2e^\mu r^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\phi}^2 = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(e^\mu r^2 \dot{\theta}). \tag{4.3.5}$$

Wenn das Koordinatensystem so gelegt wird, daß die betrachtete Geodätische die Anfangsbedingungen $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$ erfüllt, so folgt aus (4.3.5), daß die gesamte Bahn in der „Ebene" $\theta = \pi/2$ liegt. In diesem Fall vereinfacht sich (4.3.3) zu

$$e^{\mu} r^2 \dot{\phi} = l. \tag{4.3.6}$$

Nun hätten wir noch die Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate aufzustellen. Das ist jedoch nicht notwendig, da wir bereits wissen, daß $K = \text{const}$ ein weiteres Integral der Bewegungsgleichungen ist, wobei $K = 0$ für Nullgeodätische und $K = 1$ für die auf ihre Eigenzeit $\lambda = s$ bezogenen zeitartigen Geodätischen ist.

Wir haben daher insgesamt drei Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen, um alle Geodätischen zu ermitteln:

$$e^{\mu} r^2 \dot{\phi} = l, \quad e^{\nu} \dot{t} = F, \quad e^{\nu} \dot{t}^2 - e^{\lambda} \dot{r}^2 - e^{\mu} r^2 \dot{\phi}^2 = K \quad (K = 0, 1). \tag{4.3.7a, b, c}$$

Diese Gleichungen können im Fall der Schwarzschild-Metrik zwar nicht durch elementare Funktionen gelöst, aber in ihrer exakten Form graphisch diskutiert werden. Aus (3.3.32) lesen wir $\exp(\nu) = \exp(-\lambda) = 1 - 2M/r$, $\mu = 0$ ab. Setzen wir das in (4.3.7c) ein und eliminieren $\dot{t}$ und $\dot{\phi}$ daraus mittels (4.3.7a,b), so ergibt sich

$$\dot{t}(1 - 2M/r) = F, \quad r^2 \dot{\phi} = l, \tag{4.3.8a, b}$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{MK}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} = \frac{F^2 - K}{2}. \tag{4.3.9}$$

Für $K = 1$ hat (4.3.9) genau die Form des Energiesatzes für ein im Potential

$$\boxed{V_{\text{eff}} = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}} \tag{4.3.10}$$

bewegtes Teilchen mit Masse 1, wobei $\frac{F^2-1}{2} = E$ die Energie des Teilchens ist. (E ist dimensionslos, da wir sowohl die Teilchenmasse m als auch c gleich 1 gesetzt haben; für nichtrelativistische Bewegung ist demnach $E \ll mc^2$: siehe dazu Aufgabe 1). Die ersten beiden Terme in (4.3.10) entsprechen dabei gerade dem klassischen effektiven Potential, die allgemeine Relativitätstheorie liefert nur den Zusatzterm $-Ml^2r^{-3}$. Der Drehimpulssatz (4.3.8b) stimmt sogar fast völlig mit dem der Newtonschen Theorie überein, wobei die universelle Zeit t (wie auch in (4.3.9)) durch die Eigenzeit s ersetzt ist. (4.3.8a) liefert dann den Zusammenhang zwischen t und s.

Für Photonen ($K = 0$) ist das effektive Potential durch

$$\boxed{V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}} \tag{4.3.11}$$

gegeben. Bemerkenswert ist, daß dabei das klassische Newtonsche Potential $-M/r$ nicht auftritt und Photonen mit $l = 0$ (radiale Bewegung) sogar überhaupt kein Potential verspüren[16].

Zunächst wollen wir (4.3.10) für verschiedene Werte von l/M graphisch diskutieren, wobei es zweckmäßig ist, alle Radien in Einheiten von $2M$ (Schwarzschild-Radius) zu messen (siehe Abbildung 4.3).

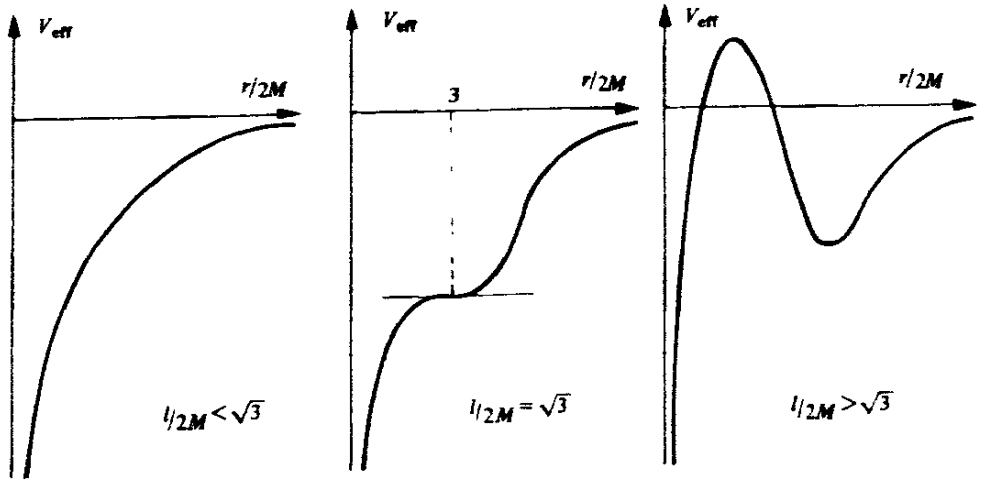

Abbildung 4.3: Effektives Potential für $K = 1$.

Der wesentlichste Unterschied zur Newtonschen Theorie besteht darin, daß das Potential für kleine Werte von r sehr stark anziehend ist, so daß Teilchen, die mit einem Drehimpuls $l < 4M$ im Unendlichen frei fallen gelassen werden (Gesamtenergie 0), ungehindert bis $r = 0$ fallen. Auch für größere Werte von l kann die Drehimpulsbarriere, die dann erst allmählich aufzutreten beginnt, durch Wahl einer genügend hohen (positiven) Energie stets überwunden werden. Für $l > 2\sqrt{3}M$ weist V_{eff} ein Maximum und ein Minimum auf, die bei

$$r = \frac{l^2}{2M}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{12M^2}{l^2}}\right] \tag{4.3.12}$$

liegen. Bemerkenswert ist ferner, daß dem Schwarzschild-Radius $r = 2M$ in Abbildung 4.3 keine besondere Bedeutung zukommt, das Potential ist dort nicht etwa singulär, und die Teilchen können ungehindert $r = 2M$ durchqueren. Lediglich der Zusammenhang (8.3.4a) zwischen t und s wird dabei singulär.

[16]Diese Feststellung ist koordinatenabhängig und gilt nur, wenn die Form (3.3.32) der Schwarzschild-Metrik benutzt wird.

Das effektive Potential (4.3.11) für Photonen ist in Abbildung 4.4 gezeigt, wobei für $r = 3M$ eine instabile Kreisbahn möglich ist. (Man beachte, daß $l \neq 0$ hier nur ein Skalenparameter ist, entsprechend der Uneindeutigkeit des affinen Parameters.)

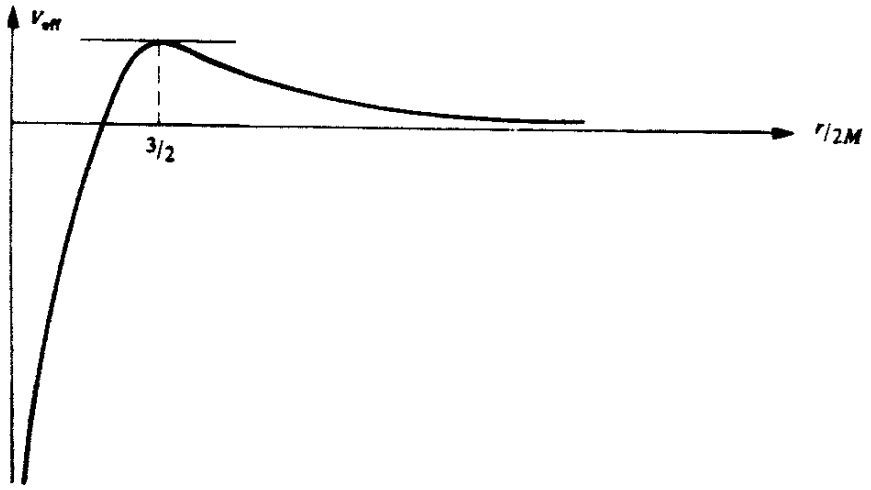

Abbildung 4.4: Effektives Potential für $K = 0$.

Nach dieser graphischen Diskussion der Geodätischen in der Schwarzschild-Metrik wollen wir für $l \neq 0$ nun auch die *Form der Bahnkurve* berechnen, die für Perihelverschiebung und Lichtablenkung benötigt wird.

Dabei gehen wir zunächst wieder von der allgemeinen Form (4.3.7) der Geodätengleichungen aus. Wenn wir $\dot{t}$ aus (4.3.7c) mittels (4.3.7b) eliminieren, $\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda = (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\phi)\dot{\phi}$ schreiben und schließlich auch $\dot{\phi}$ mittels (4.3.7a) eliminieren, so erhalten wir

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = e^{2\mu-\lambda-\nu}\frac{F^2r^4}{l^2} - Ke^{2\mu-\lambda}\frac{r^4}{l^2} - e^{\mu-\lambda}r^2. \tag{4.3.13}$$

Führen wir die neue Variable $u = r^{-1}$ ein, so vereinfacht sich (4.3.13) zu

$$(\mathrm{d}u/\mathrm{d}\phi)^2 = e^{2\mu-\lambda-\nu}F^2l^{-2} - Ke^{2\mu-\lambda}l^{-2} - e^{\mu-\lambda}u^2 =: W^2(u). \tag{4.3.14}$$

Die Gleichung der Bahnkurve in Polarkoordinaten ist daher

$$\phi = \int \frac{\mathrm{d}u}{W(u)}. \tag{4.2.15}$$

Setzt man μ, λ, ν für die Standardform (3.3.32) der Schwarzschildmetrik ein, so führt (4.3.15) auf ein elliptisches Integral, aus dem man durch Reihenentwicklung die Perihelverschiebung bzw. Lichtablenkung berechnen kann. Es zeigt sich aber, daß sich die Bahnform einfacher ergibt, wenn man *isotrope Koordinaten* ($\mu = \lambda$, $\mathrm{d}s^2 = e^{\nu}\mathrm{d}t^2 - e^{\mu}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$) benutzt, so daß für $K = 1$

$$W^2(u) = e^{\mu}(e^{-\nu}F^2 - 1)\,l^{-2} - u^2 \tag{4.3.16}$$

wird, und ferner eine Reihenentwicklung

$$e^{-\nu} = 1 + \alpha_1 M u + \alpha_2 M^2 u^2 + \dots \tag{4.3.17a}$$

$$e^{\mu} = 1 + \beta_1 M u + \beta_2 M^2 u^2 + \dots \tag{4.3.17b}$$

vornimmt. Für die isotrope Form der Schwarzschildmetrik erhält man durch Vergleich mit(3.3.35): $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = \frac{3}{2}$. Beim Einsetzen von (4.3.17) in (4.3.16) ist zu beachten, daß für die *Ellipsenbahnen* der Newtonschen Näherung $E = -M/2\mathcal{A} \ll 1$ ist, wobei $\mathcal{A}$ die große Halbachse der Bahn angibt. Daher ist $F^2 = 1 + 2E = 1 - M/\mathcal{A}$. Entwickelt man (4.3.16) in *erster Ordnung in M*, so ergibt sich die *Newtonsche Näherung*,

$$W^2(u) = -\frac{M}{\mathcal{A}l^2} + \alpha_1 \frac{M}{l^2} u - u^2. \tag{4.3.18}$$

Geht man noch eine Ordnung weiter, so ist

$$W^2(u) = A + Bu - Cu^2, \tag{4.3.19}$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= -M/\mathcal{A}l^2, \\ B &= M[\alpha_1 - (\alpha_1 + \beta_1)M/\mathcal{A}]\,l^{-2}, \\ C &= 1 - M^2(\alpha_2 + \beta_1\alpha_1)\,l^{-2}. \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Die Bahngleichung (4.3.15)

rdu.

$$\phi = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{A + Bu - Cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \arcsin \frac{B - 2Cu}{\sqrt{B^2 + 4AC}} \tag{4.3.21}$$

beschreibt nur für $C = 1$ einen Kegelschnitt. Wegen des Faktors $1/\sqrt{C}$ ergibt sich für $C \neq 1$ dagegen statt einer Ellipse eine Rosettenbahn, da zwischen zwei aufeinanderfolgenden Periheldurchgängen, bei denen $u = 1/r$ jeweils den gleichen maximalen Wert annimmt, ϕ um $2\pi/\sqrt{C} = 2\pi + \Delta\phi$ zunimmt (Abbildung 4.5). (4.3.20) ergibt als Perihelverschiebung pro Umlauf

$$\Delta\phi = \frac{\pi M^2}{l^2}(\alpha_2 + \beta_1\alpha_1). \tag{4.3.22}$$

Mittels $l^2/M = \mathcal{A}(1 - \epsilon^2)$ (ϵ ist die numerische Exzentrizität der Kepler-Bahn) kann l aus (4.3.22) eliminiert werden. Wir erhalten

$$\Delta\phi = \frac{\pi M(\alpha_2 + \beta_1\alpha_1)}{\mathcal{A}(1 - \epsilon^2)} \tag{4.3.23}$$

oder, im Fall der Schwarzschild-Metrik,

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{6\pi M}{\mathcal{A}(1-\epsilon^2)}.} \tag{4.3.24}$$

$\Delta\phi$ ist daher von der Größenordnung des Verhältnisses von Schwarzschild-Radius zu Bahnradius.

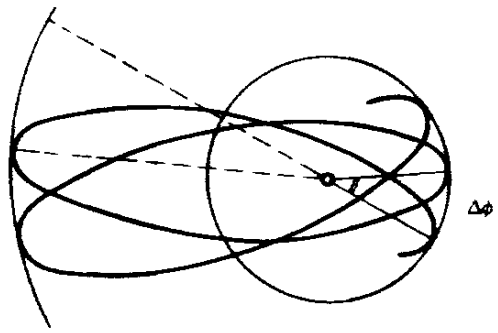

Abbildung 4.5: Zur Perihelverschiebung.

Bemerkenswert an (4.3.23) ist, daß α_2 in $\Delta\phi$ eingeht und die Perihelverschiebung daher einen Test der nichtlinearen Terme der Einsteinschen Feldgleichungen liefert. Die lineare Näherung (3.2.12) ist zur Berechnung dieses Effekts nicht ausreichend. (Streubahnen hoher Energie spüren auch β_2, es tritt hier aber kein kumulativer Effekt auf.)

Üblicherweise wird die Perihelverschiebung nicht pro Umlauf, sondern pro Erdjahrhundert angegeben. Entsprechende experimentelle Daten sind in der untenstehenden Tabelle mit den theoretischen Vorhersagen verglichen. ($\Delta\phi_E$ = Perihelverschiebung pro Umlauf; N = Zahl der Umläufe pro Erdjahrhundert; $\Delta\phi_{TH}$ = theoretische, $\Delta\phi_{EXP}$ = gemessene Perihelverschiebung pro Erdjahrhundert; $\Delta\phi$ ist in Bogensekunden angegeben; Icarus ist ein 1949 entdeckter Kleinplanet mit bemerkenswert großer Bahnexzentrizität.) Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist daher bei diesen „klassischen" optischen Beobachtungen ausgezeichnet und für Merkur besser als 1%. Noch genauere Messungen wurden durch Radarvermessungen des Planetensystems in den letzten Jahren möglich[17]. Allerdings hat vor allem R. Dicke darauf hingewiesen, daß eine geringe Abplattung der Sonne (Quadrupolmoment) ebenfalls zu einer Perihelverschiebung führen könnte. Messungen, die im Jahre 1974 einerseits von Dicke und Goldenberg und andererseits

[17] Die klassischen Daten fassen L. V. Morrison und C. G. Ward, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **173**, 183 (1975) und I. I. Shapiro et al., Astron. J. **76**, 588 (1971) zusammen. Bezüglich der Radarmessungen siehe I. I. Shapiro et al., Phys. Rev. Lett. **36**, 555 (1976).

von Hill angestellt wurden, haben zu unterschiedlichen Ergebnissen geführt[18]. Die Ursache dieser Diskrepanzen ist noch ungeklärt. Die Ausmessungen von Satellitenbahnen im Sonnensystem mit Hilfe von Radarbeobachtungen könnten zu einer Entscheidung in dieser Kontroverse führen.

Planet	$\mathcal{A}$ (10^6 km)	ϵ	$\Delta\phi_E$	N	$\Delta\phi_{TH}$	$\Delta\phi_{EXP}$
Merkur	57.91	0.2056	0.1038	415	43.03	43.11 ±0.45
Venus	108.21	0.0068	0.058	149	8.6	8.4 ±4.8
Erde	149.60	0.0167	0.038	100	3.8	5.0 ±1.2
Icarus	161.0	0.827	0.115	89	10.3	9.8 ±0.8

Es wäre allerdings besonders bemerkenswert, wenn die auf 5 Promille genaue Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment im Falle des Merkurperihels durch eine zufällige Kompensierung eines Fehlers in der allgemeinen Relativitätstheorie durch das Quadrupolmoment der Sonne zu erklären wäre.

Wir kommen nun zur *Lichtablenkung*, die einfacher zu berechnen ist, da dazu die lineare Näherung ausreicht. Setzen wir in (4.3.14) $K = 0$ und vernachlässigen quadratische Terme (proportional zu M^2) in (4.3.16), so ergeben sich die Koeffizienten A, B, C in (4.3.19) zu

$$A = F^2 l^{-2}, \qquad B = (\alpha_1 + \beta_1) M F^2 l^{-2}, \qquad C = 1. \tag{4.3.25}$$

Mit diesen Werten erhalten wir als Bahnkurve für den Lichtstrahl

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) M F^2 l^{-2} - \left(\frac{F}{l}\right) \sin \phi. \tag{4.3.26}$$

Daraus liest man unmittelbar ab, daß die *Lichtablenkung* δ (Abbildung 4.6) durch

$$\delta = \frac{(\alpha_1 + \beta_1) M}{R} \tag{4.3.27}$$

gegeben ist, wobei $R = l/F$ die in Abbildung 4.6 gezeigte Bedeutung hat.

(4.3.27) zeigt, daß die Newtonsche Näherung zur Berechnung der Lichtablenkung nicht ausreicht, da auch eine Kenntnis von β_1 notwendig ist. Für die Schwarzschild-Metrik ist $\alpha_1 = \beta_1 = 2$, man erhält also als Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie

[18] Siehe R. H. Dicke und H. M. Goldenberg, Astrophys. J. Suppl. **27**, 131 (1974) und H. A. Hill et al., Phys. Rev. Lett. **33**, 1997 (1964).

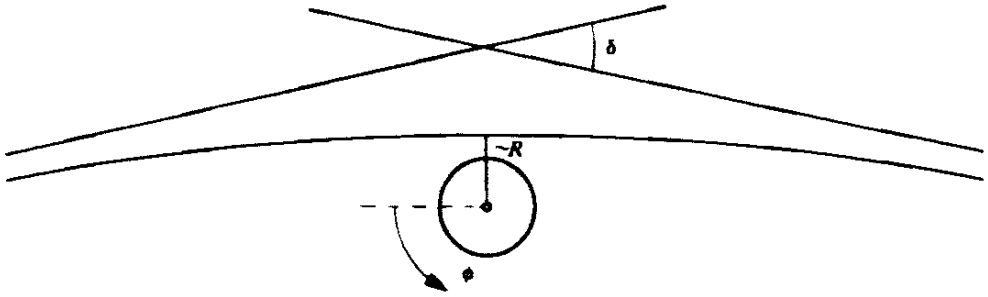

Abbildung 4.6: Zur Lichtablenkung.

$$\boxed{\delta = 4M/R.} \tag{4.3.28}$$

also $\delta = 1.75''$ für Licht, das am Sonnenrand vorbeiläuft, während die Newtonsche Näherung nur die Hälfte dieses Wertes liefern würde[19].

Die Lichtablenkung war früher experimentell nur schwer zu messen, da zur Beobachtung von Sternlicht, das knapp an der Sonne vorbeiläuft, eine wetterbegünstigte Sonnenfinsternis abgewartet werden mußte. Die Resultate der klassischen Beobachtungen ergaben daher nur den sehr ungenauen Wert $1.5'' < \delta < 2.2''$. Seit den 70er Jahren konnte auch die Ablenkung von Radiowellen im Sonnenfeld gemessen werden, basierend darauf, daß der Quasar 3C275 alljährlich am 8. Oktober von der Sonne verdeckt wird, während 3C273 als Bezugsobjekt für radiointerferometrische Messungen dienen kann[20]. Das Resultat ist $\delta = 1.76'' \pm 0,02''$. Bei Radiowellen besteht die Hauptschwierigkeit darin, die Beugung durch die Sonnenkorona vom relativistischen Effekt zu separieren. Frei von beiden Problemen ist die 1997 möglich gewordene promille-genaue (und den Einsteinschen Wert bestätigende) Bestimmung der Ablenkung des Lichts von Sternen mit Winkelabständen bis über 90° von der Sonne aufgrund der Positionsdaten des ESA-Astrometrie-Satelliten HIPPARCOS (http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos/).

Die Auswirkung der Ablenkung von Licht auf Lichtstrahlenbündel kann grob mit der Wirkung von Linsen verglichen werden, man spricht von Gravitationslinsen. Im allgemeinen kommt es dabei zu Mehrfachbildern von Objekten; sind sie als solche erkannt, kann das wertvolle Aufschlüsse sowohl über das emittierende Objekt als auch über das die Linsenwirkung hervorrufende System liefern. So beginnt die Linsenwirkung heute ein wichtiges Instrument der astrophysikalischen Forschung zu werden; vgl. dazu etwa Schneider, Ehlers & Falco (1992).

[19] Eine derartige Rechnung wurde erstmals von Soldner 1801 durchgeführt (abgedruckt in Ann. Phys. **65**, 593 (1921)). Auch Einstein hatte 1908 diesen unkorrekten Wert vorhergesagt.
[20] E. B. Fomalont, R. A. Sramek, Astrophys. J. **199**, 749 (1975).

Aufgaben

1. Zeige, daß $\mathcal{E} = mF$ die Gesamtenergie eines Teilchens der Masse m ist, das sich auf der durch (4.3.8) beschriebenen Geodätischen bewegt, wobei F durch (4.3.8a) definiert ist. Dabei ist $\mathcal{E}$ als diejenige Energie definiert, welche die aus einer vollständigen Zerstrahlung von m stammenden Photonen im Unendlichen haben. Wie hängt $\mathcal{E}$ mit der früher eingeführten Energie E zusammen?
   Anleitung: Die Rechnung kann in einer beliebigen statischen Metrik $\mathrm{d}s^2 = e^\nu \mathrm{d}t^2 - \gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^3$ durchgeführt werden, wobei $\gamma_{\alpha\beta}$ und ν nur Funktionen der Raumkoordinaten x^α sind. In einem momentan ruhenden lokalen Inertialsystem I, das sich an einer beliebigen Stelle x der Teilchenbahn befindet, hat die Teilchenenergie den Wert $\mathcal{E}_x = m\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$, wobei τ die Zeit $\mathrm{d}\tau = e^{\nu/2}\mathrm{d}t$ in I angibt. Wenn die Masse m in I zerstrahlt, erleiden die Photonen auf dem Weg ins Unendliche eine Rotverschiebung, so daß als Energie $\mathcal{E} = e^{\nu/2}\mathcal{E}_x = e^\nu \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} m$ im Unendlichen verbleibt.

2. Ein Satellit kreist auf einer Bahn mit Radius r in der Schwarzschild-Metrik. Berechne die Zeitdilatation, die eine Uhr im Satelliten gegenüber einer im Unendlichen angebrachten Uhr zeigt.
   Resultat:

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{sat}}}{\Delta t} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{3M}{2r}. \tag{4.3.29}$$

   Dieses Resultat werden wir auf im nächsten Abschnitt bei der Diskussion des Hafele-Keating-Experimentes verwenden.

4.4 Entfernungs- und Zeitmessungen im Sonnensystem

Bereits die Diskussion der drei „klassischen Tests der Relativitätstheorie", nämlich der Rotverschiebung, Lichtablenkung und Periheldrehung, hat gezeigt, welche bedeutende Rolle neue Meßtechniken bei der Verbesserung der experimentellen Überprüfung der Relativitätstheorie gespielt haben. Die Verbesserungen der Zeitmessung und der Radartechnik haben es auch erlaubt, die klassischen Tests durch eine Reihe von neuen Messungen zu ergänzen, die hier erörtert werden sollen.

4.4.1 Radarreflexion an der Venus

Dieses Experiment wurde im Jahre 1964 von I. Shapiro vorgeschlagen und in den folgenden Jahren unter seiner Leitung ausgeführt. Das „Shapiro-Experiment" ist im Prinzip sehr einfach: ein Radarsignal geht von der Erde

aus, wird an der Venus oder an einem anderen Planeten reflektiert und kehrt wieder zur Erde zurück, wobei die Laufzeit Erde – Venus – Erde gemessen wird. Die allgemeine Relativitätstheorie sagt dabei voraus, daß diese Laufzeit um rund 10^{-4} Sekunden größer sein wird als die von der Newtonschen Theorie vorhergesagte. Diesen Effekt werden wir in Kapitel 10 berechnen. Wir wollen hier nur feststellen, daß das Shapiro-Experiment die beiden Konstanten α_1 und β_1 des Linienelements (4.3.1), (4.3.17) testet, also in seinem Aussagewert äquivalent zur Lichtablenkung ist.

Die Laufzeitverzögerung wurde von Shapiro erstmals 1968 gemessen. Seither wurde die Präzision des Experimentes wiederholt gesteigert und beträgt derzeit rund 2 Promille[21], wobei die Resultate innerhalb der Fehlergrenzen mit den Vorhersagen der Relativitätstheorie übereinstimmen. Etwas weniger genau ist ein modifiziertes Experiment, bei dem Radiosignale von den Raumsonden Mariner 6, 7 und 9 bezüglich ihrer Laufzeit ausgewertet wurden.[22]

4.4.2 Die Messung der Erde-Mond-Entfernung

Bei der ersten Mondlandung am 20. Juli 1969 wurde von N. Armstrong und E. Aldrin ein Reflektor für Laserstrahlen auf dem Mond zurückgelassen. Damit konnte die Erde-Mond-Entfernung mit einer Genauigkeit von rund 10 cm bestimmt werden. Die Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist in diesem Falle nicht perfekt, sondern beträgt nur rund 30 cm. Die Diskrepanz ist vermutlich auf das komplizierte Schwerefeld der Erde und des Mondes, eine Verzerrung des Mondes durch Gezeitenkräfte und andere Effekte zurückzuführen. Es ist immerhin erstaunlich, daß eine Distanz von rund 376 000 Kilometern mit dieser Genauigkeit vermessen werden kann!

Vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie ist das wichtigste Ergebnis dieser Messungen die Bestimmung eines Effektes, der erstmals im Jahre 1968 von K. Nordvedt[23] betrachtet worden war. Wie wir in Kapitel 10 nämlich noch näher erläutern werden, kommt die Nichtlinearität der allgemeinen Relativitätstheorie dadurch zustande, daß Gravitationsfelder selbst Energie haben und an Massen, also Energiedichten gekoppelt sind. Auch das Gravitationsfeld einer schweren Masse trägt deshalb zu dieser Masse bei. Es fragt sich nun, ob das Gravitationsfeld den gleichen Beitrag zur trägen und zur schweren Masse liefert, wie dies von der allgemeinen Relativitätstheorie gefordert wird. Laborexperimente können dies nicht überprüfen, da die dabei benutzten Massen viel zu klein sind.

Nordvedt hat nun darauf hingewiesen, daß das Sonne-Erde-Mond-System eine Überprüfung des Äquivalenzprinzips auch in dieser Hinsicht gestattet.

[21] Siehe D. L. Cain et al., Bull. Am. Astr. Soc. **10**, 396 (1978), P. D. Reasenberg, I. I. Shapiro, Astrophys. J. **234**, L219 (1979), P. D. Reasenberg, Phil. Trans. Roy. Soc. **310**, 227 (1983).
[22] J. D. Anderson et al., Astrophys. J. **200**, 221 (1975).
[23] K. Nordvedt, Phys. Rev. **169**, 1019 (1968); **180**, 1293 (1969).

Weicht nämlich der Beitrag des Gravitationsfeldes zur schweren Masse von den Vorhersagen der Relativitätstheorie ab, so werden dadurch Erde und Mond ungleiche Gravitationsbeschleunigungen im Felde der Sonne erleiden. Dadurch ergibt sich eine Verzerrung der Mondbahn, die nach den Vorhersagen einiger Gravitationstheorien rund 10 Meter betragen sollte. Dieser Effekt kann mit Hilfe der Laserreflektoren mit einer Genauigkeit von etwa 1% gemessen werden. Die Auswertung der Messungen hat auch hier die Vorhersage der Relativitätstheorie bestätigt.[24]

4.4.3 Zeitdilatation: Das Hafele-Keating-Experiment

Vor einigen Jahren wurden eine Reihe von Vorschlägen gemacht, Atomuhren (Cäsium-Uhren) in einen Erdsatelliten einzubauen und so die Zeitdilatation der speziellen Relativitätstheorie (Uhrenparadoxon) und auch den Einfluß des Gravitationspotentials auf den Gang von Uhren zu messen[25]. In Aufgabe 2 von Abschnitt 4.3 wurde berechnet, daß eine in einem Satelliten um die Erde kreisende Uhr die Zeit $t_{\text{sat}} = (1 - 3M/2r)t = (1 - 10^{-9})t$ anzeigt (mit $M = 0,45\,\text{cm}$, $r = 6777\,\text{km}$), verglichen mit einer im Unendlichen befindlichen Uhr. Die Messung des Effekts erfordert demnach eine relative Ganggenauigkeit der Uhren von 10^{-11} (damit auf 1 % genau gemessen werden kann), die ziemlich leicht erreichbar ist. Allerdings läßt sich das Experiment nicht ganz so einfach durchführen, da die Vergleichsuhr auf der Erdoberfläche und nicht im Unendlichen angebracht werden muß, so daß sowohl Gravitationseffekte als auch die durch die Erddrehung bewirkte Zeitdilatation ihren Gang beeinflussen.

Während die Vorbereitungen für die Satellitenversuche zur Messung von (4.3.28) nur langsam vorangingen, stellten J. Hafele und R. Keating fest, daß die Ganggenauigkeit von Cäsium-Uhren inzwischen so gestiegen war, daß man den Einfluß von Geschwindigkeit und Schwerefeld bereits in gewöhnlichen Verkehrsflugzeugen messen können sollte. Im Oktober 1971 flogen sie mit vier Cäsium-Uhren ausgerüstet einmal in westlicher und einmal in östlicher Richtung um die Erde. Die Theorie sagt folgende Gangunterschiede zwischen den im Flugzeug befindlichen Uhren und einer in Washington aufgestellten Normaluhr (in ns) voraus[26]:

---

[24] I. I. Shapiro et al., Phys. Rev. Lett. **36**, 555 (1976). J. G. Williams et al., Phys. Rev. Lett. **36**, 551 (1976).

[25] Siehe z. B. D. Kleppner et al., Astrophys. Space Science **6**, 13 (1970).

[26] J. C. Hafele, R. Keating, Science **177**, 166, 168 (1972).

Effekt	Ostflug	Westflug
Gravitation	144 ± 14	179 ± 18
Geschwindigkeit	-184 ± 18	96 ± 10
Summe Theorie	-40 ± 23	275 ± 21
Experiment	-59 ± 10	273 ± 7

Der Vergleich mit den ebenfalls oben angegebenen experimentellen Daten zeigt, daß Theorie und Experiment auf etwa 10% genau übereinstimmen, wobei die durch die Erdrotation mögliche Trennung von Gravitations- und Geschwindigkeitseffekten besonders eindrucksvoll ist.

Ein noch genaueres Experiment wurde zwischen September 1975 und Januar 1976 von einer Forschungsgruppe unter der Leitung von C. Alley an der Universität von Maryland durchgeführt. Mit Flugzeugen wurden Atomuhren auf etwa 10 000 Meter Höhe gebracht und der Gang der Uhren mit dem Gang von Atomuhren am Boden verglichen. Nach mehreren Testflügen wurden fünf Hauptflüge von je 15 Stunden Dauer durchgeführt.

Einbeziehung sämtlicher Fehlerquellen ergibt als Gesamtergebnis[27]

$$\frac{\text{Gemessener Effekt}}{\text{Berechneter Effekt}} = 0,987 \pm 0.016.$$

Die größte Genauigkeit (10^{-4}) bei Experimenten dieses Typs, die nur das Äquivalenzprinzip testen, erreichten Vessot, Levine und Mitarbeiter[28] im Jahre 1976 mit Wasserstoffmasern an Bord von Raketen.

Die Genauigkeit der Atomuhren hat auch den Aufbau eines Satellitensystems zur metergenauen Ortsbestimmung (GPS = *G*lobal *P*ositioning *S*ystem) ermöglicht; da hierbei die allgemein-relativistischen Zeitdilatationseffekte berücksichtigt werden müssen, ist somit dieser Aspekt der allgemeinen Relativitätstheorie in den Bereich der täglichen Routineanwendung übergegangen!

Seit etwa 1983 werden nicht mehr Einzeleffekte für sich analysiert, sondern eine große Anzahl verschiedener Daten von Raumsonden, Radarvermessungen usw. wird mit einem relativistischen Modell des Planetensystems verglichen, das auch Alternativtheorien (vgl. Abschnitt 10.3) berücksichtigt und weit über 100 anzupassende Parameter enthält. Die allgemeine Relativitätstheorie ist dabei stets in bester Übereinstimmung geblieben. Angesichts der Kosten jedes

[27] Mehr Details in Sexl-Sexl (1981), Sexl-Schmidt (1979); C. Alley, in Meystre & Scully (1983).

[28] R. F. C. Vessot, M. W. Levine, GRG **10**, 181 (1979), Phys. Rev. Lett. **45**, 2081 (1980).

Experiments zur Steigerung der Genauigkeit kommt man allmählich zur Ansicht, daß es beim derzeitigen Stand besser wäre, auf Ideen zu warten, die es erlauben, die Genauigkeit gleich so weit zu steigern, daß die nächsthöhere Ordnung im Verhältnis (Schwarzschildradius/charakteristische Länge) testbar wird. [Dieses Verhältnis liegt für die inzwischen entdeckten Binärpulsare wesentlich günstiger (Neutronensterne, vgl. Abschnitt 8.1), so daß diese Objekte nunmehr ein wichtiger „Testplatz" der Theorie geworden sind; jedoch ist hier theoretischerseits eine Analyse des echten Zweikörperproblems nötig, die über unseren Rahmen hinausgehen würde. Auf Binärpulsare kommen wir in Abschnitt 6.3 zurück.]

Von der bisherigen Steigerung der Genauigkeit der Experimente mag sich der Leser durch Betrachtung der Angaben in den nachstehend genannten Werken bzw. experimentellen Kapiteln der angegebenen Sammelbände ein Bild machen: Will (1981, 1993), Meystre & Scully (1983), Bertotti et al. (1984), Hawking & Israel (1987), McCallum (1987), Michelson et al. (1988), Audretsch & Mainzer (1988); Ruffini (1989), Ashby (1990), Ruffini (1992), Demianski & Everitt (1993), Gleiser et al. (1993), Karim & Quadir (1994), und (zu Binärpulsaren) R. D. Blandford et al., Phil. Trans. Roy. Soc. London **A341**, No. 1660 (1992). Ein graduelles „updating" findet man unter http://www.wustl.edu/People/CLIFF/.

4.5 Das Machsche Prinzip und der Thirring-Lense-Effekt

Eine der wichtigsten historischen Wurzeln der allgemeinen Relativitätstheorie ist bisher in unseren Überlegungen unberücksichtigt geblieben: *Das Machsche Prinzip*. Dieses „Prinzip" findet sich in Ernst Machs Buch „Die Mechanik in ihrer Entwicklung – historisch-kritisch dargestellt" (1897). Es hat Einsteins Denken wesentlich angeregt und beeinflußt. Mach untersucht darin unter anderem den Begriff des absoluten Raumes, der in Newtons „Principia" mit den Worten „Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich" eingeführt wird. Für die Existenz des absoluten Raumes führt Newton den berühmten *Eimerversuch* an:

„Man hänge z. B. ein Gefäß an einem sehr langen Faden auf, drehe denselben beständig im Kreise herum, bis der Faden durch die Drehung sehr steif wird; hierauf fülle man es mit Wasser und halte es zugleich mit letzterem in Ruhe. Wird es nun durch eine plötzlich wirkende Kraft in entgegengesetzte Kreisbewegung gesetzt und hält diese, während der Faden sich ablöst, längere Zeit an, so wird die Oberfläche des Wassers anfangs eben sein, wie vor der Bewegung des Gefäßes; hierauf, wenn die Kraft allmählich auf das Wasser einwirkt, bewirkt das Gefäß, daß dieses (das Wasser) merklich sich umzudrehen anfängt. Es entfernt sich nach und nach von der Mitte und steigt an den Wänden des

Gefäßes in die Höhe, indem es eine hohle Form annimmt. (Diesen Versuch habe ich selbst gemacht.) ... Im Anfang, als die *relative* Bewegung des Wassers im Gefäß am größten war, verursachte dieselbe kein Bestreben, sich von der Achse zu entfernen. Das Wasser suchte nicht, sich dem Umfang zu nähern, indem es an den Wänden emporstieg, sondern blieb eben, und die *wahre* kreisförmige Bewegung hatte daher noch nicht begonnen." Auf diese Art versucht Newton zu zeigen, daß nicht Relativbewegungen, sondern die Bewegung gegen den absoluten Raum für die Dynamik ausschlaggebend sind. Dieses Argument kritisiert Mach:

„Der Versuch Newtons mit dem rotierenden Wassergefäß lehrt nur, daß die Relativdrehung des Wassers gegen die *Gefäßwände* keine merklichen Zentrifugalkräfte weckt, daß dieselben aber durch die Relativdrehung gegen die Masse der Erde und die übrigen Himmelskörper geweckt werden. Niemand kann sagen, wie der Versuch verlaufen würde, wenn die Gefäßwände immer dicker und massiger, zuletzt mehrere Meilen dick würden." Diese Bemerkung Machs haben in der Folge zu einer Fülle von Studien Anlaß gegeben. Einstein versuchte Machs Kritik an Newton durch das Prinzip der *allgemeinen Kovarianz* zu berücksichtigen, das er der allgemeinen Relativitätstheorie zugrundelegte: Die Naturgesetze sollen in jedem Bezugssystem (nicht nur Inertialsystem) die gleiche Form annehmen. Damit glaubt Einstein die bevorzugte Rolle der Inertialsysteme – denen gegenüber Beschleunigung in der speziellen Relativitätstheorie absoluten Sinn hat – beseitigt zu haben und alle Trägheitskräfte auf Relativbeschleunigungen von Massen zurückführen zu können[29].

Quantitative Rechnungen auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie zur Überprüfung dieser Ideen Einsteins wurden erstmals 1918 von H. Thirring angestellt und dann von ihm und J. Lense weitergeführt[30]. In der ersten dieser Arbeiten versucht Thirring zu zeigen, daß die Rotation einer großen schweren Massenschale zu einer Mitrotation der lokalen Inertialsysteme in ihrem Inneren führt. Im Weiteren untersuchen Thirring und Lense die Auswirkung der Rotation auf die Bahnen von Probekörpern im Außenraum einer rotierenden Masse. Beide Effekte erschienen zunächst als hoffnungslos klein; L. Schiff konnte aber 1960 darauf hinweisen, daß die durch die Rotation der Erde in ihrem Außenraum hervorgerufene Mitdrehung der Inertialsysteme ausreicht, um durch ein von ihm vorgeschlagenes Kreiselexperiment nachweisbar zu sein[31].

Die zu diesen Effekten führenden kleinen Korrekturen zur Metrik, die durch die Rotation der Erde oder eines anderen Körpers bewirkt werden, können wir in der linearen Näherung berechnen und dann zum Schwarzschild-Linienelement hinzufügen. Die Feldgleichungen lauten mit $g_{ik} = \eta_{ik} + 2\psi_{ik}$:

$$\Box\psi_{km} = -\kappa\left(T_{km} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{km}\,T^l_l\right), \tag{4.5.1}$$

[29] A. Einstein, Phys. Z. **14**, 1249 (1913).

[30] H. Thirring, Phys. Z. **19**, 39 (1918); **22**, 29 (1921); H. Thirring, J. Lense, Phys. Z. **19**, 156 (1918).

[31] L. I. Schiff, Proc. Natl. Acad. Sci. US **46**, 871 (1960); Phys. Rev. Lett. **4**, 215 (1960).

wobei die Nebenbedingung (3.2.11) automatisch erfüllt ist, wenn wir für T_{ik} einen erhaltenen Energie-Impuls-Tensor einsetzen. Dabei reicht die Näherung (3.2.16) für T_{ik} nicht aus, da wir auch die Drehung der Massenverteilung, also den Massenstromvektor mitberücksichtigen müssen. Wenn wir uns auf langsam rotierende Massen beschränken, für die überall $|\boldsymbol{v}| \ll c$ gilt, ist

$$T_{ik} = \rho \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.2}$$

eine geeignete Näherung für den Energie-Impuls-Tensor. Dieser Ausdruck für T_{ik} kann allerdings nur näherungsweise richtig sein, da aus der Erhaltung von T_{ik} eine geradlinig gleichförmige Bewegung der Materie folgen würde und nicht die gewünschte Rotation. Diese erhalten wir nur, wenn wir auch Gravitationseffekte bzw. Druckterme in (4.5.2) mitberücksichtigen, die jedoch verglichen mit dem Hauptterm von der Ordnung $1/c^2$ sind, so daß wir ihren Einfluß auf die Metrik vernachlässigen können.

Wenn die Rotation der Massenverteilung stationär ist ($\partial \boldsymbol{v}/\partial t = 0$), können wir in (4.5.1) $\Box \to -\Delta$ ersetzen, und es folgt für die hier neu hinzukommenden Komponenten $\psi_{0\alpha}(x)$ der Metrik

$$\Delta \psi_{0\alpha} = \kappa\, T_{0\alpha} \tag{4.5.3}$$

oder ($r = |\boldsymbol{x}|$), im Sinn einer Multipolentwicklung,

$$\begin{aligned} \psi_{0\alpha}(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}^3 x'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, T_{0\alpha}(\boldsymbol{x}') = \\ &-\frac{2G}{r} \int \mathrm{d}^3 x'\, T_{0\alpha}(\boldsymbol{x}') - \frac{2G}{r^3} \int \mathrm{d}^3 x'\, x^\beta x'^\beta T_{0\alpha}(\boldsymbol{x}') + \ldots \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Dabei ist $P_\alpha = \int \mathrm{d}^3 x'\, T_{0\alpha}(\boldsymbol{x}')$ der Gesamtimpuls der Massenverteilung, deren Schwerpunkt wir als im Ursprung des Koordinatensystems ruhend ansetzen. Dann ist $P_\alpha = 0$ und daher

$$\psi_{0\alpha}(\boldsymbol{x}) = -\frac{2G}{r^3}\, x^\beta \int \mathrm{d}^3 x'\, \rho\, x'^\beta v_\alpha(\boldsymbol{x}'). \tag{4.5.5}$$

Für eine starr rotierende kugelförmige Massenverteilung ist

$$v_\alpha(\boldsymbol{x}') = v^\alpha(\boldsymbol{x}') = \epsilon^{\alpha\mu\nu}\, \omega^\mu\, x'^\nu \tag{4.5.6}$$

(ω^ν = Vektor der Winkelgeschwindigkeit), und wir erhalten

$$\psi_{0\alpha}(\boldsymbol{x}) = \frac{2G}{r^3} \epsilon^{\alpha\mu\nu} \omega^\mu x^\beta \int \mathrm{d}^3 x'\, \rho\, x'^\beta x'^\nu. \tag{4.5.7}$$

Für sphärisch symmetrische $\rho(\boldsymbol{x}) = \rho(r)$ gilt

$$\int \mathrm{d}^3x'\,\rho\,x'^{\beta}x'^{\mu} = \frac{1}{2}\,I\,\delta^{\beta\mu}. \tag{4.5.8}$$

wobei

$$I := \frac{2}{3}\int \mathrm{d}^3x'\rho(r')\,r'^2 \tag{4.5.9}$$

das Trägheitsmoment der Masse ist. Damit wird (4.5.7)

$$\psi_{0\alpha}(\boldsymbol{x}) = \frac{2G}{r^3}\,\epsilon^{\alpha\mu\nu}\omega^{\mu}x^{\beta}\frac{1}{2}\delta^{\beta\nu}I = \frac{GI}{r^3}\,\epsilon^{\alpha\beta\nu}\omega^{\beta}x^{\nu}. \tag{4.5.10}$$

Diese Zusatzterme haben wir zur Schwarzschildmetrik zu addieren, die dann im Außenraum einer rotierenden Masse die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 + \\ &+4GIr^{-3}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\omega^{\beta}x^{\gamma}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

annimmt. Der Term $\propto \mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}t$ zeigt an, daß das Gravitationsfeld zwar *stationär*, aber nicht statisch ist.

Im folgenden haben wir die Wirkung der zu ω^{γ} proportionalen Zusatzterme auf die Bewegung von Probekörpern zu berechnen, um zu gegebenenfalls beobachtbaren Effekten zu gelangen. Da wir uns für die Effekte der nichtdiagonalen Terme in (4.5.11) interessieren (die M/r-Terme haben wir ja bereits analysiert), genügt es, die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - 2k_{\alpha}(x^{\beta})\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 \tag{4.5.12}$$

als Beispiel eines stationären Linienelements zu betrachten. Dabei ist $\boldsymbol{k} = (k^{\alpha}) = (-k_{\alpha})$ ein beliebiges Vektorfeld mit $|\boldsymbol{k}| \ll 1$, das wir später wie in (4.5.11) als

$$k_{\alpha} = -k^{\alpha} = -\frac{2GI}{r^3}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\omega^{\beta}x^{\gamma} \tag{4.5.13}$$

wählen werden. Ein möglicher Weg wäre nun das Studium der Geodätischen zum Linienelement (Übungsaufgabe). Es ergeben sich dabei Bewegungsgleichungen mit formaler Analogie zur Bewegung im magnetostatischen Feld mit Vektorpotential $\boldsymbol{k}$, wie dies für die Corioliskraft bekannt ist („gravimagnetisches Feld“: im Gegensatz dazu wäre das zum skalaren Potential U in (3.2.22) gehörende Feld als „gravielektrisches Feld“ anzusprechen). Dies führt zu den eigentlichen Thirring-Lense-Effekten, die möglicherweise[32] an Bahnen gewisser Satelliten (LAGEOS) und in Akkretionsscheiben gesehen werden.

[32] Siehe z.B. die Diskussion in H. Rumpf, H. Urbantke, Plus Lucis 2/99, p. 14.

Wir wollen uns hier für den Thirring-Schiff-Effekt interessieren und untersuchen dazu für (4.5.12) die Transformation (2.5.9) auf ein lokales Inertialsystem in der Nähe des Punkts $x^\alpha = X^\alpha$, $t = X^0$. In

$$y^\alpha = x^\alpha - X^\alpha + \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{ij}(\boldsymbol{X})\,(x^i - X^i)(x^j - X^j) \tag{4.5.14}$$

nötigen wir die Christoffel-Symbole für (4.5.12)

$$\Gamma^\alpha_{00} = 0 = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{1}{2}(k_{\alpha,\beta} - k_{\beta,\alpha}) \tag{4.5.15}$$

(beachte die Näherung $|\boldsymbol{k}| \ll 1$!). Damit kann (4.5.14) in der Form

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{X}) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X})(x^0 - X^0) \tag{4.5.16}$$

geschrieben werden, wobei

$$\boldsymbol{\Omega} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}. \tag{4.5.17}$$

Das hat die offensichtliche Deutung, daß das lokal inertiale y-System in bezug auf das x-System – in dem die Metrik ihre stationäre Form annimmt und das durch ein starres Gerüst festgelegt werden kann – während des kleinen Zeitintervalls $x^0 - X^0$ mit der Winkelgeschwindigkeit (4.5.17) rotiert.

Zusammenfassend können wir sagen: wie wir den Effekt statischer Massenverteilungen, der sich in Newtonscher Näherung als (1.4.6) manifestiert, durch Angabe eines Beschleunigungsvektors $\boldsymbol{g} = -\mathrm{grad}\,U$ ersetzen können – (4.5.14) geht dabei über in

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})\,(x^0 - X^0)^2 \quad -, \tag{4.5.18}$$

so können wir die Effekte der linearisierten stationären Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + 2U)\,\mathrm{d}t^2 - (1 - 2U)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \tag{4.5.19}$$

durch Angabe von *zwei* Vektorfeldern, nämlich $\boldsymbol{g}$ (Linearbeschleunigung – gravielektrisches Feld) *und* $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}$ (Rotation der lokalen Inertialsysteme – gravimagnetisches Feld), in linearer Näherung ersetzen. In dieser Näherung ist nämlich die Transformation (4.5.14) für (4.5.19) einfach das Produkt der Transformationen (4.5.18) und (4.5.16).

Die Rotation des lokalen Inertialsystems gegen das Inertialsystem im Unendlichen folgt im Falle der kugelförmigen rotierenden Masse aus (4.5.13) und (4.5.17) zu

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = \frac{GI}{r^3}\,\frac{3(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\omega}r^2}{r^2}.} \tag{4.5.20}$$

Das Rotationsfeld $\mathbf{\Omega}$, das den *Thirring-Schiff-Effekt* beschreibt, hat daher genau die Form eines Dipolfeldes, während es bekanntlich bei ruhenden Massenverteilungen nur Monopol- und Quadrupolfelder für $\boldsymbol{g}$ gibt. Die geometrische Interpretation von $\mathbf{\Omega}$ (und $\boldsymbol{g}$) ist in Abbildung 4.7 gezeigt.

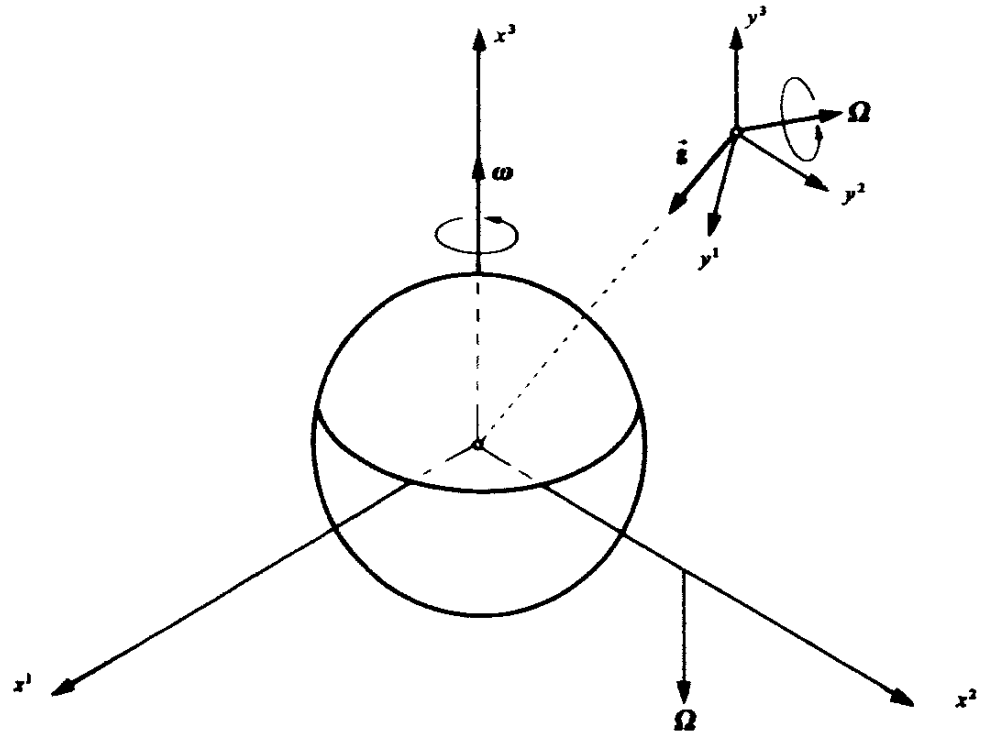

Abbildung 4.7: Zum Thirring-Schiff-Effekt.

Der Thirring-Schiff-Effekt kann mit Hilfe von Kreiselexperimenten gemessen werden, die derzeit in Vorbereitung sind[33] („Gravity Probe B"). Bei diesen Experimenten wird ein Kreisel in einem Satelliten auf eine polare Umlaufbahn um die Erde gebracht (Abbildung 4.8). Dabei nimmt man an, daß der Satellit in seinem lokalen Inertialsystem frei fällt und die Kreiselachse eine konstante Richtung in bezug auf dieses lokale Inertialsystem beibehält. Wegen der Drehung $\mathbf{\Omega}$ des Inertialsystems gegenüber dem Fixsternhimmel ergibt sich dann auch eine Drehung der Kreiselachse um den gleichen Betrag, die jährlich $0.05''$ ausmacht, wie in Abbildung 4.8 angedeutet ist.

In der Abbildung ist ferner die *geodätische Präzession* eingetragen, die durch die Bewegung des Kreisels auf der Umlaufbahn um die Erde zustandekommt und zu einer Drehung der Kreiselachse um $7''$ pro Jahr gegenüber dem Fixsternhimmel führt. Die Berechnung dieses Effektes soll in einer Übungsaufgabe erfolgen. Bei nichtgeodätischer Schwerpunktsbewegung käme hier noch die allgemein-relativistische Version der Thomas-Präzession (vgl. Sexl & Urbantke (1992); Misner, Thorne & Wheeler (1973); Ciufolini & Wheeler (1995)) hinzu. Abschließend wollen wir noch auf eine Problematik hinweisen, die wir hier

[33] Siehe dazu Demianski & Everitt (1993) sowie http://einstein.stanford.edu.

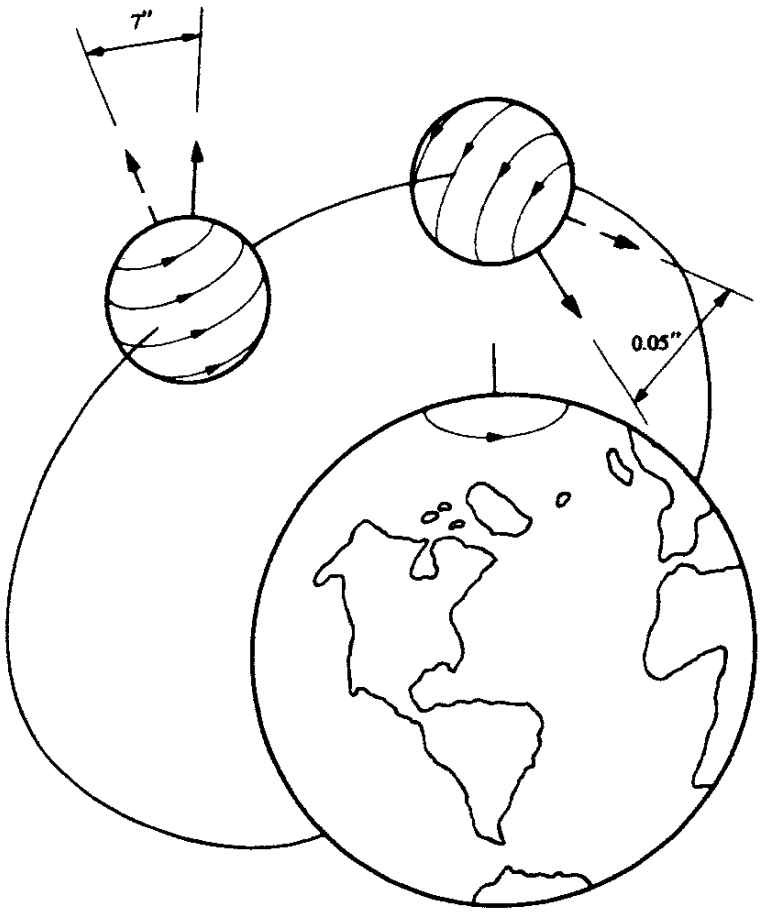

Abbildung 4.8: Thirring-Schiff-Effekt und geodätische Präzession.

unberücksichtigt gelassen haben: Für ausgedehnte Körper – und das sind Kreisel stets – ist die Herleitung der Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld eine überaus komplizierte Aufgabe, über die eine ausführliche Spezialliteratur existiert.[34] Wir haben hier einfach angenommen, daß die Kreiselachse stets den Achsenrichtungen des lokalen Inertialsystems folgt. Diese Annahme kann man aus den Bewegungsgleichungen beweisen.[35]

Aufgaben

1. Berechne den numerischen Wert $(0,05'')$ der durch den Thirring-Schiff-Effekt bewirkten jährlichen Drehung der Kreiselachse für einen Satelliten, der an der Erdoberfläche entlangstreift.

2. Berechne die geodätische Präzession eines Kreisels auf einer antriebslosen Kreisbahn in einem kugelsymmetrischen statischen Schwerefeld.

[34] Vgl. W. G. Dixon in Ehlers (1979).

[35] A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. **A209**, 248 (1951). A. Papapetrou, E. Corinaldesi, Proc. Roy. Soc. **A209**, 259 (1951).

Anleitung: Seien μ^i die Komponenten eines Einheitsvektors in Richtung der Kreiselachse, so ist nach (2.6.23)

$$\frac{\mathrm{d}\mu^i}{\mathrm{d}s} + \Gamma^i{}_{kl}\,\mu^k v^l = 0 \tag{4.5.21}$$

die Bewegungsgleichung (Parallelverschiebung) dieser Vektorkomponenten ($v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ = 4-Geschwindigkeit der Bahn). Die Metrik sei durch (3.3.17) gegeben, die Kreisbahn durch $x^1 = r = \text{const.}$, $x^2 = \vartheta = \frac{\pi}{2}$, $x^3 = \varphi = \Omega t = \Omega x^0$, wo Ω so bestimmt sei, daß dies einer geodätischen Bewegung entspricht (vgl. Aufgabe 3 von Abschnitt 4.3 für die Schwarzschildmetrik). Wird (4.5.21) für $i = 1$ nach s differenziert und daraus μ^0, μ^3 mittels der Gleichungen für $i = 0$ und $i = 3$ eliminiert, ergibt sich eine Gleichung der Form

$$\frac{\mathrm{d}^2\mu^1}{\mathrm{d}s^2} + \omega^2\mu^1 = 0, \quad \omega^2 := e^{-\lambda}\,\frac{\nu_{,r}}{2r} = e^{-(\lambda+\nu)}\,\Omega^2. \tag{4.5.22}$$

Für die Schwarzschildmetrik wird $\omega^2 = \Omega^2 = Mr^{-3}$, es ist aber zu beachten, daß sich die Kreisfrequenz ω auf die Eigenzeit s, die Kreisfrequenz Ω aber auf die statische, im Unendlichen inertiale Zeit bezieht; die beiden hängen auf der Kreisbahn gemäß $\mathrm{d}s^2 = (e^\nu - r^2\Omega^2)\,\mathrm{d}t^2$ zusammen. Vollführt also φ einen Umlauf, wächst t um $2\pi/\Omega$ und damit ωs um $2\pi(e^\nu - r^2\Omega^2)^{1/2}\omega/\Omega$ ($= 2\pi\left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{1/2}$ für Schwarzschild). Die Lösung $\mu^1(s) = \mu^1(0)\cos\omega s$ von (4.5.22) ist dann nicht auf den Anfangswert zurückgegangen, die Richtung der Kreiselachse nicht zur Anfangsrichtung. Dies ist die geodätische Präzession. Die Gleichung für μ^3 zeigt, daß die Achsenrichtung gegenüber der radialen Richtung im jeweiligen Bahnpunkt *zurückbleibt*. Obiger Unterschied bewirkt dadurch pro Umlauf eine *Vorwärtsdrehung* der Achse gegenüber einer Bezugsrichtung im Unendlichen („Fixsterne") um dem Winkel

$$2\pi\left[1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}\sqrt{1 - r\nu_{,r}/2}\,\right] \approx \frac{\pi}{2}(\alpha_1 + 2\beta_1)\frac{M}{r} \tag{4.5.23}$$

($\approx 3\pi M/r$ für Schwarzschild), dessen numerischer Wert für einen Kreisel in einem Erdsatelliten im Text angegeben ist.

3. Ein Teilchen wird aus dem Unendlichen gegen einen rotierenden Stern geschossen, wobei der Geschwindigkeitsvektor anfänglich in einer durch die Drehachse gelegten Ebene liegt. Zeige, daß die Winkelgeschwindigkeit des Teilchens (um die Drehachse des Sternes) *nicht* konstant gleich Null bleibt, das Teilchen also abgelenkt wird. Zeige, daß diese Winkelgeschwindigkeit in jedem Bahnpunkt nur von der dort vorhandenen Metrik abhängt und wieder verschwindet, wenn das Teilchen ins Unendliche gelangt. Die Bewegung

erfolgt dort wieder in einer Ebene durch die Drehachse, die aber gegen die Anfangsebene verdreht ist.
Anleitung: Verwende das Wirkungsprinzip für die geodätische Bewegung.

Kapitel 5

Kosmologie

Die relativistische Kosmologie bildet eines der faszinierendsten, aber durch die Schwierigkeiten ihrer experimentellen Verifizierung zeitweise auch frustrierendsten Kapitel der allgemeinen Relativitätstheorie. Allerdings gilt auch hier, dass sich die Situation durch die ständige Verfeinerung der Meßtechniken, den Einsatz von Computern zur Auswertung riesiger Datenmengen und Durchrechnung von Modellansätzen sowie die Möglichkeit, Messungen von außerhalb der Erdatmosphäre positionierten Satelliten aus durchführen zu können, wesentlich verbessert hat.

Die erste Arbeit zur relativistischen Kosmologie ist A. Einsteins „*Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*"[1]. Das in dieser Arbeit hergeleitete „Einstein-Universum" eröffnete eine neue[2] Denkmöglichkeit, das endliche, aber unbegrenzte Universum. 1917 war das Postulat eines statischen, zeitlich unveränderlichen Universums die Grundforderung an das kosmologische Modell. Einstein mußte sogar die früher postulierten Feldgleichungen (3.1.2) durch die Einführung der kosmologischen Konstante Λ zu (5.5.4) verallgemeinern, um ein statisches Universum als Lösung zu erhalten. Erst 1929 wurde durch E. Hubble[3] gezeigt, daß unser Universum nicht statisch ist, sondern eine Expansion aufweist, die sich in einer Rotverschiebung der Spektrallinien entfernter Galaxien zeigt. Das Hubblesche Expansionsgesetz ist einer der Grundpfeiler der relativistischen Kosmologie und wird in Abschnitt 5.2 diskutiert.

Kosmologische Modelle, die eine Expansion aufweisen, hatte A. Friedmann[4] bereits 1922 aufgestellt (Friedmann-Modelle). Diese Modelle, nichtstatische Lösungen der Einstein-Gleichungen, unterscheiden sich durch räumliche Krümmung und Annahmen über die kosmologische Konstante Λ und sollen

[1] A. Einstein, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1917, p. 142.
[2] Siehe aber K. Schwarzschild, Vierteljahresschr. Astr. Ges. **35**,337 (1900).
[3] E. Hubble, Proc. U. S. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
[4] A. Friedmann, Zeitschr. Phys. **10**, 377 (1922); **21**, 326 (1924).

in den Abschnitten 5.5 bis 5.8 genauer diskutiert werden. Seit 2000 beginnt das Beobachtungsmaterial, eine experimentelle Entscheidung zwischen den verschiedenen Friedmannschen Weltmodellen näherrücken zu lassen.

Gemeinsam ist (fast) allen *Friedmann-Modellen*, daß das Universum vor etwa 10 Milliarden Jahren in einer gewaltigen Explosion, dem *Urknall*, entstanden sein soll. Das Studium des *frühen Universums*, also der Vorgänge kurz nach dem Urknall, hat sich in den letzten Jahren als eine der interessantesten und fruchtbarsten Teilgebiete der relativistischen Kosmologie erwiesen. Der Anstoß dazu war die 1965 durch Penzias und Wilson entdeckte „*kosmische Hintergrundstrahlung*", eine isotrope Wärmestrahlung von etwa 2.7 K, die das Universum erfüllt. Die Konsequenzen dieser Entdeckung sollen im Abschnitt 5.9 beschrieben werden.

5.1 Das kosmologische Prinzip

In der Kosmologie versucht man, das Weltall als Ganzes zu beschreiben und sich nicht auf abgegrenzte Teilbereiche (Labor, Erde, Sonnensystem etc.) zu beschränken wie in der übrigen Physik. Dabei ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung: die nichtgravischen Kräfte – elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkungen – spielen bei Erscheinungen, die über den Maßstab einer Galaxis hinausgehen, keine Rolle, da sie teils kurzreichweitig sind oder sich wegen der Ladungsneutralität – kompensieren. Zur Bestimmung der Dynamik des Weltalls im Großen sind daher nur die Feldgleichungen der Gravitation zu lösen, wenn wir von Umwandlungsprozessen von Elementarteilchen und Phasenübergängen absehen, die in der Frühzeit des Universums von Bedeutung waren.

Aber selbst für den Energie-Impuls-Tensor der Materie, der in der Einsteinschen Gleichung einzusetzen ist, können wir stark vereinfachende Annahmen machen. Wir können nämlich ähnlich wie in der kinetischen Gastheorie vorgehen und die Materie durch ein Gas ersetzen, in dem die Galaxien die Rolle der Atome, die Haufen von Galaxien diejenige der Moleküle haben: Mittelt man über Regionen, die groß gegenüber dem Abstand von Galaxien sind[5], so ist die „Mikrostruktur" (= Galaxien) vernachlässigbar, und ein Gas einheitlicher Dichte resultiert. Es zeigt sich, daß diese Dichte im ganzen unserer Beobachtung zugänglichen Weltall etwa konstant ist (homogenes Weltall) und nicht von der Richtung abhängt, in der wir beobachten (isotropes Weltall). Die beste experimentelle Evidenz dafür ist die Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung, auf die wir noch zurückkommen.

Eine weitreichende Verallgemeinerung dieser experimentellen Tatsache wird im *kosmologischen Prinzip* formuliert: Die Erde hat keinen privilegierten Platz im Weltall; das Weltall bietet von jeder Stelle aus den gleichen Anblick. Diese Formulierung ist nicht sehr präzise, es wird in ihr Homogenität, aber nicht die

[5] Zu neuerdings beobachteten Inhomogenitäten auf dieser Skala siehe Goenner (1994).

Isotropie des Weltalls gefordert, die den kosmologischen Modellen üblicherweise zugrundegelegt wird. Aus Isotropie folgt Homogenität, aber nicht umgekehrt (Abschnitt 2.8).

Die isotropen, homogenen Modelle des Universums wurden erstmals durch Friedmann untersucht (Friedmann-Modelle), während die anisotropen, aber homogenen Modelle erst später klassifiziert wurden (neun Typen nach den möglichen Strukturen ihrer Symmetriegruppen, die schon früher abstrakt von Bianchi gefunden worden waren)[6]. Für Vergleiche mit dem Experiment sind die Friedmann-Modelle am bedeutendsten. Im nächsten Abschnitt sollen daher zunächst die mit ihnen eng verwandten Newtonschen Modelle der Kosmologie diskutiert werden.

5.2 Newtonsche Kosmologie

In den folgenden Übungsaufgaben sollen die wesentlichsten Resultate der Newtonschen Kosmologie erarbeitet werden.

Aufgaben

1. *Olberssches Paradoxon*[7]. Die erste Annahme, die man der Kosmologie zugrundelegen könnte, ist die eines unendlich ausgedehnten, homogenen und statisch mit Sternen erfüllten Universums. Zeige, daß diese Annahme zu einem unendlich hellen Nachthimmel führt (Olberssches Paradoxon), wenn man die Absorption des Lichtes durch Sterne unberücksichtigt läßt.

2. *Kinematik: Die Rotverschiebungs-Entfernungsrelation* (Hubble-Gesetz). Da auch die Fragen der Energieversorgung und Stabilität des oben angenommenen Universums unlösbar erscheinen, betrachten wir ein dynamisches, d. h. expandierendes (oder kollabierendes) Universum. Zeige, daß der Ansatz ($H(t)$ ist eine beliebige Funktion der Zeit)

$$\boldsymbol{v}(t) = H(t)\,\boldsymbol{x}(t) \tag{5.2.1}$$

für die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eines Teilchens (Stern), das sich in Entfernung $\boldsymbol{x}$ von einem beliebig herausgegriffenen Koordinatenursprung (Erde) befindet, das kosmologische Prinzip erfüllt.
Anleitung: Der Ursprung $\boldsymbol{x} = 0$ ist bei der „Explosion" (5.2.1) nicht ausgezeichnet, da der Ansatz $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{a}(t)$ – wobei $\boldsymbol{a}(t)$ die Koordinate eines beliebig herausgegriffenen Sterns ist – zu dem Bewegungsgesetz

[6] Siehe z. B. M. A. H. Mac Callum in Hawking & Israel (1979).

[7] Dazu wird gewöhnlich H. Olbers, Bode's Jahrbuch **111** (1826) zitiert. Dieser Artikel von Olbers hat allerdings nicht allzuviel mit der Formulierung des Paradoxons zu tun. Siehe dazu Jaki (1969) und S. L. Jaki, Am. J. Phys. **35**, 200 (67). Eine sehr lesenswerte kritische Analyse wurde auch von E. R. Harrison, Physics Today, Feb. 1974, p. 30, gegeben.

$\boldsymbol{v}'(t) = H(t)\boldsymbol{x}'(t)$ führt. $\boldsymbol{v}'(t)$ ist die Geschwindigkeit in bezug auf den Stern $\boldsymbol{a}(t)$, der nun als neuer Ursprung des Koordinatensystems fungiert.

Das *Expansionsgesetz* (5.2.1) wird im Universum tatsächlich beobachtet (siehe Abbildung 5.14). Die Rotverschiebung der Spektrallinien entfernter Galaxien zeigt, daß sich diese mit einer ihrem Abstand D proportionalen Geschwindigkeit v von uns entfernen[8] ($D = |\boldsymbol{x}|$), falls sie als Dopplereffekt gedeutet wird:

$$\boxed{v = H_0 D.} \tag{5.2.2}$$

wobei die *Hubble-Konstante* H_0 die Dimension einer inversen Zeit hat:

$$\boxed{H_0^{-1} = 1{,}5 \cdot 10^{10} \text{ Jahre} = 4{,}5 \cdot 10^{17}\text{s}.} \tag{5.2.3}$$

Dieser Wert[9] für H_0 ist wegen der Schwierigkeiten[10] der Entfernungsbestimmung mit sehr großen Unsicherheiten behaftet. Die verschiedenen Bestimmungsmethoden liefern die Schranken $1{,}35 \cdot 10^{10} \leq H_0^{-1} \leq 1{,}75 \cdot 10^{10}$, während der ursprüngliche Hubblesche Wert nur $H_0^{-1} = 2 \cdot 10^9$ war[11].

3. Die Bewegung der Sterne der Newtonschen Kosmologie wird beschrieben durch $\boldsymbol{x}(t)$. (5.2.1) ergibt

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathcal{R}(t)\,\boldsymbol{x}_0, \tag{5.2.4}$$

wobei $\boldsymbol{x}_0$ die Lage des Sterns zur Zeit t_0 ist und $\mathcal{R}(t)$ die $\mathcal{R}(t_0) = 1$ erfüllende Lösung von

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}}{\mathrm{d}t} = H(t)\,\mathcal{R}(t). \tag{5.2.5}$$

4. *Kontinuitätsgleichung.* Die Verteilung der Sterne wird durch eine homogene Massendichte $\rho(t)$ genähert, die wegen des kosmologischen Prinzips nur von t abhängen kann. Zeige, daß aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{5.2.6}$$

[8] Der Index Null bei H_0 soll andeuten, daß der Wert dieser Größe zur jetzigen Zeit $t = t_0$ gemeint ist.

[9] S. z.B. J.R. Primack, in Cline (2001), oder auch Wheeler & Martel (2001).

[10] Die Schwierigkeiten der Messung von H_0 sind in E. M. Burbidge, „Optical Observations Relevant to Cosmology", in R. Sachs (1971) ausführlich diskutiert.

[11] Zur Geschichte der Rotverschiebungs-Entfernungsrelation siehe z. B. Weinberg (1972), p. 435 ff., oder J. D. Fernie, Publ. Astron. Soc. Pac. **81**, 707 (1969).

mit dem (5.2.1) entsprechenden Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = H(t)\,\boldsymbol{x}$ die Gleichung

$$\rho(t) = \rho_0/\mathcal{R}^3(t) \tag{5.2.7}$$

folgt, wobei $\rho_0 = \rho(t_0)$ ist.

5. *Dynamik.* In der hydrodynamischen Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p - \boldsymbol{F} = 0 \tag{5.2.8}$$

kann der Druck p gegenüber der Gravitationskraft $\boldsymbol{F}$ vernachlässigt werden, zumindest in der heutigen Entwicklungsphase des Universums. Zeige, daß durch Einsetzen von (5.2.1) und (5.2.4) die Relation

$$\boldsymbol{x}\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + H^2\right) = \boldsymbol{F} \tag{5.2.9}$$

folgt und nach Divergenzbildung, wegen der Feldgleichung der Newtonschen Gravitation

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = -4\pi\rho G \tag{5.2.10}$$

sowie (5.2.7)

$$\mathcal{R}^2\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{R}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4\pi G}{3}\rho(t_0) = 0. \tag{5.2.11}$$

Da hiernach stets $\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{R}}{\mathrm{d}t^2} < 0$, ist ein statisches Universum ($\mathcal{R}$ = const.) unmöglich.

6. *Die kosmologische Konstante.* Ändert man den Kraftansatz (5.2.10) durch Einführung der „kosmologischen Konstanten" Λ – deren physikalische Deutung später klar werden wird – willkürlich ab:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = -4\pi G\left(\rho - \frac{\Lambda}{4\pi G}\right), \tag{5.2.12}$$

so erhält man anstelle von (5.2.11)

$$\mathcal{R}^2\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{R}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4\pi G}{3}\rho_0 - \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^3 = 0. \tag{5.2.13}$$

Für $G\rho_0 = \Lambda\mathcal{R}^3/4\pi$ ist nun ein statisches Universum möglich, das wir in der relativistischen Kosmologie als Einstein-Universum kennenlernen werden.

7. *Integration der Bewegungsgleichung. Energiesatz.* Die Gleichung(5.2.13) gestattet das Energieintegral

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{C}{\mathcal{R}} + k - \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^2 = 0. \tag{5.2.14}$$

wobei $C = 8\pi\rho_0 G/3$ und k eine Integrationskonstante ist ($-k$ = Energiedichte). Diskutiere die Lösungen von (5.2.14) für $k \gtreqless 0$ graphisch. (Siehe dazu Abschn. 5.6).

8. *Welche Gebilde folgen der kosmischen Expansion?* [12] Expandiert das Sonnensystem, die Galaxis nach (5.2.2)? Zur Beantwortung dieser Frage zeige, daß der Energiesatz (5.2.14) für einen Probekörper als

$$\frac{mv^2}{2} + V(t, \boldsymbol{x}) = \text{const.} \tag{5.2.14a}$$

geschrieben werden kann, wobei

$$V(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{4\pi mG}{3}\rho(t)\,\boldsymbol{x}^2 - \frac{1}{3}m\,\Lambda\,\boldsymbol{x}^2$$

und m die Masse des betrachteten Teilchens ist. Die kosmologische Expansion kann daher auf ein Oszillatorpotential mit negativer Kraftkonstante zurückgeführt werden, zu dem andere Potentiale $U(\boldsymbol{x})$ hinzugefügt werden können, wie etwa das Gravitationspotential $U = -G\mathcal{M}/r$ unserer Galaxis. Das resultierende Gesamtpotential ist in Abbildung 5.1 gezeigt.

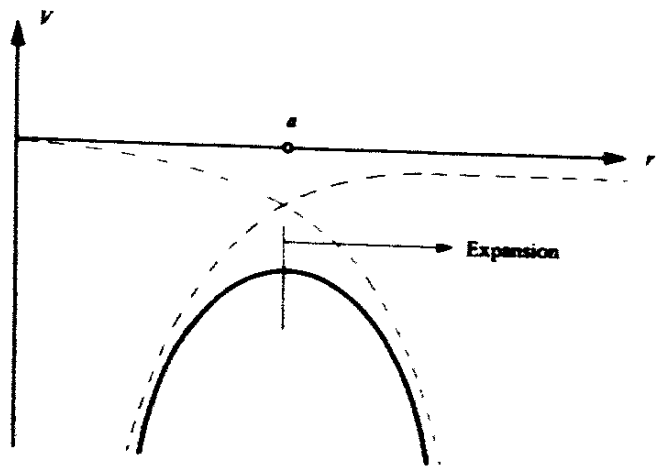

Abbildung 5.1: Überlagerung von kosmischem und lokalem Potential.

Die Expansion erfolgt ab $r = a$. Wie groß ist a für das Sonnensystem bzw. die Galaxis?

[12] Nach der allgemeinen Relativitätstheorie wurde diese Frage behandelt in A. Einstein, E. Straus, Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945) („Emmentalermodell“).

9. *Kritik der Newtonschen Kosmologie.* Ist das Teilchen, welches das Zentrum der Explosion in der Newtonschen Kosmologie bildet, wirklich durch keinerlei Experimente feststellbar, oder ist es bloß kinematisch nicht ausgezeichnet? (Betrachte geladene Teilchen.)

5.3 Relativistische Hydrodynamik

Zum Aufbau der relativistischen Kosmologie benötigen wir zunächst eine geeignete Theorie der Materie, die das Universum erfüllt. Die Theorie, die dabei üblicherweise verwendet wird, ist die relativistische Hydrodynamik, die im folgenden entwickelt werden soll.

Als Ausgangspunkt der relativistischen Hydrodynamik kann die kinetische Theorie dienen[13], wobei die Bewegungsgleichungen dann aus der Boltzmann-Gleichung hergeleitet werden. Einfacher ist es jedoch, direkt vom Energie-Impuls-Tensor der Flüssigkeit auszugehen, aus dessen Erhaltung sich dann die Bewegungsgesetze ergeben, wobei Zusatzannahmen (Zustandsgleichung; Ansätze für Reibungs- und Wärmeleitungsterme bei nichtidealen Flüssigkeiten) die fehlenden Relationen liefern.

Für eine *ideale Flüssigkeit* hat der Energie-Impuls-Tensor die Form [11]

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \tag{5.3.1}$$

wobei ρ die totale Energiedichte und p den Druck bedeutet. (5.2.15) ist nur im Ruhsystem der Flüssigkeit gültig. In einem beliebigen anderen Koordinatensystem, in dem sich die Flüssigkeit mit der Vierergeschwindigkeit u^i bewegt, ist

$$T_{ik} = (\rho + p)u_i u_k - p\, g_{ik}. \tag{5.3.2}$$

Für $u_i = (1, \mathbf{0})$ und $g_{ik} = \eta_{ik}$ reduziert sich (5.3.2) auf den vorigen Ausdruck und ist daher die geeignete Verallgemeinerung von (5.3.1), denn zur Konstruktion von T_{ik} stehen nur $u_i u_k$ und g_{ik} zur Verfügung, und die Koeffizienten sind so gewählt, daß (5.3.2) im Ruhsystem in (5.3.1) übergeht.

Der Erhaltungssatz $T_{ik;}{}^{k} = 0$ führt für (5.3.2) auf die Gleichungen

$$[(\rho + p)u^k]_{;k}\, u_i + (\rho + p)u_{i;k}\, u^k - p_{,i} = 0. \tag{5.3.3}$$

Definieren wir die *konvektive Ableitung* eines beliebigen Tensors durch

$$\dot{T}^{\cdots}_{\cdots} := T^{\cdots}_{\cdots;k}\, u^k. \tag{5.3.4}$$

[13]Siehe z. B. J. Ehlers, „General Relativity and Kinetic Theory" in R. Sachs (1971).

so läßt sich (5.3.3) in die Form

$$\dot{u}_i = \frac{p_{,i}}{\rho + p} - \frac{[(\rho + p)u^k]_{;k}\, u_i}{\rho + p} \tag{5.3.5}$$

bringen. Diese Gleichung hat fast die Form der Euler-Gleichung für eine ideale Flüssigkeit. Es handelt sich bei (5.3.5) allerdings um 4 Gleichungen (die Euler-Gleichungen sind 3 Relationen), und es stört ferner der Term $\propto [(\rho + p)u^k]_{;k}$. Daß dieser Term nicht etwa wegen einer Kontinuitätsgleichung verschwindet, sieht man durch Multiplikation von (5.3.5) mit u^i. Wegen $u_i u^i = 1$, $\dot{u}_i u^i = 0$ ergibt sich

$$\dot{p} = [(\rho + p)u^k]_{;k} \neq 0 \tag{5.3.6}$$

oder

$$\dot{\rho} + (\rho + p)u^k{}_{;k} = 0. \tag{5.3.7}$$

Die Herleitung von (5.3.7) ist der erste Schritt einer systematischen Zerlegung vierdimensionaler Gleichungen in Raum- und Zeitteil, die uns schließlich auch auf die Euler-Gleichungen führen wird. Diese Zerlegung ist möglich, wenn ein zeitartiges Vektorfeld u^i ($u^i u_i = 1$) in der Raumzeit gegeben ist (Beobachterfeld). Dazu definieren wir den Tensor

$$h_{ik} = g_{ik} - u_i u_k, \tag{5.3.8}$$

der die Relationen

$$h_{ik}\, u^k = 0 \tag{5.3.9}$$

$$h_{ik}\, h^k{}_l = h_{il} \tag{5.3.10}$$

$$h_i{}^i = h_{ik}\, h^{ik} = 3 \tag{5.3.11}$$

erfüllt.

h_{ik} ist ein *Projektionsoperator* auf den 3-dimensionalen Unterraum senkrecht zu u^i. So läßt sich z. B. das Linienelement $\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\, \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^k$ in den Zeitteil $\mathrm{d}\tau^2$ und den Raumteil $\mathrm{d}\sigma^2$ aufspalten, wobei

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}\sigma^2, \tag{5.3.12}$$

$$\mathrm{d}\tau^2 = (u_i\, \mathrm{d}x^i)^2, \tag{5.3.13}$$

$$\mathrm{d}\sigma^2 = -h_{ik}\, \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^k. \tag{5.3.14}$$

Dabei ist $\mathrm{d}\tau$ die Eigenzeit eines Teilchens (Beobachters), das sich mit der Geschwindigkeit u^i bewegt, und $\mathrm{d}\sigma$ mißt die räumlichen Abstände im lokalen Ruhsystem des Teilchens. Ähnlich kann der Tensor T_{ik} in die Anteile

$$E = T_{ik}\, u^i u^k, \tag{5.3.15}$$

$$q_i = -T_{lm}\, u^m\, h^l{}_i, \tag{5.3.16}$$

$$\pi_{ik} = T_{lm}\, h^l{}_i\, h^m{}_k \tag{5.3.17}$$

aufgespalten werden, deren Bedeutung in einem System mit $g_{ik} = \eta_{ik}$, $u_i = (1, \mathbf{0})$ (mit u^i mitbewegtes, lokales Inertialsystem) klar wird (Energiedichte, Energiestrom, Spannungstensor).

Ebenso kann die Vektorgleichung (5.3.5) durch Multiplikation mit u^i in ihren Zeitanteil (5.3.7) und mit $h^i{}_l$ in ihren Raumteil

$$\dot{u}_i\, h^i{}_l = \frac{p_{,i}\, h^i{}_l}{\rho + p} \tag{5.3.18}$$

zerlegt werden. (5.3.18) ist die gewünschte *Euler-Gleichung*, wie man durch Übergang zum mitbewegten Inertialsystem $u_i = (1, \mathbf{0})$ sofort sieht.

Nun bleibt nur noch (5.3.7) zu deuten. Es handelt sich dabei um keine Kontinuitätsgleichung der Form $(\rho\, u^k)_{;k} = 0$, da (5.3.7) nur als

$$(\rho\, u^k)_{;k} + p\, u^k_{;k} = 0 \tag{5.3.19}$$

umgeschrieben werden kann. Es ist ja charakteristisch für die relativistische Theorie, daß die Erhaltung der Massendichte ρ nicht unbedingt gelten muß.

Die *Kontinuitätsgleichung* ist keine Konsequenz von (5.3.3), sondern zusätzlich zu postulieren[14]. Sie lautet

$$\boxed{(nu^k)_{;k} = 0,} \tag{5.3.20}$$

wobei $n(x)$ wegen (5.3.19) nicht mit der Massendichte $\rho(x)$ identisch sein kann. Man kann aber für $n(x)$ die *Baryonendichte* benutzen, da die Baryonenzahl, extreme Verhältnisse (siehe Abschnitt 5.9) vielleicht ausgenommen, als konstant angenommen werden darf. Wir definieren daher

$$n(x) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{m}{\Delta V} N(\Delta V),$$

wobei m die Masse eines Nukleons und N die Zahl der Baryonen im Volumen ΔV ist.

Diese Kontinuitätsgleichung kann für normale Materie dienen, während für ein Elektronengas z. B. die Leptonenzahl zu verwenden ist. Für Photonen (Mesonen) dagegen existiert keine Kontinuitätsgleichung, da sie beliebig erzeugt und vernichtet werden können.

Der Zusammenhang zwischen n, p und ρ folgt aus der Zustandsgleichung

[14] Sie wäre aus der kinetischen Theorie herzuleiten.

$$p = p(\rho) \tag{5.3.21}$$

und der Definition des Druckes

$$p = -\frac{\mathrm{d}(\text{Energie pro Baryon})}{\mathrm{d}(\text{Volumen pro Baryon})} = -\frac{\mathrm{d}(\rho/n)}{\mathrm{d}(1/n)} = n\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}n} - \rho \tag{5.3.22}$$

oder

$$p + \rho = n\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}n} =: n\mu, \tag{5.3.23}$$

wobei μ das chemische Potential ist. Wenn die Zustandsgleichung $p(\rho)$ bekannt ist, so kann (5.3.23) integriert werden

$$\int \frac{\mathrm{d}\rho}{p+\rho} = \int \frac{\mathrm{d}n}{n}. \tag{5.3.24}$$

Damit ist auch $n(\rho)$ bekannt.

Die Massendichte ρ unterscheidet sich von der Baryonendichte n durch die *innere Energiedichte* $n\epsilon$ (ϵ ist die spezifische innere Energie, also die innere Energie pro Baryon)

$$\rho = n(1+\epsilon); \tag{5.3.25}$$

ϵ ist negativ, wenn $\rho < n$, wenn also Energie bei der Bildung des Zustandes ρ abgegeben wird (z. B. Bindungsenergie bei Bildung von Atomkernen); ϵ ist positiv, wenn Energie (Kompressionsarbeit) aufgewendet werden muß, um den Zustand mit Dichte ρ herzustellen. (Für nicht wechselwirkende Baryonen wäre $n = \rho$.)

Spezifische Entropie (Entropie pro Baryon) s und *Temperatur* T werden durch die Forderung definiert, daß T der integrierende Nenner der Gleichung

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{T}\left(\mathrm{d}\epsilon + p\,\mathrm{d}\frac{1}{n}\right) \tag{5.3.26}$$

ist, da $v = 1/n$ das spezifische Volumen ist. Die Konstanz der Entropie entlang der Stromlinien einer idealen Flüssigkeit folgt direkt aus (5.3.6):

$$\begin{aligned} \dot{p} &= ((\rho+p)u^k)_{;k} = [(n+\epsilon n+p)u^k]_{;k} \\ &= n\,\epsilon_{;k}\,u^k + p\,u^k{}_{;k} + \dot{p} = n\dot{\epsilon} + p\,u^k{}_{;k} + \dot{p}. \end{aligned} \tag{5.3.27}$$

Division durch n liefert mit $\dot{n} + nu^k{}_{;k} = 0$

$$T\dot{s} = \dot{\epsilon} + p\left(\frac{1}{n}\right)^{\cdot} = 0 \tag{5.3.28}$$

Damit ist auch die letzte aus der Energie-Impuls-Erhaltung folgende Gleichung gedeutet: Im Falle einer idealen Flüssigkeit zeigt sie, daß keine Energie in Wärme übergeht und die Entropie konstant bleibt.

Aufgaben

1. In den Überlegungen des vorigen Abschnittes wäre strenggenommen $p = p(\rho, v)$ zu setzen ($v = 1/n$ ist das spezifische Volumen) bzw. $p = p(\rho, T)$. Welche Änderungen treten dadurch in den Gleichungen (5.3.22 - 28) auf? Unter welchen Bedingungen kann man die Näherung $p = p(\rho)$ verwenden?

2. Zeige, daß für eine nichtideale Flüssigkeit

$$T_{ik} = \rho u_i u_k + (q_i u_k + q_k u_i) + p h_{ik} + \pi_{ik} \tag{5.3.2a}$$

gilt. Dabei hat q_i (5.3.16) die Bedeutung eines Energieflusses relativ zu u^i, und π^{ik} (5.3.17) ist der anisotrope Teil der Druckverteilung. Zerlege die Bewegungsgleichungen $T^{ik}{}_{;k} = 0$ wie zuvor in Raum- und Zeitteil[15].

5.4 Kinematik von Geschwindigkeitsfeldern[1]

In der klassischen Hydrodynamik teilt man die Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen nach Inkompressibilität, Rotationsfreiheit etc. ein. Diese Einteilung wollen wir auch hier herleiten, wobei jeweils auf dreidimensionale Unterräume zu projizieren ist, um die Analogie zur klassischen Physik herzustellen. Wir unterscheiden die einzelnen Flüssigkeitsteilchen (Stromlinien) durch Lagrange-Parameter a^μ ($\mu = 1, 2, 3$). Die Stromlinien sind dann durch

$$x^i = x^i(a^\mu, s) \tag{5.4.1}$$

gegeben, wobei s die Eigenzeit entlang der jeweiligen Stromlinie angibt. Die Geschwindigkeit u^i wird durch

$$u^i = \frac{\partial x^i}{\partial s}, \qquad g_{ik}\, u^i u^k = 1 \tag{5.4.2}$$

gegeben. Aus dem „Verbindungsvektor" δx^i zweier benachbarter Stromlinien (Abbildung 5.2)

$$\delta x^i = \delta a^\mu \frac{\partial x^i}{\partial a^\mu} \tag{5.4.3}$$

erhalten wir durch Anwendung des Projektionsoperators h_{ik} den Raumteil

$$\bar{\delta} x^i := h^i{}_k\, \delta x^k. \tag{5.4.4}$$

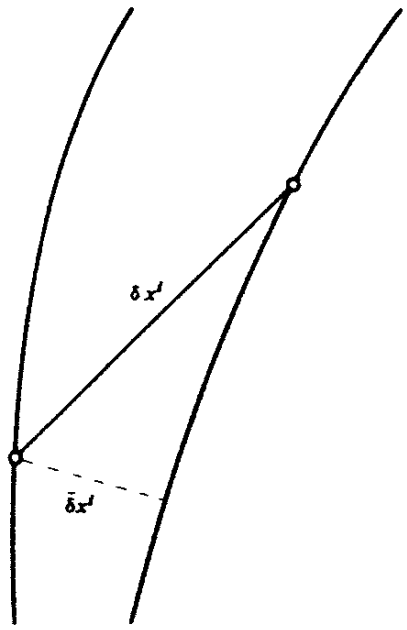

Abbildung 5.2: Abstand von Stromlinien.

Die Kinematik des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung wird durch die zeitliche Änderung von $\bar{\delta} x^i$ bestimmt. Die Relativgeschwindigkeit $\bar{\delta} v^i$ benachbarter Teilchen (Galaxien) ist der räumliche Teil der Zeitableitung von $\bar{\delta} x^i$:

$$\bar{\delta} v^i := h^i{}_k \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s} \bar{\delta} x^k = h^i{}_k \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s} h^k{}_l \, \delta x^l = h^i{}_k \, \delta x^l \frac{\mathrm{D} h^k{}_l}{\mathrm{d}s} + h^i{}_k \, h^k{}_l \frac{\mathrm{D} \delta x^l}{\mathrm{d}s}. \tag{5.4.5}$$

Es ist aber

$$\frac{\mathrm{D} h^k{}_l}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D} \delta^k{}_l}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{D}(u^k u_l)}{\mathrm{d}s} = -u_l \frac{\mathrm{D} u^k}{\mathrm{d}s} - u^k \frac{\mathrm{D} u_l}{\mathrm{d}s}$$

und daher

$$\bar{\delta} v^i = h^i{}_l \frac{\mathrm{D} \delta x^l}{\mathrm{d}s} - h^i{}_k \, u_l \, \delta x^l \frac{\mathrm{D} u^k}{\mathrm{d}s}. \tag{5.4.6}$$

Der zweite Term von (5.4.6) ist nur bei nichtgeodätischen Bewegungen von Bedeutung. Mit

$$\frac{\mathrm{D} \delta x^l}{\mathrm{d}s} =: \delta u^l = u^l{}_{;m} \, \delta x^m \tag{5.4.7}$$

folgt weiter

$$\bar{\delta} v^i = h^i{}_l \, u^l{}_{;m} \, \delta x^m - h^i{}_k \, u_l \, \delta x^l \, u^k{}_{;m} \, u^m = h^i{}_l \, u^l{}_{;m} \, \bar{\delta} x^m = v^i{}_m \, \bar{\delta} x^m. \tag{5.4.8}$$

[15] Siehe dazu G. F. R. Ellis. in R. Sachs (1971)

Dabei ist

$$v^i{}_m := h^i{}_k\, h^n{}_m\, u^k{}_{;n} = u^i{}_{;m} - \dot{u}^i u_m \tag{5.4.9}$$

der räumlich projizierte Teil des Geschwindigkeitsgradientenfeldes, der in üblicher Weise in seine irreduziblen Bestandteile zerlegt werden kann:

$$v_{im} = \omega_{im} + \sigma_{im} + \tfrac{1}{3}\, h_{im}\theta, \tag{5.4.10}$$

wobei

$$\omega_{im} := \tfrac{1}{2}(v_{im} - v_{mi}), \quad \sigma_{im} := \tfrac{1}{2}(v_{im} + v_{mi}) - \tfrac{1}{3}\theta h_{im}, \quad \theta := v^i{}_i \tag{5.4.11, 12, 13}$$

die *Rotation, Scherung und Dilatation* des Geschwindigkeitsfeldes angeben. Die Terminologie entspricht genau derjenigen der klassischen Hydrodynamik, wie in den Übungsaufgaben gezeigt wird.

Die Volumdilatation θ gibt die Veränderung des mittleren Abstandes $\mathcal{R}$ zweier Teilchen (Galaxien) (gemittelt über alle Richtungen) an:

$$\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = \frac{1}{3}\theta, \tag{5.4.14}$$

während die Skalare

$$\omega^2 := \tfrac{1}{2}\,\omega^{im}\omega_{im}, \qquad \sigma^2 := \tfrac{1}{2}\,\sigma^{im}\sigma_{im} \tag{5.4.15, 16}$$

die Größe von Rotation und Scherung beschreiben.

Aufgaben

1. Der Abstand zweier benachbarter Galaxien sei durch $\delta x^i = \mathcal{R} n^i$, $n^i n_i = -1$ gegeben. Zeige, daß

$$\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = \sigma_{ab}\, n^a\, n^b + \frac{1}{3}\theta \tag{5.4.17}$$

und daß nach Mittelung über alle Richtungen n^a wegen $\sigma_{ab}h^{ab} = 0$

$$\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = \frac{1}{3}\theta \quad \text{(Mittel)} \tag{5.4.18}$$

folgt; θ ist daher die Volumsexpansion.

2. Zeige, daß

$$h_a{}^b \dot{n}_b = [\omega_a{}^b + \sigma_a{}^b - \sigma_{cd}\, n^c\, n^d\, h_a{}^b]\, n_b. \tag{5.4.19}$$

(5.4.19) gibt die Richtungsänderung des Abstandes n^a in bezug auf *Fermi-verschobene Einheitsrichtungen* e^a, $h_a{}^b \dot{e}_b = 0$, an, die $e^a e_a = -1$, $e^a u_a = 0$ erfüllen.

3. Zeige, daß ω_{ab} durch den zu u_a orthogonalen *Wirbelvektor*

$$\omega^a := \frac{1}{2}\,\epsilon^{abcd}\,u_b\,\omega_{cd} \tag{5.4.20}$$

ausgedrückt werden kann, wobei $\omega^2 = -\omega^a\omega_a$ gilt.

5.5 Friedmann-Universum I: Kosmische Hintergrundstrahlung und thermische Entwicklung

Im Abschnitt 5.3 haben wir uns mit der relativistischen Hydrodynamik beschäftigt und die Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit in einer gegebenen Metrik g_{ik} untersucht. Diese Bewegungsgleichungen sind nun durch die Einsteinschen Feldgleichungen zu ergänzen, die die Rückwirkung der Flüssigkeit auf die Raumstruktur angeben.

Das entstehende gekoppelte Gleichungssystem ist allerdings nur unter sehr vereinfachenden Annahmen lösbar. Es lassen sich aber doch, ausgehend von der für einen beliebigen Vektor u^i gültigen Gleichung (2.7.1)

$$u_{a;d;c} - u_{a;c;d} = R_{abcd}\,u^b. \tag{2.7.1}$$

einige allgemeine Aussagen machen, die einen gewissen Einblick in komplexe Weltmodelle erlauben.

Kontrahiert man (2.7.1) mit $g^{ad}u^c$, ergibt sich

$$(u^a{}_{;a})^{\cdot} - (u^a{}_{;c})_{;a}u^c = R_{cd}u^d u^c \tag{5.5.1}$$

oder, mit (5.4.9),

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\,\theta^2 - \dot{u}^a_{;a} + 2(\sigma^2 - \omega^2) = R_{cd}\,u^c u^d. \tag{5.5.2}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen (3.1.2) können nun benutzt werden, um (5.5.2) weiter zu vereinfachen. Dabei setzt man üblicherweise nicht einfach den Energie-Impuls-Tensor (5.3.2) auf der rechten Seite der Feldgleichung ein, sondern berücksichtigt auch noch eine mögliche Energie-Impuls-Dichte des Vakuums[16], die durch die *kosmologische Konstante* Λ ausgedrückt wird. Die Begründung für die mögliche Existenz eines derartigen Terms ist kurz folgende: Mechanik und Feldtheorie bestimmen nur Energieunterschiede, aber nicht den Absolutwert der Energiedichte eines Systems. Die ausschließlich in der Gravitationstheorie benötigten Absolutwerte erhält man nur, wenn man dem Vakuum,

[16] Siehe z. B. Henley u. Thirring (1975), und etwa die Artikel von S. Weinberg und E. Witten in Cline (2001) wegen neuerer Spekulationen zu diesem Thema.

also dem leeren Raum, willkürlich eine Energiedichte zuschreibt, die man meist zu Null wählt.

Die Quantenfeldtheorie zeigt aber, daß Fluktuationen (Erzeugung und Wiedervernichtung virtueller Teilchenpaare) zu einem nichtverschwindenden Energie-Impuls-Tensor T^V_{ik} des Vakuums führen könnten. Bei Lorentzinvarianz des Vakuums kann T^V_{ik} nur die Form

$$T^V_{ik} = \frac{\Lambda}{\kappa} g_{ik} \tag{5.5.3}$$

haben, wobei die Konstante Λ/κ die Energiedichte des Vakuums angibt. (5.5.3) ist offensichtlich ein erhaltener Tensor, der zur Energiedichte T_{ik} der Materie hinzugefügt werden kann. Die heutigen theoretischen Ansätze (vgl. etwa P. C. W. Davies in Held (1980), Vol. 1) zur Berechnung von T^V_{ik} reichen noch nicht zur eindeutigen Bestimmung von Λ/κ aus, zeigen aber auch, daß T^V_{ik} Zusatzbeiträge enthält, die u.a. von der durch Gezeitenkräfte (Riemanntensor!) hervorgerufenen Störung der lokalen Lorentzinvarianz kommen und die Theorie sogar qualitativ ändern können.[17] Wir betrachten deshalb hier wie ursprünglich Einstein (5.5.3) als phänomenologischen Term mit zunächst unbestimmtem Λ/κ . Experimentell ergeben sich Schranken daraus, daß die Energiedichte des Vakuums die beobachtete mittlere Massendichte des Universums ($\rho = 10^{-30}\,\mathrm{g/cm^3}$) nicht wesentlich überschreiten kann. Daher ist der Λ-Term in den *erweiterten Feldgleichungen*

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa \left(T_{ik} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{ik} \right) . \tag{5.5.4}$$

$$R_{ik} = -\kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T - \frac{\Lambda}{\kappa} g_{ik} \right) \tag{5.5.4a}$$

auch nur in der Kosmologie zu berücksichtigen, während er sonst gegen den Energie-Impuls-Tensor T_{ik} der Materie vernachlässigt werden kann.

Einsetzen von (5.3.2) und (5.5.4a) in (5.5.2) liefert die *Raychaudhuri-Gleichung*

$$\boxed{\dot\theta + \tfrac{1}{3}\theta^2 - \dot u^a_{;a} + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \tfrac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) - \Lambda = 0} \tag{5.5.5}$$

oder, mit (5.4.14),

$$\frac{3\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = 2(\omega^2 - \sigma^2) + \dot u^a_{;a} - \frac{\kappa}{2}(\rho + 3p) + \Lambda . \tag{5.5.6}$$

Eine weitere Relation können wir aus (2.7.1) durch Multiplikation mit $g^{dk} h^{ca}$ gewinnen:

[17] Vgl. etwa M. Gießwein, R. U. Sexl, E. Streeruwitz, Phys. Lett. **52B**, 442 (1974); Acta Phys. Austr. **41**, 41 (1975).

$$h^k{}_b\left(\omega^{bc}{}_{;c} - \sigma^{bc}{}_{;c} + \tfrac{2}{3}\theta^{;b}\right) + (\omega^k{}_b + \sigma^k{}_b)\dot{u}^b = 0. \tag{5.5.7}$$

(5.5.6) und (5.5.7) enthalten noch nicht die vollständige Dynamik der Feldgleichungen, die aber durch weitere Multiplikation mit Projektionsoperatoren und durch Berücksichtigung der Erhaltungssätze systematisch in ähnliche Form gebracht werden kann[18]. Die entstehenden Gleichungen sind allerdings zu komplex, um ohne vereinfachende Annahmen gelöst werden zu können. Wir konzentrieren uns daher auf die *Friedmann-Modelle* die um jeden Punkt räumlich isotrop sind, d. h., für die

$$h_a{}^b\,\rho_{,b} = h_a{}^b\,p_{,b} = h_a{}^b\,u_{,b} = 0 \tag{5.5.8}$$

gilt und ferner

$$\sigma_{ab} = \omega_{ab} = 0. \tag{5.5.9}$$

(5.5.8) und (5.5.9) sind direkt physikalisch einsichtig und folgen daraus, daß der einzige rotationsinvariante Vektor der Nullvektor ist und nur der Tensor h_{ik} die erforderliche Rotationssymmetrie aufweist. (5.5.8) und (5.3.18) implizieren

$$\dot{u}^i = 0. \tag{5.5.10}$$

Damit vereinfacht sich (5.5.6) zu

$$\frac{3\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = \Lambda - \frac{\kappa}{2}(\rho + 3p), \tag{5.5.11}$$

während aus (5.5.7, 9) die Homogenität der Expansion $h^a{}_b\theta^{;b} = 0$ resultiert. Das Friedmann-Universum expandiert folglich in jedem Punkt gleich schnell.

(5.5.11) enthält die Dynamik der Friedmann-Modelle, wobei das zeitliche Verhalten von ρ und p aus (5.3.7) folgt. Wegen (5.5.10) ist $u^i{}_{;i} = v^i{}_i = \theta = 3\dot{\mathcal{R}}/\mathcal{R}$ und daher

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = 0 \tag{5.5.12}$$

oder

$$(\rho\mathcal{R}^3)^{\cdot} + p(\mathcal{R}^3)^{\cdot} = 0. \tag{5.5.13}$$

während der Erhaltungssatz (5.3.20) zu

$$(n\mathcal{R}^3)^{\cdot} = 0, \qquad n \propto 1/\mathcal{R}^3 \tag{5.5.14}$$

führt. Für das heutige Universum ist $p/c^2 \ll \rho$ (der Druck kann gegen die Massendichte vernachlässigt werden) und daher

[18] Systematisch ist dies bei G. F. R. Ellis in R. Sachs (1971) durchgeführt

$$n \approx \rho \approx \mathcal{M}/\mathcal{R}^3, \tag{5.5.15}$$

wobei $\mathcal{M}$ eine Konstante ist. In dieser Näherung wird (5.5.11) mit der Newtonschen Gleichung (5.2.13) identisch.

Für ein von *elektromagnetischer Strahlung* (oder von Neutrinos oder anderen masselosen Teilchen) erfülltes Universum ist dagegen

$$p = \rho/3, \tag{5.5.16}$$

und folglich wird (5.5.12)

$$\dot{\rho} + 4\rho\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = 0, \qquad \rho \propto 1/\mathcal{R}^4. \tag{5.5.17}$$

Bei der Expansion des Friedmann-Universums verringert sich daher die Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung schneller als die Materiedichte. Der Grund dafür ist, daß die Photonendichte (wie die Baryonendichte n) wie $1/\mathcal{R}^3$ abnimmt, die Photonen aber außerdem rotverschoben werden und ihre Wellenlänge $\lambda \propto \mathcal{R}$ ist.

Auch das *thermische Verhalten* von Materie und (schwarzer) Strahlung kann man aus (5.5.12) herleiten. Für schwarze *Strahlung* ist die Energiedichte $\rho \propto T^4$, und wegen $\rho \propto 1/\mathcal{R}^4$ gilt

$$T \propto 1/\mathcal{R}. \tag{5.5.18}$$

Ist ein expandierendes Universum von Strahlung erfüllt, so kühlt es bei der Expansion umgekehrt zu seiner Ausdehnung ab.

Für *Materie* (ideales Gas) gilt dagegen

$$p = \alpha n^\gamma, \qquad T = \beta\frac{p}{n} = \beta p v, \tag{5.5.19}$$

wobei α, β, γ Konstante sind. Aus (5.5.19) folgt $T \propto n^{\gamma-1}$ und mit (5.5.14)

$$T \propto \frac{1}{\mathcal{R}^{3(\gamma-1)}}. \tag{5.5.20}$$

Für ein einatomiges Gas ($\gamma = 5/3$) ist

$$T \propto 1/\mathcal{R}^2. \tag{5.5.21}$$

Die Kenntnis des thermischen Verhaltens der Strahlung und der Materie ermöglicht es, die thermische Geschichte des Universums nachzuzeichnen. Allerdings ist in (5.5.18) bzw. (5.5.21) noch ein unbekannter Proportionalitätsfaktor enthalten, der experimentell zu bestimmen ist. Dies ist 1965 Penzias und Wilson

durch die (zufällige) Entdeckung der *kosmischen Hintergrundstrahlung* gelungen[19]. Sie zeigten, daß eine isotrope elektromagnetische Strahlung das Weltall erfüllt, die sich später als schwarze Strahlung mit einer Temperatur von 2.7 K herausstellte. Ihr Spektrum ist in Abbildung 5.3 gezeigt (nach J. C. Mather et al., Astrophys. J. **354**, L37 (1990)).

Bereits zuvor hatten R. Dicke und seine Mitarbeiter[1] in Princeton an einer Antennenanlage gearbeitet, um gerade die Strahlung zu messen, die nach dem Gesetz (5.5.18) von einem frühen, sehr heißen Zustand des Universums übriggeblieben sein könnte[20]. Es wurde sehr bald klar, daß es Penzias und Wilson tatsächlich geglückt war, diese kosmische Hintergrundstrahlung zu messen. Von besonderer Bedeutung für diese Interpretation der Strahlung ist vor allem der hohe Grad ihrer Isotropie.[21] Bei einer Winkelauflösung von 1° wurden Energieschwankungen gemessen, die einer Temperaturvariation $\Delta T/T < 2 \cdot 10^{-3}$ entsprechen. Die Strahlung kann demnach nicht von diskreten Quellen herrühren. Auch würden Radiogalaxien, die bei diesen Wellenlängen zunächst als Quellen in Betracht kämen, nur 1% der gemessenen Intensität der Strahlung liefern. Diese Tatsachen weisen auf einen kosmischen Ursprung der Strahlung hin[22]. Wir wollen hier nicht weiter auf die experimentellen Aspekte der Strahlung eingehen, sondern uns der aus ihrer Existenz folgenden thermischen Geschichte des Universums zuwenden.

In Abbildung 5.4 ist die Temperatur der Strahlung als Funktion von $\mathcal{R}$ nach (5.5.18) aufgetragen. Wenn wir die Geschichte des Universums zurückverfolgen, so wird die Strahlung nach $T \propto 1/\mathcal{R}$ immer heißer, aber auch die Materie ($T \propto 1/\mathcal{R}^2$). Bei etwa 3000 K ist schließlich die Materie ionisiert und wird damit undurchdringlich für Strahlung. Streuung von Strahlung und Materie führt bei allen höheren Temperaturen zu thermischem Gleichgewicht von Strahlung und Materie, während nichtionisierte Materie transparent für Strahlung ist und bei $T < 3000\,\mathrm{K}$ die in Abbildung 5.4 gezeigte Entkopplung von Strahlung und Materie eintritt, die dann unabhängigen Gesetzen (5.5.18) bzw. (5.5.21) gehorchen. Für $T > 3000\,\mathrm{K}$ wird das thermische Verhalten dagegen durch die Strahlung dominiert (das Verhältnis der Zahl der Photonen zu jener der Atome

[19] A. A. Penzias, R. H. Wilson, Astrophys. Journ. **142**, 419 (1965). R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, D. T. Wilkinson, Astrophys. Journ. **142**, 414 (1965).

[20] Die kosmische Hintergrundstrahlung wurde von R. A. Alpher und R. Herman, Nature **162**, 774 (1948); Phys. Rev. **75**, 1089 (1949) vorhergesagt. Sie schätzten ihre Temperatur auf 5 K.

[21] 1977 konnte die von der Eigenbewegung unseres Galaxienhaufens in dem durch die Hintergrundstrahlung definierten kosmischen „Äther" herrührende Dipol-Anisotropie nachgewiesen werden. Darüberhinaus wurden 1992 durch den Satelliten COBE (Cosmic Background Explorer), von dem auch die in Abbildung 5.3 gezeigte Meßkurve stammt, erstmals Anisotropien $\Delta T/T \approx 5 \cdot 10^{-6}$ erkennbar, die kosmischen Strukturbildungen – Abweichungen von der Homogenität – zur Zeit der Freisetzung der Strahlung entsprechen könnten. Siehe J. C. Mather et al. in Gleiser (1993). Zu neueren Messungen und ihren Konsequenzen siehe Abschnitt 5.7.

[22] Andere Erklärungen wurden z. B. von D. Layzer, R. Hiverly, Ap. J. **179**, 361 (1973) versucht.

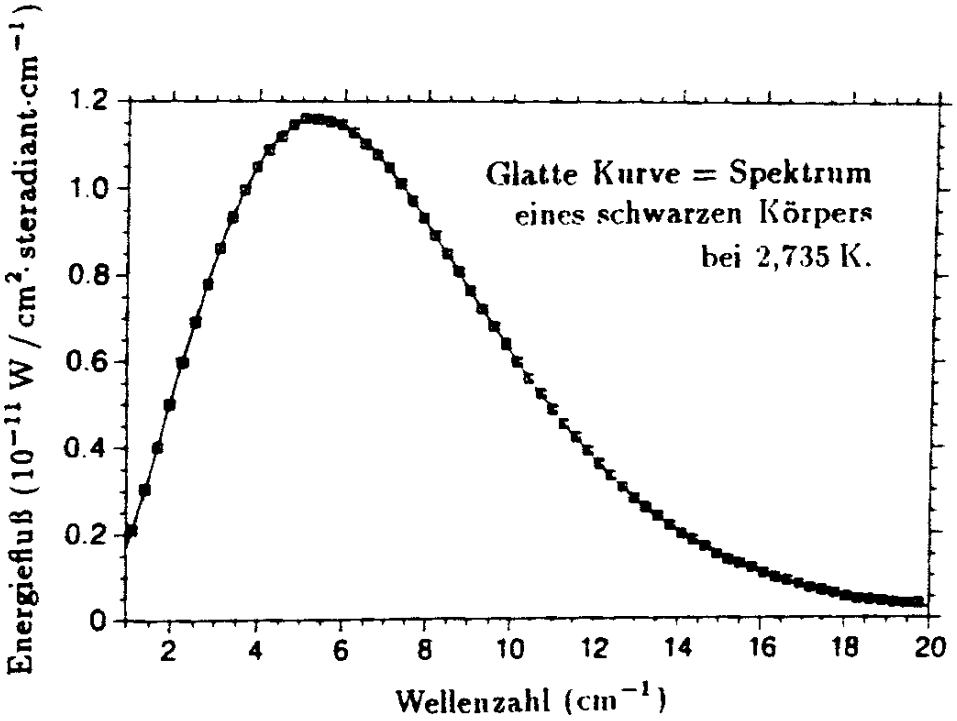

Abbildung 5.3: Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung („CBR").

ist etwa $10^{9\pm1}$), so daß für $T > 3000\,\mathrm{K}$ die Temperatur $\propto 1/\mathcal{R}$ ist.

Die der Strahlung derzeit entsprechende Massendichte ist

$$\rho_{s_0} = aT^4 = 4.5 \cdot 10^{-34}\mathrm{g/cm}^3. \tag{5.5.22}$$

($a = 8.4 \cdot 10^{-36}\mathrm{g\,cm}^{-3}K^{-4}$), während die Materie derzeit eine Dichte von etwa

$$\rho_{m_0} \approx 10^{-30}\mathrm{g/cm}^3 \tag{5.5.23}$$

aufweist. Strahlungsdichte und Strahlungsdruck können somit in der jetzigen Phase des Universums vernachlässigt werden. Da aber $\rho_m \propto \mathcal{R}^{-3}$, während $\rho_s \propto \mathcal{R}^{-4}$, wird $\rho_m = \rho_s$ für $\mathcal{R} = 10^{-3}\mathcal{R}_0$, also etwa zur Zeit der Entkopplung von Materie und Strahlung. Für noch kleinere Radien dominiert die Strahlung. Für $\mathcal{R} = 10^{-7}\mathcal{R}_0$ erreicht T den Wert $3 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$, wo Kernreaktionen einsetzen. Diese wichtige Phase in der Entwicklung des Kosmos soll im Kapitel 5.9 besprochen werden.

Die Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung ergibt überdies die besten Limiten für die Werte von σ und ω. Während aus direkten Beobachtungen von Galaxien nur[23] $\omega_0 \leq \frac{1}{3}\theta_0$, $\sigma_0 \leq \frac{1}{4}\theta_0$ folgt, läßt die Isotropie der Hintergrundstrahlung auf $\omega_0 < 10^{-3}\theta_0$, $\sigma_0 < 10^{-3}\theta_0$ schließen[24].

[23] J. Kristian, R. K. Sachs, Astrophys. J. **143**, 379 (1966).
[24] K. S. Thorne, Astrophys. J. **148**, 51 (1967).

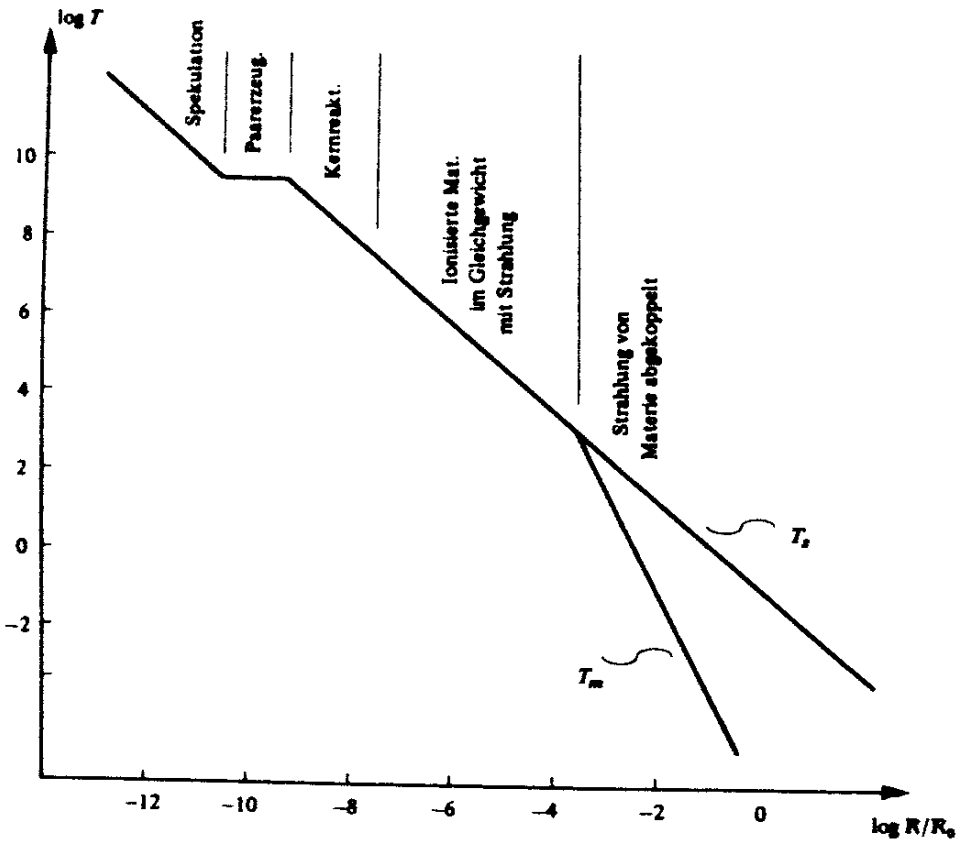

Abbildung 5.4: Thermische Geschichte des Universums.

5.6 Friedmann-Universum II: Raumkrümmung und Nebelzählung

Die Überlegungen des vorigen Abschnittes haben es uns ermöglicht, einige Aussagen über die Dynamik und das thermische Verhalten eines Friedmann-Universums zu machen. Wir wollen nun die Einsteinschen Feldgleichungen für die isotropen homogenen Weltmodelle exakt lösen.

Dazu müssen wir zunächst das Koordinatensystem festlegen. Es erweist sich als günstig, in einem mitbewegten Koordinatensystem zu arbeiten und die Lagrange-Parameter a^μ als räumliche Koordinaten $x^\mu = a^\mu$ zu benutzen. Die Eigenzeit s entlang der Weltlinien kann als Zeitkoordinate $x^0 = t = s$ dienen. Die Stromlinien werden dadurch selbst zu Koordinatenlinien.

In diesem Koordinatensystem ist $u^i = (1, \mathbf{0})$, und aus $u_i u^i = 1$ folgt

$$u^i u_i = g_{ik}\, u^i u^k = g_{00} = 1. \tag{5.6.1}$$

Aus der Rotationsfreiheit der Friedmann-Universen

$$\omega_{ik} = 0 = u_{i,k} - u_{k,i} = g_{i0,k} - g_{k0,i} = 0 \tag{5.6.2}$$

folgt für $i, k = \mu, \nu$ (räumliche Indizes, $\phi(x)$ ist irgendeine Funktion)

$$g_{0\mu,\nu} = g_{0\nu,\mu} \Rightarrow g_{0\mu} = \phi(x)_{,\mu}. \tag{5.6.3}$$

Für $i = 0$, $k = \mu$ ergibt (5.6.2) dagegen $g_{0\mu,0} = 0$, so daß $\phi = \phi(x^\alpha)$. Durch die Koordinatentransformation

$$x^\mu \to x^\mu, \qquad x^0 \to x^0 + \phi(x^\mu) \tag{5.6.4}$$

erreicht man $g_{0\mu} = 0$, wobei $u^i = (1, \mathbf{0})$ erhalten bleibt. Das Linienelement ist damit auf

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 + g_{\alpha\beta}(x)\,\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \tag{5.6.5}$$

eingeschränkt.

Man kann ferner zeigen[25], daß die Bedingung $\sigma_{ik} = 0$ (5.6.5) weiter festlegt:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 + \mathcal{R}^2(t, x^\rho)\,\gamma_{\mu\nu}(x^\rho)\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{5.6.6}$$

(siehe Übungsaufgabe), und die Feldgleichungen erlauben dann, $\gamma_{\mu\nu}$ und $\mathcal{R}^2$ zu berechnen.

Zunächst folgt, daß der Raum für $t = \text{const.}$ von konstanter Krümmung sein muß. (Wir hätten also auch gleich von einer zwar weniger physikalischen, aber doch plausiblen Isotropie*forderung* an die *Geometrie* ausgehen können.) Sein Linienelement ist daher nach (2.8.10)

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathcal{R}^2 \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 \right], \tag{5.6.7}$$

wobei $k = \pm 1, 0$. Setzt man dies in (5.6.5) ein, so ergibt sich das *Robertson-Walker-Linienelement*

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathcal{R}^2(t) \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 \right].} \tag{5.6.8}$$

Dabei kann $\mathcal{R}$ von t abhängen, d. h., der isotrope Raum kann im Laufe der Zeit expandieren oder kontrahieren. Zunächst wollen wir die geometrische Bedeutung des Robertson-Walker-Linienelements untersuchen.

Für $k = 0$ ist (5.6.7) offenbar das Linienelement eines unendlich ausgedehnten Euklidischen Raumes[26]. Die Schnitte $\theta = \pi/2$ sind Ebenen.

Für $k = 1$ liegt (lokal) das Linienelement einer Hyperkugel vor, also einer dreidimensionalen Kugel, die in einem vierdimensionalen Euklidischen Raum

[25] Beweis etwa bei G. F. R. Ellis in R. Sachs (1971).

[26] Wir sehen hier von allen topologischen Fragen ab. Im Prinzip kann auch der Euklidische Raum durch Periodizitätsforderungen (Beispiel: Normierungsvolumen der Quantenmechanik!) endlich gemacht werden. Ebenso sind in den Fällen $k = \pm 1$ andere topologische Zusammenhänge („Clifford-Kleinsche Raumformen") möglich. Siehe dazu M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet, Phys. Rep. **254**, 135 (1995).

eingebettet werden kann (Übungsaufgabe). In $r = 1$ tritt eine Koordinatensingularität auf, die analog zu der Situation auf der 2-dimensionalen Kugeloberfläche ist.

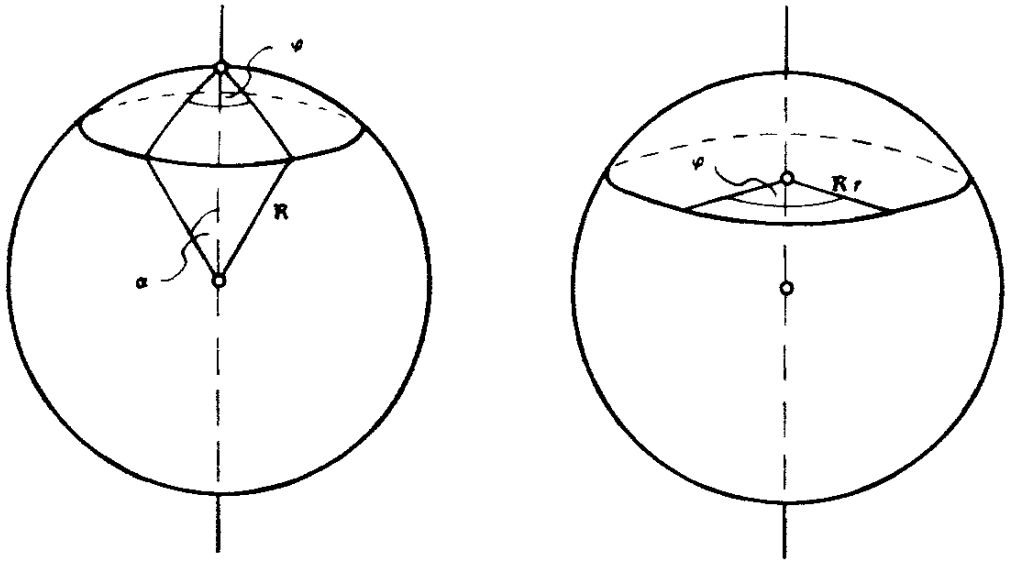

Abbildung 5.5: Koordinatensysteme auf der Kugel.

Abbildung 5.5 zeigt zwei mögliche Koordinatensysteme auf der Kugel. In b) ist die Koordinate r $(0 \leq r \leq 1)$ so gewählt, daß der Umfang eines Kreises $r = \text{const.}$ gerade $2\pi\mathcal{R}r$ wird, während in a) Polarkoordinaten auf der Kugel gewählt sind. Das Linienelement wird wegen $r = \sin\alpha$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathcal{R}^2(\sin^2\alpha\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}\alpha^2) = \mathcal{R}^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2} + r^2\,\mathrm{d}\phi^2\right). \qquad (5.6.9a, b)$$

Auch in b) tritt die Singularität in $r = 1$ auf, die sich nun klar als Koordinatensingularität erweist und in (5.6.9a) nicht vorhanden ist. Ferner ist ersichtlich, daß zu einem Wert von r *zwei* Punkte der vollständigen Kugelfläche gehören.

Der Vergleich von (5.6.9b) mit (5.6.7) zeigt, daß die Schnitte $\theta = \pi/2$ für $k = 1$ Kugeln mit Radius $\mathcal{R}$ sind, die den Schnittebenen des Modells mit $k = 0$ entsprechen. Diese Tatsache läßt vermuten, daß der Raum mit $k = 1$ *endliches Volumen* hat, und tatsächlich ist sein Gesamtvolumen durch

$$V = 2\int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{\mathcal{R}^3}{\sqrt{1-r^2}}\, r^2 \sin\theta = 2\pi^2\mathcal{R}^3 \qquad (5.6.10)$$

gegeben, wobei der Faktor 2 anzubringen war, weil wieder zu einem Wert von $r < 1$ zwei Punkte der vollständigen Hyperkugel gehören. (5.6.7) ist daher für $k = 1$ das Linienelement eines endlich ausgedehnten, aber doch unbegrenzten Weltalls. Die Erkenntnis dieser Möglichkeit war eine der wesentlichsten Lei-

stungen der allgemeinen Relativitätstheorie[27].

Das endliche Volumen des Weltalls kann auch noch anders veranschaulicht werden. Schreiben wir das Linienelement (5.6.7) durch Einführung der Koordinate $r = \sin\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, in eine Form analog zu (5.6.9a) um:

$$d\sigma^2 = \mathcal{R}^2[d\alpha^2 + \sin^2\alpha\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{5.6.11}$$

so ist der Radius D einer Kugelschale um den Punkt $\alpha = 0$ durch $D = \mathcal{R}\int_0^\alpha d\alpha = \mathcal{R}\alpha$ gegeben, während die Oberfläche A der Kugelschale durch

$$A = 4\pi\mathcal{R}^2\sin^2\alpha = 4\pi\mathcal{R}^2\sin^2\left(\frac{D}{\mathcal{R}}\right) \tag{5.6.12}$$

gegeben ist. Bei zunehmender Distanz D nimmt A zunächst bis zum maximalen Wert $A = 4\pi\mathcal{R}^2$ zu (für $D = \pi/2 \cdot \mathcal{R}$), der wesentlich kleiner ist als die Oberfläche einer Kugel ($A = \pi^3\mathcal{R}^2$) mit gleichem Radius im Euklidischen Raum. Für $D > \pi\mathcal{R}/2$ nimmt A wieder ab, um schließlich für $D = \pi\mathcal{R}$ auf $A = 0$ abzusinken.

Für $k = -1$ tritt keine Koordinatensingularität auf, und r erstreckt sich über den Bereich $0 \leq r < \infty$. Die Fläche A einer Kugel mit Radius D kann auch hier zur Veranschaulichung der Geometrie herangezogen werden. Die Substitution $r = \sinh\alpha$ bringt (5.6.7) für $k = -1$ auf eine Form analog zu (5.6.11)

$$d\sigma^2 = \mathcal{R}^2\left[d\alpha^2 + \sinh^2\alpha\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right]. \tag{5.6.13}$$

Wieder ist $D = \mathcal{R}\alpha$, aber

$$A = 4\pi\mathcal{R}^2\sinh^2\left(\frac{D}{\mathcal{R}}\right). \tag{5.6.14}$$

In Abbildung 5.6 ist A für $k = \pm 1, 0$ aufgetragen.

Die Abhängigkeit der Kugelfläche von der Entfernung kann im Prinzip zur empirischen Bestimmung der Konstanten k herangezogen werden. Dazu muß – bei Annahme gleichmäßiger Verteilung und Helligkeit der Galaxien (die früher, als sie optisch noch nicht aufgelöst werden konnten, als „Nebel" bezeichnet wurden) – die Zahl der Galaxien als Funktion der scheinbaren Helligkeit ermittelt werden. Da der die Erde von einer Galaxis erreichende Strahlungsfluß $S \propto R^{-2}$ ist und im Euklidischen Raum eine Anzahl von Galaxien $N \propto R^3$ mit Strahlungsfluß größer als S (Entfernung $< R$) zu erwarten ist, lassen Abweichungen von $N \propto S^{-3/2}$ auf $k \neq 0$ schließen.

Die Fülle der notwendigen Korrekturen (Expansion des Universums und dadurch bedingte Rotverschiebung, Evolutionseffekte etc.) hat jedoch bisher

[27] Tatsächlich war diese Möglichkeit – völlig außerhalb des Rahmens der allgemeinen Relativitätstheorie – bereits im Jahre 1900 von K. Schwarzschild erwogen worden.

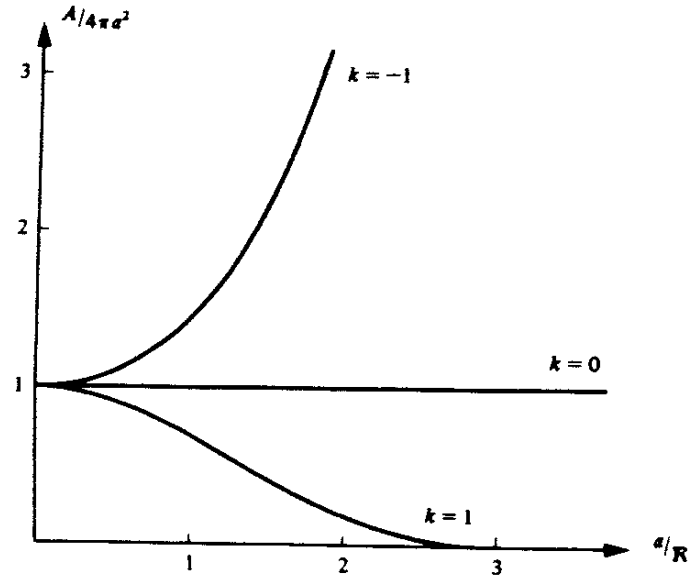

Abbildung 5.6: Kugelfläche als Funktion des Radius für $k = \pm 1, 0$.

die Bestimmung von k auf diesem Weg verhindert, obwohl das Beobachtungsmaterial, besonders über Radiogalaxien, umfangreich ist[28].

Aufgaben

1. Zeige, daß aus $\omega_{ik} = \sigma_{ik} = 0$ die Form (5.6.6) des Linienelementes folgt.

2. Im Hilfsraum $\mathbf{R}_4$ mit Euklidischem bzw. Minkowskischem Linienelement

$$d\sigma^2 = \sum_{i=1}^{4} dx_i^2 \qquad \text{bzw.} \qquad d\sigma^2 = -\eta_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

sei eine Sphäre bzw. Pseudosphäre durch $\sum x_i^2 = \mathcal{R}^2$ bzw. $\eta_{ik}\, x_i\, x_k = \mathcal{R}^2$ gegeben. Zeige, daß ihr Linienelement durch (5.6.11, 13) bestimmt ist. *Anleitung:* Setze $x_4 = \mathcal{R}\cos\alpha$, $x_3 = \mathcal{R}\sin\alpha\cos\phi$, $x_2 = \mathcal{R}\sin\alpha\sin\phi\cos\theta$, $x_1 = \mathcal{R}\sin\alpha\sin\theta\sin\phi$, bzw. $\cos\alpha \to \cosh\alpha$, $\sin\alpha \to \sinh\alpha$.

5.7 Friedmann-Universum III: Zeitentwicklung

In den bisherigen Überlegungen wurden die Einsteinschen Feldgleichungen noch nicht in ihrem vollen Informationsgehalt ausgenutzt. Setzt man das Robertson-Walker-Linienelement (5.6.8) in die Feldgleichungen ein, so zeigt sich, daß die meisten identisch erfüllt sind und nur zwei Gleichungen übrigbleiben[29]:

[28] Eine kritische Analyse der Daten und Literaturangaben sind in K. Brecher, G. Burbidge, P. A. Strittmatter, Comm. on Astrophysics and Space Physics **3**, 99 (1971) enthalten.
[29] Die Details dieser Rechnung sind im Kapitel 7 angegeben.

$$\kappa\rho + \Lambda = 3\,\frac{k + \dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2}, \qquad \kappa p - \Lambda = -\,\frac{2\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} + \dot{\mathcal{R}}^2 + k}{\mathcal{R}^2}. \tag{5.7.1, 2}$$

Diese beiden Differentialgleichungen reichen zusammen mit der Zustandsgleichung aus, um $p(t)$, $\rho(t)$, $\mathcal{R}(t)$ zu bestimmen.

Multipliziert man (5.7.2) mit 3 und addiert das Resultat zu (5.7.1), so ergibt sich

$$\kappa(3p + \rho) = 2\Lambda - \frac{6\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}}. \tag{5.7.3}$$

(5.7.3) stimmt mit der auf Friedmann-Modelle spezialisierten Raychaudhuri-Gleichung (5.5.11) und, für $p = 0$, auch mit der Newtonschen Gleichung (5.2.13) überein, wenn man den Erhaltungssatz $\rho\mathcal{R}^3 = \text{const.}$ berücksichtigt.

Auch den (allerdings durch Druckterme modifizierten) Erhaltungssatz können wir aus (5.7.1,2) ableiten. Multiplizieren wir (5.7.1) mit $\mathcal{R}^3$ und bilden die Zeitableitung, so wird

$$\kappa(\rho\mathcal{R}^3)^{\cdot} = -\Lambda(\mathcal{R}^3)^{\cdot} + 3k\dot{\mathcal{R}} + 3\dot{\mathcal{R}}^3 + 6\ddot{\mathcal{R}}\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}. \tag{5.7.4}$$

Multiplizieren von (5.7.2) mit $3\mathcal{R}^2\dot{\mathcal{R}}$ und Addition der entstehenden Gleichung zu (5.7.4) liefert dann

$$\mathrm{d}(\rho\mathcal{R}^3) + p\,\mathrm{d}(\mathcal{R}^3) = 0 \tag{5.7.5}$$

also (5.5.13)

Man könnte nun vermuten, daß die Feldgleichungen im Falle der Friedmann-Universen keine über die Raychaudhuri-Gleichung und den Erhaltungssatz $T_{ik;}{}^{k} = 0$ hinausgehende Information liefern. Dies ist unrichtig, da die Konstante k in (5.7.1,2) enthalten ist, aber in den beiden Konsequenzen, die wir bisher aus den Gleichungen gezogen haben, k eliminiert wurde. Die Gleichungen müssen daher noch eine weitere Aussage enthalten, die eine Verknüpfung von Raumkrümmung k und zeitlicher Entwicklung des Universums bringt. Um dies einzusehen, schreiben wir (5.7.1) in der Form

$$\dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{\kappa\rho\mathcal{R}^2}{3} + k - \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^2 = 0. \tag{5.7.6}$$

Dies ist (unter Berücksichtigung von $\rho\mathcal{R}^3 = \text{const.}$) genau (5.2.14), also der Energiesatz der Newtonschen Kosmologie.

Die Raumstruktur wird durch $\mathcal{R}(t)$ und k bestimmt, wobei die Konstante k, die in der Newtonschen Kosmologie die Rolle der Energiedichte spielte, nun für den Raumtypus ausschlaggebend ist: Für $k = 1$ (negative Energiedichte) liegt ein räumlich geschlossenes, endliches Universum vor, für $k = 0$ ein unendliches, Euklidisches und für $k = -1$ ein negativ gekrümmtes, hyperbolisches Universum unendlicher Ausdehnung (positive Energiedichte im Newtonschen Fall).

$\mathcal{R}(t)$ ist der Krümmungsradius des Raumes, wie wir für $k = 1$ im vorigen Abschnitt gezeigt haben, und hat damit unmittelbar geometrische Bedeutung. Dies gilt auch für $k = -1$, während für $k = 0$ $\mathcal{R}(t)$ nur rein kinematische Bedeutung hat und wie in der Newtonschen Kosmologie willkürlich auf $\mathcal{R}(t_0) = 1$ normiert werden kann[30].

Die Lösungen von (5.7.1,2) lassen sich für $p = 0$ oder $p = \rho/3$ einfach diskutieren. Im ersteren Fall (inkohärente Materie) ist nach (5.5.15) $\rho = \mathcal{M}/\mathcal{R}^3$. Diese Näherung ist für das jetzige Universum zulässig, in dem der Strahlungsdruck gegen ρ vernachlässigt werden kann.

Die Näherung $p = \rho/3$ ist dagegen für das frühe, strahlungsdominierte Universum zu verwenden. Nach (5.5.17) ist dann $\rho = K/\mathcal{R}^4$, wobei K eine Konstante ist. (5.7.1) wird dann

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{\kappa\mathcal{M}}{3\mathcal{R}} + \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^2 - k, \qquad p = 0. \tag{5.7.7}$$

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{\kappa K}{3\mathcal{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^2 - k, \qquad p = \rho/3. \tag{5.7.8}$$

Falls Materie und Strahlung nicht in Wechselwirkung stehen (so daß die entsprechenden Energie-Impuls-Tensoren separat erhalten sind), können wir die beiden obigen Möglichkeiten kombinieren und erhalten

$$\boxed{\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{\kappa K}{3\mathcal{R}^2} + \frac{\kappa\mathcal{M}}{3\mathcal{R}} - k + \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^2 =: F(\mathcal{R}).} \tag{5.7.9}$$

Das Universum heißt strahlungsdominiert, falls der erste Term der rechten Seite der *Friedmann-Gleichung* (5.7.9) überwiegt; materiedominiert, wenn der $\mathcal{M}$-Term vorherrscht; krümmungsdominiert, wenn k der größte Term ist; und schließlich dominiert bei Überwiegen des letzten Ausdrucks in (5.7.9) die Vakuumenergie.

Für kleine $\mathcal{R}$ wird im allgemeinen ein strahlungsdominiertes Universum vorliegen. Wir können dann nähern

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{\kappa K}{3\mathcal{R}^2} \Rightarrow \mathcal{R} = \left(\frac{4\kappa K}{3}\right)^{1/4} t^{1/2}, \tag{5.7.10}$$

während ein materiedominiertes Universum für kleine $\mathcal{R}$ ein Verhalten $\dot{\mathcal{R}} \propto t^{2/3}$ zeigt. Falls $\Lambda \neq 0$, wird für große $\mathcal{R}$ dagegen stets der Λ-Term dominieren, da die Vakuumenergie proportional zum Volumen des Universums ist.

(5.7.9) läßt sich für $\Lambda \neq 0$ durch elliptische Funktionen lösen, während für $\Lambda = 0$ elementare Funktionen ausreichen. Die wesentlichen Eigenschaften

[30] Der Unterschied in der Normierung ($k = \pm 1, 0$ in der relativistischen Kosmologie, während k in der Newtonschen Kosmologie kontinuierlich variiert) ist darauf zurückzuführen, daß $\mathcal{R}(t_0)$ für $k = \pm 1$ nicht mehr willkürlich auf 1 normiert werden kann, da es unmittelbare physikalische Bedeutung hat.

von $\mathcal{R}(t)$ lassen sich jedoch auch für $\Lambda \neq 0$ aus (5.7.9) leicht ablesen. (Die Aufstellung einiger exakter Lösungen sei einer Übungsaufgabe vorbehalten.)

Zunächst suchen wir nach *statischen Lösungen* von (5.7.7). Für diese ist $\dot{\mathcal{R}} = \ddot{\mathcal{R}} = 0$ und (5.7.3) bzw. (5.7.7) ergeben dann

$$\kappa\rho = 2\Lambda, \tag{5.7.11}$$

$$\frac{\kappa\mathcal{M}}{3\mathcal{R}} + \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^2 = k. \tag{5.7.12}$$

Aus (5.7.11) folgt $\Lambda > 0$, und (5.7.12) hat daher nur für $k = 1$ eine Lösung:

$$\mathcal{R}^2 = \frac{3}{\kappa\rho + \Lambda} = \frac{2}{\kappa\rho}. \tag{5.7.13}$$

(5.7.11) drückt die Gleichgewichtsbedingung für das Universum aus: Die Anziehungskraft von ρ (es bewirkt $\ddot{\mathcal{R}} < 0$) muß die abstoßende Wirkung der (positiven) kosmologischen Konstante genau kompensieren. Allerdings ist dieses *geschlossene statische Einstein-Universum* unstabil. Vergrößert man nämlich $\mathcal{R}$ virtuell, so nimmt ρ wegen $\rho\mathcal{R}^3 = \text{const.}$ ab, während Λ konstant bleibt. Die Abstoßung durch Λ dominiert damit und führt zur weiteren Vergrößerung von $\mathcal{R}$.

Die nichtstatischen Lösungen von (5.7.9) werden durch das Verhalten von $F(\mathcal{R})$ bestimmt. Für $\Lambda < 0$ ist $F(\mathcal{R})$ für genügend große $\mathcal{R}$ stets negativ. Es gibt dann einen maximalen Radius $\mathcal{A}$ des Universums, der durch $F(\mathcal{A}) = 0$ bestimmt ist. $\mathcal{R}(t)$ hat in diesen Fällen das in Abbildung 5.7 gezeigte Verhalten. k spielt keine wesentliche Rolle[31].

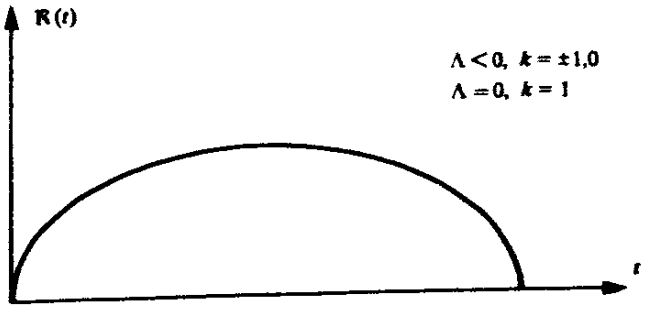

Abbildung 5.7: Lösungstyp der Friedmann-Gleichung für $\Lambda < 0$ und $\Lambda = 0$, $k = 1$.

Für $\Lambda > 0$ (und $\rho > 0$; für $\rho = 0$ siehe Aufgabe 1) ist eine Reihe von Fällen zu unterscheiden, die an dem Verhalten von $F(\mathcal{R})$ (Abbildung 5.8) abgelesen werden können.

[31] Der Grund dafür ist, daß $\Lambda < 0$ eine dem Volumen des Universums proportionale Anziehung bewirkt, die stets zur Rekontraktion des Universums führt.

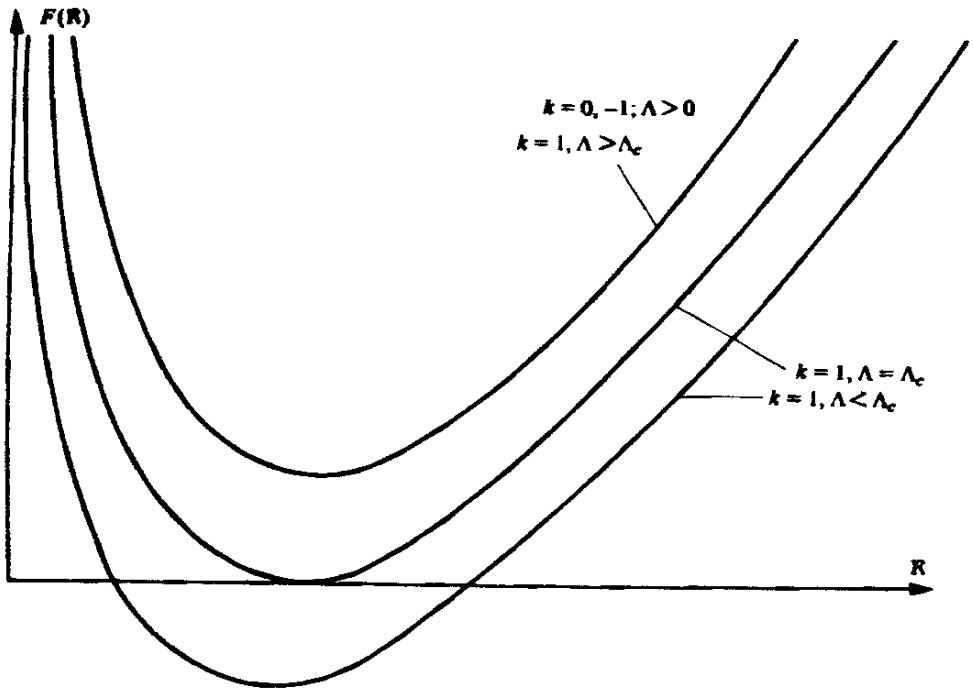

Abbildung 5.8: Die Fälle $\Lambda > 0$, $k = 0, \pm 1$.

Während $F(\mathcal{R})$ für $k = -1, 0$ für alle Werte von $\mathcal{R}$ positiv ist und daher ein von $\mathcal{R} = 0$ bis $\mathcal{R} = \infty$ beständig expandierendes[32] Universum vorliegt, gibt es für das endliche Universum $k = 1$ einen kritischen Wert $\Lambda = \Lambda_c$, für den $F(\mathcal{R}_c) = \mathrm{d}F/\mathrm{d}\mathcal{R}_c = 0$ ist. Dieser Wert entspricht gerade dem statischen Einstein-Kosmos (da $\dot{\mathcal{R}}^2 = F(\mathcal{R})$ und $\ddot{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\mathrm{d}F/\mathrm{d}\mathcal{R}$ für ein statisches Universum beide gleich Null sein müssen). Für $\Lambda > \Lambda_c$ liegt wieder ein unbeschränkt expandierendes Universum vor, während für $\Lambda = \Lambda_c$ außer dem statischen Einstein-Kosmos noch zwei expandierende (oder auch kontrahierende) Lösungen möglich sind, die sich der statischen Lösung von unten bzw. oben asymptotisch nähern (Abbildungen 5.9, 10, 11).

Ein theoretisch interessanter Fall ist $\Lambda = \Lambda_c(1 + \epsilon)$, wobei $\epsilon \ll 1$. Die Lösung der Friedmann-Gleichung hat dann die in Abb. 5.12 gezeigte Form (Lemaitre-Universum). Durch Wahl eines sehr kleinen ϵ kann die Expansion des Universums in einem Zeitpunkt fast gestoppt werden, wodurch die Zeitskala für die Expansion des Universums gedehnt wird.

Für $\Lambda = 0$ läßt sich die Friedmann-Gleichung (5.7.7), wie erwähnt, durch elementare Funktionen lösen. Am einfachsten ist der Fall $k = 0$ (Einstein-de Sitter-Universum):

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{\kappa\mathcal{M}}{3\mathcal{R}}, \qquad \mathcal{R} = \left(\frac{3\kappa\mathcal{M}}{4}\right)^{1/3} t^{2/3}. \tag{5.7.14}$$

[32] Die zeitgespiegelten (kontrahierenden) Lösungen von (5.7.9) sind auch möglich.

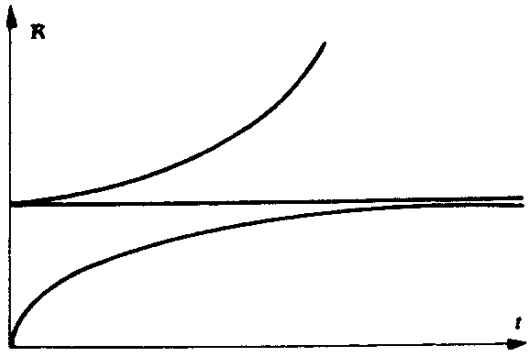

Abbildung 5.9: Lösungen für $\Lambda = \Lambda_c = 4(\kappa M)^{-2}$, $k = 1$.

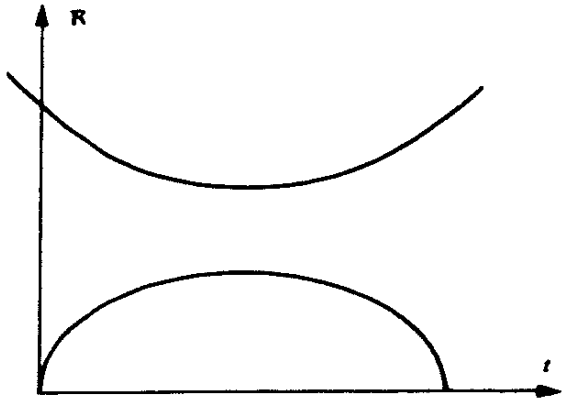

Abbildung 5.10: Lösungen für $k = 1$, $0 < \Lambda < \Lambda_c$.

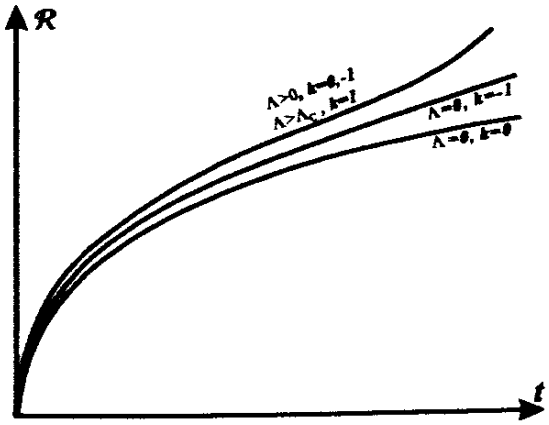

Abbildung 5.11: Weitere Lösungen der Friedmann-Gleichung.

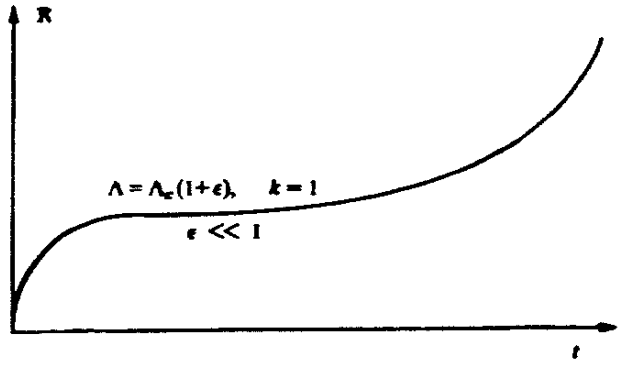

Abbildung 5.12: Lemaitre-Universum.

Das flache, unendlich ausgedehnte Universum expandiert für alle t.

Für $k = 1$, $\Lambda = 0$ wird (5.7.7) gelöst durch

$$t = \frac{\mathcal{A}}{2} \arccos\left(1 - 2\mathcal{R}/\mathcal{A}\right) - \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{R} - \mathcal{R}^2}. \tag{5.7.15}$$

wobei $\mathcal{A} = \kappa\mathcal{M}/3$ die maximale Ausdehnung des endlichen Universums angibt. Diese Ausdehnung $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ wird zur Zeit $t_m = \pi\mathcal{A}/2$ erreicht, während $t = 0$ den Ursprung und $t = 2t_m$ das Ende (Kollaps) des Universums angibt. Die Kurve (5.7.15) ist eine Zykloide, wie man am besten in einer Parameterdarstellung sieht. Transformiert man nämlich das Linienelement (5.6.8) durch die Substitution

$$\mathrm{d}t = \mathcal{R}(t)\,\mathrm{d}\tau =: a(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.7.16}$$

auf die Form

$$ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - d\sigma^2), \tag{5.7.17}$$

so folgt für $k = 1$ bei geeigneter Wahl der Integrationskonstante

$$a(\tau) = \frac{\mathcal{A}}{2}(1 - \cos\tau), \qquad t = \frac{\mathcal{A}}{2}(\tau - \sin\tau), \tag{5.7.18, 19}$$

also die bekannte Darstellung der Zykloide.

Die in (5.7.17) hergeleitete, auch für $k = -1, 0$ gültige Form des Robertson-Walker-Linienelements mit (5.6.11, 13) hat den Vorteil, daß Weltlinien radialer Lichtstrahlen ($d\theta = d\phi = 0$) einfach durch $d\tau = \pm d\alpha$ bestimmt sind (für $k = 0$ ist $\alpha = r$). Der Lichtkegel nimmt im τ-α-Diagramm die gewohnte Form an, was die Behandlung von Kausalitätsproblemen erleichtert (siehe Abschnitt 5.9).

Für $k = -1$ läßt sich die Lösung der Friedmann-Gleichung in den beiden Formen

$$t = \sqrt{\mathcal{R}(\mathcal{A} + \mathcal{R})} - \frac{\mathcal{A}}{2}\operatorname{ar\,cosh}\left(1 + \frac{2\mathcal{R}}{\mathcal{A}}\right) \tag{5.7.20}$$

oder

$$a(\tau) = \frac{\mathcal{A}}{2}(\cosh\tau - 1), \qquad t = \frac{\mathcal{A}}{2}(\sinh\tau - \tau) \tag{5.7.21, 22}$$

angeben. Das Universum expandiert für alle t, wie es auch die Analogie einer Newtonschen Kosmologie mit positiver Energiedichte fordert.

Um die Feldgleichungen schließlich auf eine für den *Vergleich mit dem Experiment* geeignete Form zu bringen, führen wir die Hubble-Konstante H_0 (siehe (5.2.5)) und den (dimensionslosen) Akzelerationsparameter[33] q_0 ein:

$$H_0 := \frac{\dot{\mathcal{R}}_0}{\mathcal{R}_0}, \qquad -q_0 := \frac{\ddot{\mathcal{R}}_0\mathcal{R}_0}{\dot{\mathcal{R}}_0^2}. \tag{5.7.23}$$

q_0 gibt an, ob die Kurve $\mathcal{R}(t)$ bei t_0 nach oben ($q_0 < 0$) oder unten ($q_0 > 0$) gekrümmt ist. Für $q_0 > 0$ verlangsamt sich die Expansion, was bei $\Lambda < 0$ stets zutrifft. Die Bedeutung von H_0^{-1} als Subtangente der Kurve bei t_0 ist in Abbildung 5.13 gezeigt, aus der hervorgeht, daß das *Hubble-Alter* $T_0 = H_0^{-1}$ für $\Lambda \leq 0$ ($q_0 > 0$) stets größer als das Alter t_0 des Universums ist. Ein zu kleiner Wert dafür kann also in diesem Fall zu Schwierigkeiten mit unabhängig bestimmten unteren Schranken für t_0 (etwa aus Altersbestimmungen an Kugelsternhaufen) führen. (Die derzeitigen Daten deuten aber auf Akzeleration, $q_0 < 0$, hin, s.u.)

Auch die Materiedichte ρ_0 des Universums kann durch einen dimensionslosen Parameter Ω_m ausgedrückt werden:

[33] Sowohl H als auch q sind Funktionen der Zeit, der Index 0 zeigt an, daß sie zum gegenwärtigen Zeitpunkt betrachtet werden; die Vorzeichenkonvention entstammt einer Zeit, in der man den Beobachtungsdaten $\ddot{\mathcal{R}}_0 < 0$ zu entnehmen glaubte.

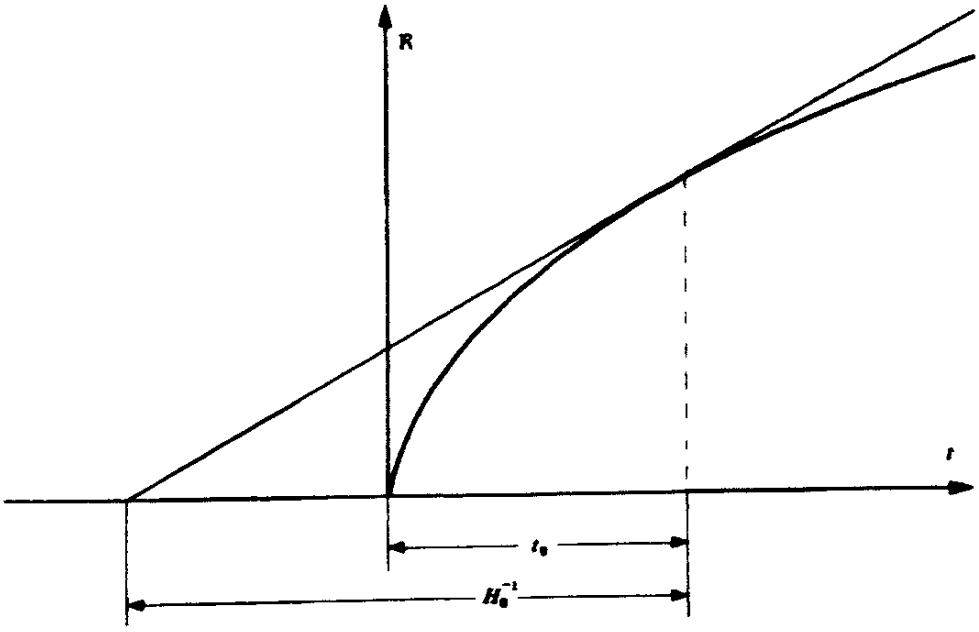

Abbildung 5.13: Physikalische Bedeutung von H_0.

$$\Omega_m := \kappa\rho_0/3H_0^2. \tag{5.7.24}$$

Ein analoger Parameter wäre auch für den Druck p_0 einzuführen, doch können wir wegen $p_0 \ll \rho_0$ in guter Näherung $p_0 = 0$ setzen. Ebenso bilden wir aus der der kosmologischen Konstanten Λ entsprechenden Dichte Λ/κ (vgl. (5.5.3)) die dimensionslose (aber zeitabhängige) Größe $\Lambda\mathcal{R}^2/3\dot{\mathcal{R}}^2$, deren Wert zum jetzigen Zeitpunkt t_0 wir mit Ω_Λ bezeichnen. Dann erhalten wir nach einfachen algebraischen Umformungen aus (5.7.1.2.3) die Gleichungen

$$\frac{1}{2}\Omega_m - q_0 = \Lambda/3H_0^2 =: \Omega_\Lambda, \tag{5.7.25}$$

$$\frac{3}{2}\Omega_m - q_0 - 1 = k/H_0^2\mathcal{R}_0^2, \tag{5.7.26}$$

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1 = k/H_0^2\mathcal{R}_0^2. \tag{5.7.27}$$

Mittels dieser Gleichungen sind die das zutreffende kosmologische Modell bestimmenden Größen Λ und $k/\mathcal{R}_0^2$ (Raumkrümmung) aus Meßdaten für Ω_m, H_0, q_0 im Prinzip zu berechnen. Die Bestimmung der letzten beiden soll im nächsten Abschnitt erörtert werden; neben H_0^{-1}, (5.2.3), ergeben neuere Beobachtungen (ab 1997)

$$q_0 \approx -0,5, \tag{5.7.28}$$

es liegt also anscheinend eine (seit ca. $6 \cdot 10^9$ Jahren) *beschleunigte Expansion* entsprechend Abbildung 5.11 (obere Kurve) oder 5.12 vor, wie sie nur mit $\Lambda > 0$

möglich ist. Im Gegensatz zu Abb. 5.13 ist daher das Universum älter als das Hubble-Alter. Die noch immer vorhandenen Unsicherheiten in der direkten Bestimmung von H_0 und q_0 haben dazu geführt, auch indirekte Methoden anzuwenden, die mehr physikalische Details und Modellannahmen verwenden: es ist ermutigend, daß sich die Resultate einander annähern.

Auch eine direkte Bestimmung von Ω_m wäre mit großen Unsicherheiten behaftet: abgesehen von der (heute) sichtbaren Materie könnte – und muß, wie sich aus dem scheinbar nicht-Keplerischen Verhalten der Umlaufbewegung von Sternen in Galaxien ergibt – es noch weitere, unsichtbare Materie („dark matter")[34] geben. Wieder bringt hier eine indirekte Bestimmungsmethode eine wesentliche Verbesserung der Situation: aus neueren Messungen (Daten seit 2000) der Anisotropie der Temperatur der Hintergrundstrahlung, die nach Abzug des schon erwähnten Einflusses der Erdbewegung noch übrigbleibt, zusammen mit theoretischen Überlegungen über deren Zustandekommen (aus Dichteschwankungen im Plasma vor dem Abkoppeln der Strahlung) läßt sich die Aussage

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda \approx 1 \tag{5.7.29}$$

gewinnen. Gemäß (5.7.27) bedeutet dies ein sehr schwach gekrümmtes Universum, verträglich mit der Annahme $k = 0$. (Weiter verbesserte Daten sind ab 2003 vom Satelliten MAP zu erwarten.) Die Aufteilung zwischen Ω_m und Ω_Λ ergibt sich aus (5.7.25,28,29), wobei der Wert $\Omega_m \approx 1/3$ auch durch andere, unabhängige Argumente, welche z.B. die gröbsten Abweichungen der Materieverteilung von der Homogenität („large scale structure") und ihre theoretische Modellierung benützen, gestützt wird.

Diese neuen Werte der kosmischen Parameter haben eine vollständige Revision des möglichen kosmologischen Modells gebracht: ein nahezu flaches, beschleunigt und unbegrenzt expandierendes Universum, wesentlich dominiert von der kosmologischen Konstanten (oder allgemeiner von „dunkler Energie", „dark energy"[35], wie man sie auch durch ein geeignetes *dynamisches* Feld ähnlicher Auswirkung – positive Energiedichte, aber negativer Druck – zu ersetzen versucht: „Quintessenz"), aber mit einem Materieanteil, der nur zu einem kleinen Bruchteil aus heute bekannter oder gar sichtbarer Materie besteht. Denn letztere gibt nur etwa den Anteil $\Omega_{\text{vis}} \approx 0{,}005$: sie gehört zu dem Anteil, der aus Baryonen besteht und insgesamt etwa $\Omega_B \approx 0{,}04$ ausmacht: der davon nicht sichtbare Anteil ist für Vorstellungen zur Kernsynthese im frühesten Universum nötig. (Die Anteile der Photonen und Neutrinos, „hot dark matter", $\Omega_\gamma \approx 10^{-5}$ und $\Omega_\nu < \Omega_B$ wurden vernachlässigt.) Der auf Ω_m fehlende Restanteil Ω_d dunkle Materie („cold dark matter") ist ihrer Natur nach derzeit *unbekannt* und Gegenstand zahlreicher Spekulationen. ($\Omega_{B,\nu,\gamma,d}$ entsprechen in gewissem Sinn den vier „Essenzen" antiker Vorstellungen, zu denen die oben erwähnte „Quintessenz" hinzugefügt wird.)

[34] Möglichkeiten dafür sind in Cline (2001) ausführlich diskutiert.
[35] Siehe Cline (2001).

Über die experimentellen Techniken hinaus wichtig für den Fortschritt, der zu den neuen Werten der kosmologischen Parameter geführt hat, war es, wie sich aus den vorstehenden Andeutungen ergibt, daß nicht nur das geometrische kosmologische Modell zusammen mit dem primitivsten Materiemodell (ideale Flüssigkeit) betrachtet wird. Es sind die detaillierten Vorstellungen über die „Materieeinfüllung" und deren Entwicklung unter Berücksichtigung aller Kenntnisse aus Elementarteilchen-, Kern-, statistischer Physik etc. sowie Berücksichtigung auch lokaler Gravitationseffekte (Klumpungen, Linsenwirkung, ...), die auf ihre Abhängigkeit von den kosmologischen Parametern untersucht werden und vielfach zu unabhängigen, wenn auch oft stark modellabhängigen Bestimmungen der Parameter aus Meßdaten führen. Die gegenwärtige Situation ist durch die „Konvergenz" der Werte aus solchen unabhängigen Bestimmungsmethoden und die umgekehrt dadurch bedingte Konvergenz der Vorstellungen und Modelle ermutigend.

Es fällt auf, daß die meisten Lösungen von (5.7.9) die Singularität $R = 0$ enthalten: Druck, Dichte und Geometrie sind dort singulär. Nur die Modelle mit $k = 1$, $0 < \Lambda \leq \Lambda_c$ gestatten auch Lösungen ohne diese Singularität. Ursprünglich war man der Meinung, diese Singularität sei unphysikalisch in dem Sinn, daß sie ein Artefakt der hohen Symmetrie der isotropen Modelle sei, welche die „Teilchen" (im rückläufigen Zeitsinn) auf einen Punkt fokussiert. Nach 1965 stellte sich aber im Gefolge einer bahnbrechenden Arbeit von R. Penrose heraus[36], daß für $\Lambda \leq 0$ unter einigen sehr allgemeinen qualitativen Annahmen (darunter $\rho > 0$, $\theta > 0$) ganz im Gegenteil eine *kosmologische Anfangssingularität* bei Vernachlässigung von Quanteneffekten eine unvermeidliche generische Konsequenz der Einsteinschen Feldgleichungen ist, die nur in ihrer detaillierten Struktur von etwaigen Symmetrien geprägt ist. Man bezeichnet sie als den *Urknall („Big Bang")*.

Aufgaben

1. Löse die Friedmann-Gleichungen (5.7.6) für $\rho \equiv 0$, d.h., es sei nur Vakuum-Energie vorhanden. Zeige, daß dann die *Raum-Zeit* von konstanter Krümmung ist. Wie hängt diese mit Λ zusammen? Das Ergebnis bedeutet im Falle $\Lambda > 0$ insbesondere, daß die Raum-Zeit-Geometrie für alle drei Fälle $k = \pm 1, 0$ bei gleichem Λ die gleiche ist, ihre hohe Symmetrie es aber ermöglicht, auf drei verschiedene Arten raumartige Schnitte durchzulegen, die konstante Krümmung besitzen. Wegen weiterer Diskussion dieser *de Sitter-Modelle* siehe z. B.: Tolman (1934), Schrödinger (1956), Heckmann & Schücking in Witten (1962); der Fall $k = 0$ spielte früher im sog. „steady state"-Modell und spielt heute in Spekulationen über eine „inflationäre", d.h., exponentiell rasch expandierende Frühphase des Uni-

[36] Vgl. dazu R. Penrose in DeWitt & Wheeler (1968); Hawking & Ellis (1973) sowie die einschlägigen Artikel in Held (1980), Vol. II, und Hawking & Israel (1979).

versums (vgl. Goenner 1964) eine Rolle. - Untersuche auch den Fall des *Anti-deSitter-Universums* $\Lambda < 0$ und des *Milne-Modells* $\Lambda = 0$!

2. Löse die Friedmann-Gleichung (5.7.8) für $\Lambda = 0$ in den (5.7.10) ergänzenden Fällen $k = \pm 1$. Um welche Kurven handelt es sich in den 3 Fällen bei $\mathcal{R}(t)$? Löse auch (5.7.9) für $\Lambda = 0$. Vergleiche in jedem Fall mit den qualitativen Resultaten im Text.

3. Löse (5.7.7.8) für $k = 0$, aber $\Lambda > 0$ und $\Lambda < 0$. Vergleiche auch hier mit den qualitativen Resultaten.

5.8 Friedmann-Universum IV: Die Rotverschiebungs-Entfernungsrelation

In diesem Abschnitt kommen wir zum wichtigsten experimentellen Test der Friedmann-Modelle, zur Rotverschiebungs-Entfernungsrelation, aus der im Prinzip q_0 und damit (falls $\Lambda = 0$) die räumliche Krümmung des Universums bestimmt werden kann. Die Rotverschiebungs-Entfernungsrelation kann unter sehr allgemeinen Bedingungen hergeleitet werden. Der größeren Übersichtlichkeit halber geben wir hier die einfachste Ableitung an. Der Beobachter (Erde) sei in $r = 0$ plaziert, das Licht einer entfernten Galaxis bewegt sich radial auf ihn zu, wobei wir die Näherung der geometrischen Optik verwenden. Wie in Abschnitt 4.2 haben wir bei Benützung der Gestalt (5.7.17) des Linienelements

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta s_0}{\Delta s_1} = \frac{a(\tau_0)\,\Delta\tau_0}{a(\tau_1)\,\Delta\tau_1}; \tag{5.8.1}$$

um aber mit der bisherigen Bezeichnung t_0 = heutiger Zeitpunkt = Empfangszeit bei $r_0 = 0$ in Übereinstimmung zu bleiben, sei also t_1 hier die Zeit der Lichtaussendung durch die Galaxis bei $r = r_1$: τ_0, τ_1 und $\alpha_0 = 0$, α_1 seien die entsprechenden Werte der Koordinaten τ, α. Wie schon früher bemerkt, sind die radial einlaufenden Lichtstrahlen durch $\tau + \alpha = \text{const.}$ gegeben – wenn also ein solcher Strahl von (τ_1, α_1) nach (τ_0, α_0) führt, so führt auch einer von $(\tau_1 + \Delta\tau_1, \alpha_1)$ nach $(\tau_0 + \Delta\tau_0, \alpha_0)$, falls $\Delta\tau_0 = \Delta\tau_1$. Daher erhalten wir aus (5.8.1) mit $\Delta := t_0 - t_1$

$$1 + z := \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(\tau_0)}{a(\tau_1)} = \frac{\mathcal{R}(t_0)}{\mathcal{R}(t_1)} = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}(t_0 - \Delta)}. \tag{5.8.2}$$

Die Wellenlängen bei Empfang und Aussendung verhalten sich daher so wie die Weltradien $\mathcal{R}$ zu den entsprechenden Zeiten. Wegen der Expansion des Universums tritt also eine *Rotverschiebung* ein, die üblicherweise durch die Größe $z = \Delta\lambda/\lambda$ ausgedrückt wird. (5.8.2) ist eine exakte Relation, deren Zusammenhang mit dem thermischen Verhalten von Strahlung bei Expansion offensichtlich ist.

Unsere nächste Aufgabe ist es nun, das Verhältnis (5.8.2) durch bekannte Größen auszudrücken. Dazu führen wir zunächst die derzeitige Entfernung $D = \mathcal{R}_0\alpha_1$ der betrachteten Galaxis von uns ein (also nicht die Entfernung zur Zeit der Lichtaussendung); es ist

$$D = \mathcal{R}_0\alpha_1 = \mathcal{R}_0(\tau_0 - \tau_1) = \mathcal{R}_0 \int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{\mathcal{R}(t)} \equiv \int_0^{\Delta} \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}(t_0 - t)}\,\mathrm{d}t. \tag{5.8.3}$$

Eliminieren wir nun Δ aus (5.8.2) zugunsten von D, erhalten wir die gewünschte Rotverschiebungs-Entfernungsrelation. Explizit ist das allerdings ohne Spezifizierung von $\mathcal{R}$ (vgl. die Übungsaufgabe) nur näherungsweise möglich. Die Taylorentwicklung

$$\mathcal{R}(t_0 - t) \approx \mathcal{R}_0 - t\dot{\mathcal{R}}_0 + \frac{t^2}{2}\ddot{\mathcal{R}}_0 = \mathcal{R}_0\left(1 - tH_0 - \frac{t^2}{2}H_0^2 q_0\right) \tag{5.8.4}$$

führt zu

$$1 + z \approx 1 + H_0\Delta + \left(\frac{q_0}{2} + 1\right) H_0^2\Delta^2 \tag{5.8.5}$$

und

$$D \approx \Delta + \frac{1}{2}H_0\Delta^2 \tag{5.8.6}$$

t der Umkehrung

$$\Delta \approx D - \frac{D^2}{2}H_0; \tag{5.8.7}$$

ren Einsetzung in (5.8.5) ergibt die Rotverschiebungs-Entfernungsrelation

$$\boxed{z \approx H_0 D/c + \frac{D^2 H_0^2}{2c^2}(1 + q_0).} \tag{5.8.8}$$

(5.8.8) enthält einen linearen Term $\propto H_0$ (wodurch die Deutung von H_0 als Hubble-Konstante verifiziert ist) und einen nichtlinearen Term $\propto D^2$, der von q_0 abhängt.

(5.8.8) ist allerdings nicht direkt experimentell verifizierbar, da D selbst nicht bestimmt werden kann, sondern nur die scheinbare Helligkeit l einer Galaxis. Letztere hängt mit der absoluten Leuchtkraft L einer Galaxis durch

$$l = \frac{L}{4\pi D^2(1 + z)^2} \tag{5.8.9}$$

zusammen, wobei die Frage der Einheiten von L im weiteren nicht von Bedeutung sein wird. (5.8.9) folgt daraus, daß die Lichtstrahlen, die von der Quelle ausgehen, zum Zeitpunkt des Empfanges eine Kugel mit Fläche $4\pi D^2$ bilden[37], die von der Quelle ausgehenden Photonen rotverschoben sind (Energie pro Photon um $(1+z)^{-1}$ verringert) und wegen der Expansion ferner das Zeitintervall zwischen dem Eintreffen der einzelnen Photonen um $1+z$ verlängert wird. Die in der Astronomie übliche Helligkeitseinheit ist die Größenklasse m, die mit der scheinbaren Helligkeit l nach

$$m = \text{const.} - 2.5 \lg l \tag{5.8.10}$$

zusammenhängt, so daß

$$m = \text{const.} - 2.5 \lg L + 5 \lg(1+z) + 5 \lg L \tag{5.8.11}$$

Elimination von D aus (5.8.8) und (5.8.11) ergibt

$$m = \text{const.} - 2.5 \lg \frac{LH_0^2}{c^2} + 5 \lg(1+z) + 5 \lg \left\{ z \left[1 - \frac{z}{2}(1+q_0) \right] \right\}$$

oder, für kleine z

$$\boxed{m \approx \text{const.} - 2.5 \lg \frac{LH_0^2}{c^2} + 5 \lg z + 1.086(1-q_0)z,} \tag{5.8.12}$$

wobei $1.086 = 2.5/\ln 10$.

Kennt man L, so kann man aus einem m-$\lg z$-Diagramm (Abbildung 5.14) die Hubble-Konstante H_0 und (aus der Abweichung der Kurve von der Geraden) q_0 ablesen. Dabei wird angenommen, daß L eine Konstante unabhängig von z ist.

Aus der Unkenntnis von L resultiert die große Unsicherheit in der Bestimmung der Hubble-Konstanten H_0. Abbildung 5.14 zeigt ein von Sandage[38] angegebenes Diagramm. Die Auswertung neuerer Messungen (ermöglicht u.a. durch das Hubble Space Telescope) an Einzelobjekten anstatt Galaxien, nämlich an sog. Supernovae vom Typ Ia, bei denen die zu machenden Annahmen über L weniger problematisch sind, liefert die schon zitierten Werte für H_0 und q_0. (Da die Rotverschiebungen dieser Objekte zu groß sind, als daß die in unserer Herleitung von (5.8.12) gemachten Näherungen noch zuträfen, ist statt ihrer eine numerische Behandlung erforderlich.)

[37] Für $k \neq 0$ ist dies nicht streng richtig. Die Oberfläche einer Kugel mit Radius D weicht aber von $4\pi D^2$ nur um einen Term der Ordnung D^4 ab, der vernachlässigt werden kann.

[38] Nach A. Sandage, Astrophys. J. **178**, 1 (1972).

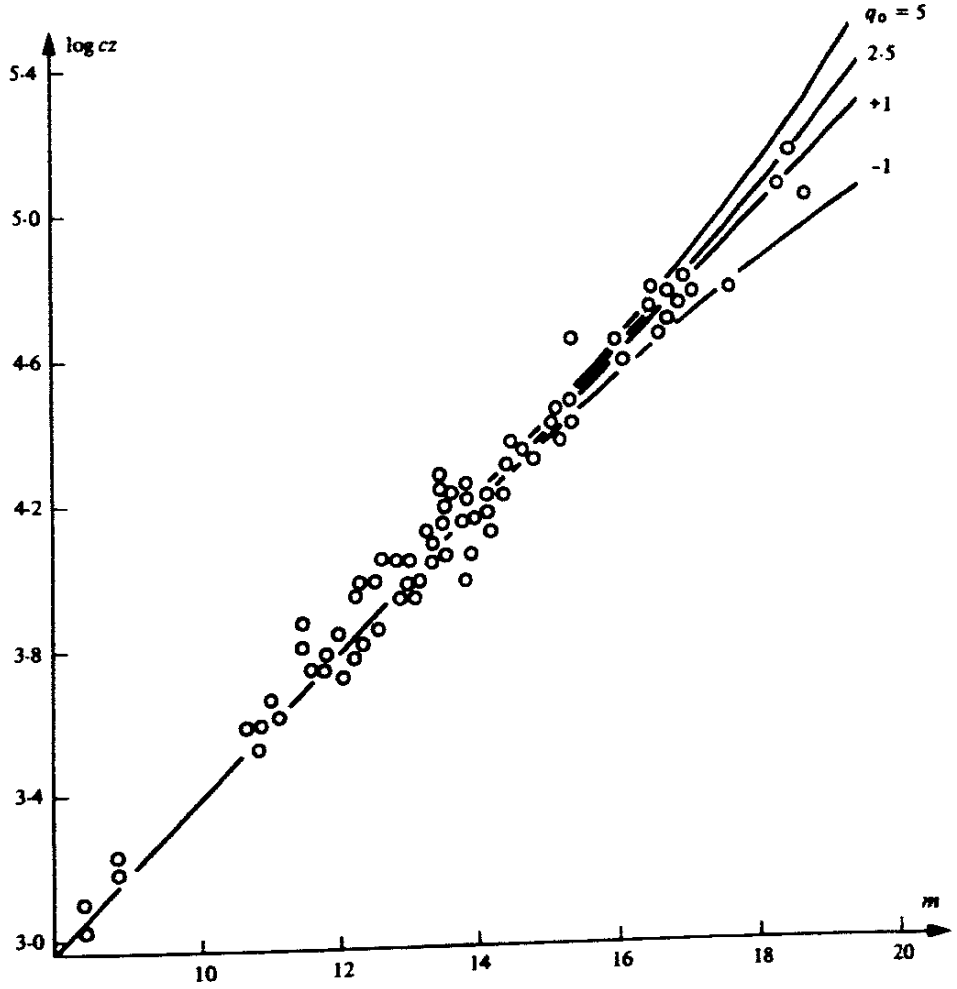

Abbildung 5.14: Die Rotverschiebungs-Entfernungsrelation. Als Ordinate ist $\lg cz$, als Abszisse m für die jeweils hellste Galaxis von 84 Haufen aufgetragen.

Aufgabe

Bestimme die *exakte* Gestalt der Rotverschiebungs-Entfernungsrelation für das Einstein-de Sitter-Modell (5.7.14) und vergleiche mit der Näherungsformel (5.8.8)!

5.9 Das frühe Universum

Die Untersuchung der Vorgänge nach dem Urknall hat sich in den letzten Jahren als eine der fruchtbarsten Arbeitsrichtungen der Kosmologie erwiesen, deren wichtigste Resultate und Probleme wir hier kurz skizzieren wollen[39].

Gehen wir von einem Friedmann-Modell aus, so vereinfacht sich für $\mathcal{R} \leq 10^{-3}\mathcal{R}_0$ die Friedmann-Gleichung (5.7.9) beträchtlich, da das Universum dann strahlungsdominiert ist. Nach (5.7.10) gilt dann wegen $K = \rho_s \mathcal{R}^4 = \rho_{s0}\mathcal{R}_0^4$

[39] Eine elementare, aber dennoch genaue Darstellung gibt S. Weinberg (1980).

($\rho_{s_0} = 4.5 \cdot 10^{-34}\mathrm{g/cm}^3$ ist die gegenwärtige Massendichte der Strahlung)

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0} = (4\kappa\rho_{s_0}/3)^{1/4}\, t^{1/2} =: \left(\frac{t}{t_s}\right)^{1/2}, \tag{5.9.1}$$

wobei

$$t_s := (4\kappa\rho_{s_0}/3)^{-1/2} = 3.1 \cdot 10^{19}\mathrm{s} = 10^{12}\ \text{Jahre}. \tag{5.9.2}$$

Die wichtigsten Größen verhalten sich daher für $\mathcal{R} \leq 10^{-3}\mathcal{R}_0$ ($t \leq 10^6$ Jahre) wie folgt:

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{t}{t_s}\right)^{1/2}, \quad H = \frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = \frac{1}{2t}, \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{t_s}{t}\right)^{1/2}, \quad \frac{\rho}{\rho_{s_0}} = \left(\frac{t_s}{t}\right)^2. \tag{5.9.3}$$

Diese Relationen gestatten es, verschiedene Epochen in der Entwicklung des Universums zu unterscheiden, die in Tabelle 5.1 angegeben sind.

Die erste Spalte der Tabelle gibt das Weltalter an, die zweite Spalte den jeweiligen Radius $\mathcal{R}$, den der heute sichtbare Teil des Universums ($\mathcal{R}_0 \approx 10^{10}$ Lichtjahre) hatte. Die dritte und vierte Spalte enthalten die Temperatur und mittlere Dichte des Universums, und in der fünften Spalte ist schließlich der *Welthorizont* angegeben, d. h. die Entfernung $\mathcal{D}$, auf die eine kausale Verbindung im Universum möglich war (für Abstände $D > \mathcal{D}$ überschreitet die Expansionsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit, siehe unten).

Die wichtigste Tabelleneintragung ist zunächst die Temperatur, da sie die physikalischen Vorgänge im Verlauf der Expansion am meisten beeinflußt. Wenn die thermische Energie k_BT die zweifache Ruhenergie mc^2 eines Elementarteilchens überschreitet, so sind *Teilchen-Antiteilchenpaare* in der thermischen Strahlung enthalten. Für $T > 10^{10}\,\mathrm{K}$ ($k_BT \approx 1\,\mathrm{MeV}$) treten zunächst Elektron-Positronpaare auf, dann andere Leptonen, Mesonen und für $T > 10^{13}\,\mathrm{K}$ schließlich Baryon-Antibaryonpaare.

Kurz ($t < 10^{-4}\,\mathrm{s}$) nach dem Urknall war das Universum demnach von einem Materie-Antimateriegemisch erfüllt, das im thermischen Gleichgewicht von Erzeugung und Vernichtung alle Arten von Elementarteilchen enthielt. Bei der allmählichen Abkühlung unter $T = 10^{13}\,\mathrm{K}$ kam es zur Vernichtung von Hadronenpaaren, wobei die Dichte der Materie unter die von Kernmaterie sank.

Hier ergibt sich eine Problematik, die derzeit Gegenstand intensiver Untersuchungen ist: Die einfachste Annahme über die Baryonenzahl B des Universums, nämlich $B = 0$ und zeitunabhängig, wird durch die Beobachtungen zumindest nicht unterstützt, da diese auf einen verschwindend geringen Antimaterieanteil in unserer Galaxis hinweisen. Natürlich ist es denkbar, daß dennoch ein wesentlicher Teil des Kosmos (andere Galaxien oder Galaxienhaufen) von Antimaterie erfüllt ist. In letzter Zeit wurden jedoch in der Elementarteilchenphysik theoretische Modelle entwickelt, die die Baryonenzahlerhaltung

Tabelle 5.1: Epochen der Kosmologie

Zeit	$\mathcal{R}$(cm)	$T(K)$	ρ(g/cm^3)	$\mathcal{D}$(cm)	Wesentliche physikalische Vorgänge
10^{10} Jahre	10^{28}	2.7	10^{-30}	10^{28}	
					Entstehung der Sterne, Galaxien, Materie dominiert
10^6 Jahre	10^{25}	$3 \cdot 10^3$	10^{-21}	10^{24}	Entkopplung von Strahlung und Materie
					Zeitalter der Strahlung
$2 \cdot 10^3$s	10^{20}	$3 \cdot 10^8$	10^{-2}	10^{14}	
					Kernreaktionen, Entstehung der leichten Elemente
2s	$3 \cdot 10^{18}$	10^{10}	10^8	10^{11}	
					Leptonenpaare in der thermischen Strahlung
10^{-4}s	$3 \cdot 10^{16}$	10^{12}	10^{16}	10^6	Hadronen in der thermischen Strahlung
10^{-36}s		10^{28}			Nichterhaltung der Baryonenzahl?
					Teilchenerzeugung durchs Schwerefeld?
10^{-44}s		10^{32}			Quanteneffekte der Gravitation?

verletzen und für das heutige Verhältnis von Photonen- zu Baryonenzahl im Universum einen Wert von $10^{9\pm1}$ liefern. Dieser Wert stimmt tatsächlich mit den Meßdaten der kosmischen Hintergrundstrahlung und der Massendichte des Universums überein, wenn man voraussetzt, daß letztere überwiegend von Materie (und nicht Antimaterie) herrührt.

Wir können hier auf diese theoretischen Modelle („Grand Unified Theories"[40]) nicht näher eingehen, sondern erwähnen nur, daß es sich dabei um vereinheitlichte Eichtheorien (siehe die Einleitung zu Kapitel 11) aller nichtgravischen (starken, schwachen, elektromagnetischen) Wechselwirkungen handelt. Eine Abweichung von $B = 0$ erfolgt erst zu $T \leq 10^{28}$ K durch das Zusammenspiel folgender Faktoren[41]: 1. Existenz eines die Baryonenzahlerhaltung verletzenden Prozesses (Zerfall von Higgs-Bosonen), 2. Existenz einer Teilchen-Antiteilchen- Asymmetrie (C- und T- (oder CP-)Verletzung), 3. Verlassen des thermischen Gleichgewichts (Zerfall erst zu einer Zeit, zu der die Zerfallsrate größer ist als die Expansionsrate des Universums). Eine ausführliche Darstellung dieser Aspekte des frühen Universums findet man etwa in Kolb & Turner (1990), Börner (1992), Linde (1993), Goenner (1994).

Noch weitergehende Spekulationen[42] versuchen, auch den Entstehungsprozeß von Materie und Antimaterie auf Erzeugungsprozesse in einer noch früheren Phase des Universums zurückzuführen. Zudem ist anzunehmen, daß für Zeiten $t \leq t_p = (G\hbar c^{-5})^{1/2} \sim 10^{-44}$ s („Planck-Zeit") Quanteneffekte der Gravitation selbst eine dominierende Rolle spielen.

Nach diesen Spekulationen über die allererste Entwicklungsphase des Universums wollen wir nochmals anhand der Tabelle die Geschichte des Kosmos in ihrer natürlichen Reihenfolge durchlaufen. Für $t \geq 10^{-4}$ s sinkt die Temperatur unter 10^{12} K ab. Baryonen und Antibaryonen vernichten einander (zumindest teilweise). Leptonenpaare bleiben bis zu $t = 2$ s in der Strahlung erhalten.

Für $t < 2 \cdot 10^3$ s finden Kernreaktionen statt, da die Temperaturen $3 \cdot 10^8$ K überschreiten. Numerische Rechnungen zeigen, daß in der zur Verfügung stehenden Zeitspanne allerdings nur die leichten Elemente erzeugt werden können[43] (Abbildung 5.15). Die Entstehung der schwereren Elemente dürfte dagegen in verschiedenen Phasen der Sternentwicklung (Nova-Ausbrüche etc.) viel später in der Geschichte des Universums stattgefunden haben.

In der folgenden Epoche dominiert die Strahlung weiter, bis schließlich für $t = 10^6$ Jahre Strahlung und Materie etwa gleiche Dichte erreichen. Zugleich fällt die Temperatur auf $T = 3 \cdot 10^3$ K ab, so daß in der Folge Wasserstoff nicht mehr ionisiert ist und das Universum für die Photonen der thermischen Strah-

[40] Siehe die einschlägigen Artikel in Ferrara, Ellis & van Nieuwenhuizen (1980).

[41] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **42**, 850 (1979).

[42] R. Sexl, H. Urbantke, Acta Phys. Austr. **26**, 339 (1967); Phys. Rev. **179**, 1247 (1969); L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969); Artikel in Esposito & Witten (1977).

[43] Gl. (5.5.6) zeigt allerdings, daß der zeitliche Verlauf der Expansion wesentlich durch σ und ω beeinflußt wird. Falls das frühe Universum nicht durch ein Friedmann-Modell beschrieben werden kann, ändern sich daher die hier gemachten Voraussagen.

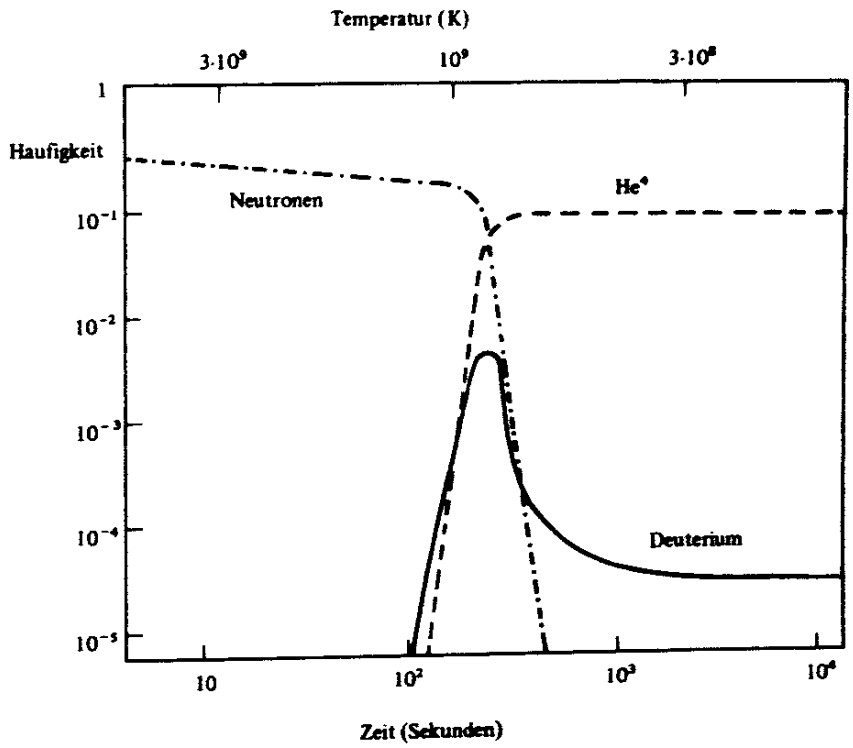

Abbildung 5.15: Häufigkeit chemischer Elemente als Funktion der Zeit[44]

lung praktisch transparent ist. Entkopplung von Strahlung und Materie tritt ein, und beide folgen von da an unabhängigen Gesetzen der Temperaturentwicklung, so daß im weiteren auch die Materieverteilung keinen Einfluß mehr auf die Strahlung haben kann.

Hier ergibt sich ein wesentliches Problem, das überraschenderweise aus der fast vollkommenen Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung resultiert. Tabelle 5.1 zeigt nämlich, daß der heute sichtbare Teil des Universums, aus dem auch die Hintergrundstrahlung stammt, zur Zeit der Freisetzung der Strahlung einen Radius von etwa 10^{25} cm hatte. Licht kann aber in der vom Urknall bis zur Freisetzung der Strahlung zur Verfügung stehenden Zeit nur die Strecke $ct \approx 10^{24}$ cm zurückgelegt haben. Zum Zeitpunkt der Entstehung der Strahlung hatte daher ein großer Teil des heute sichtbaren Universums noch keine kausale Verbindung, so daß es unverständlich ist, wieso die aus diesen Teilen des Universums stammende Strahlung mit so großer Präzision das gleiche Spektrum aufweist.

Um dies näher zu begründen, müssen wir zunächst den Begriff des *Welthorizonts* erläutern. Dazu gehen wir von dem einfachen Modell (5.7.17 - 19) aus. Für die von einem beliebigen Punkt radial ausgehenden Weltlinien ($d\theta = d\phi = 0$) gilt

$$ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - d\alpha^2),$$
$$a(\tau) = \frac{A}{2}(1 - \cos\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi, \quad 0 \leq \alpha < \pi. \tag{5.9.4}$$

In Abbildung 5.16 ist das Weltmodell durch die (τ, α)-Ebene repräsentiert, in der Lichtstrahlen wie in der speziellen Relativitätstheorie Gerade von $\pm 45°$ Neigung sind. In der Abbildung ist die Weltlinie (Geodätische) einer Galaxie eingezeichnet, die in $\alpha = \pi/2$ ruht. Ferner sind strichliert die Weltlinien anderer Galaxien eingetragen. In Punkt A sind von der betrachteten Weltlinie aus erst einige wenige andere Galaxien sichtbar geworden, während die meisten wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes für einen Beobachter in $\alpha = \pi/2$ unentdeckbar sind. Große Teile des Universums sind dann noch nicht kausal verbunden, da die Expansionsgeschwindigkeit des Universums, global gesehen, ein Vielfaches der Lichtgeschwindigkeit beträgt. Wenn wir diesen Zeitpunkt mit dem der Freisetzung der kosmischen Hintergrundstrahlung identifizieren, so zeigt sich, daß in B Strahlung von Ereignissen A_1 und A_2 empfangen wird, die zur Zeit der Freisetzung der Strahlung in keiner kausalen Relation standen. Es muß daher als ungeheurer Zufall erscheinen, daß die Strahlungstemperatur aus Richtung A_1 die gleiche ist wie die aus Richtung A_2.

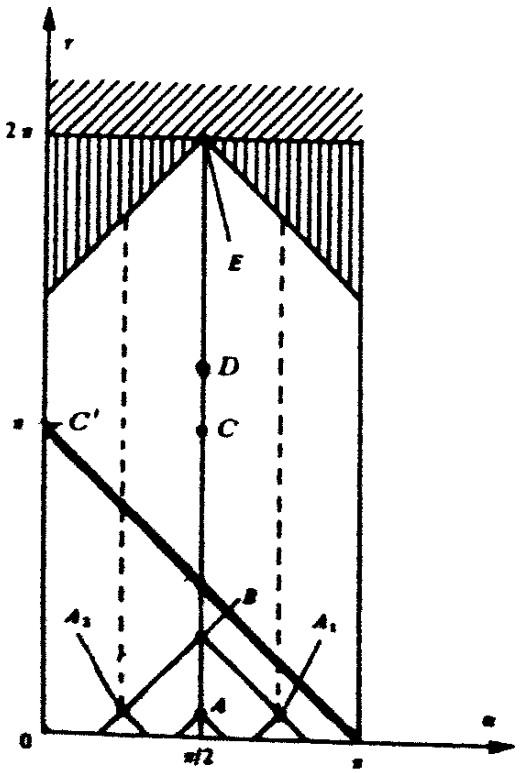

Abbildung 5.16: Zur Definition von Horizonten.

Mehrere Erklärungsversuche wurden für dieses Phänomen vorgebracht. Die

Spekulationen handeln zum Teil von starken Abweichungen von isotropen Universen zu frühen Zeiten, wie im *Mixmaster-Universum* oder *chaotischen Universum*[45]; am populärsten ist derzeit das *inflationäre Universum*[46] mit seinem starken Bezug zu den erwähnten „Grand Unified Theories" der Teilchenphysik (siehe dazu auch Kolb & Turner (1990), Börner (1992), Linde (1993), Goenner (1994), Coles & Lucchin (1995)). Interessant ist die hier zum Ausdruck kommende Tendenz, die üblicherweise in dynamischen Theorien experimentell *vorzugebenden* oder der Beobachtung zu entnehmenden *Anfangsbedingungen erklären* zu wollen. In diesem Zusammenhang ist auch das sogenannte *anthropische Prinzip* zu erwähnen, gemäß welchem die Anfangsbedingungen schon dadurch eingeschränkt sind, daß die Evolution die Entwicklung intelligenten Lebens (d. h. des beobachtenden und theorienbildenden Menschen) ermöglichen sollte (siehe dazu Barrow & Tipler (1986)).

Wir wollen hier abschließend noch die weiteren Kausalrelationen in dem Modelluniversum verfolgen. In C wird das ganze Universum überschaubar, wie man durch Vergleich mit C' sieht, zu einem späteren Zeitpunkt D werden verschiedene Galaxien sogar aus beiden Richtungen sichtbar (Licht umkreist das Universum). In E kollabiert schließlich das Universum, so daß das hier betrachtete Teilchen (Beobachter) niemals Kenntnisse von Ereignissen haben kann, die in den beiden schraffierten Regionen stattfinden. Ein derartiges Phänomen nennt man „*Ereignishorizont*". Weitere Literatur über verschiedene Horizonttypen und ihr Auftreten in Weltmodellen enthält ein ausgezeichneter Überblicksartikel von W. Rindler[47].

Aufgabe

Wie sieht (5.9.4) und das Abbildung 5.16 entsprechende Diagramm für die Lösung von (5.7.8) mit $\Lambda = 0$, $k = +1$ aus? (Vgl. Aufgabe 2 von Abschnitt 5.7).

[45] C. W. Misner, Phys. Rev. **186**, 1319 (1969) (Mixmastermodell). P. J. E. Peebles, Comments Astrophys. Space Phys. **IV**, 53 (1972); vgl. auch die Artikel von Zeldovich und Penrose in Hawking & Israel (1979).

[46] A. D. Linde, Spektrum d. Wiss., Jan. 1995, p. 32.

[47] W. Rindler, Monthly Not. Roy. Astr. Soc. **116**, 662 (1965).

Kapitel 6

Gravitationswellen

Im Abschnitt 3.2 haben wir gesehen, daß die linearisierten Feldgleichungen der Gravitation bei geeigneter Koordinatenwahl entkoppelt werden können. Jede der Komponenten ψ_{ik} genügt dann in materiefreien Gebieten der Wellengleichung

$$\Box\psi = 0,$$

genau wie im elektromagnetischen Fall. Diese Gleichung hat Lösungen, die man bei der Maxwellschen Theorie als Strahlung bezeichnet. Die Spezifizierung strahlungsartiger Lösungen erfolgt dabei in mehrfacher Art:

1) durch das Verhalten der Feldstärken im Unendlichen ($1/r$ statt $1/r^2$ wie bei statischen Feldern),

2) durch die Existenz einer Energieströmung,

3) durch den Zusammenhang des Strahlungsfeldes mit seinen Quellen (Energieverlust im „Antennensystem").

Welche Lösungen der Vakuumgleichungen $\Box\psi_{ik} = 0$ bzw. $G_{ik} = 0$ entsprechen nun der Gravitationsstrahlung? Die obigen Kriterien 1) und 2) lassen sich nicht ohne weiteres übertragen, da für das Gravitationsfeld kein klarer Feldstärke- und Energiebegriff zur Verfügung stehen. Das hängt direkt mit dem Äquivalenzprinzip und der Nichtlinearität der Gravitationstheorie zusammen. Beim dritten Punkt besteht vor allem die technische Schwierigkeit, Lösungen der Feldgleichungen zu finden, die durch Randbedingungen an der „Antenne" bestimmt sind, oder einen Sender für Gravitationswellen tatsächlich zu bauen und den Energieverlust zu messen. Auch bei elektromagnetischen Wellen erfolgte erst 1941 eine vollständige Lösung des Randwertproblems an einer realistischen Antenne, deren Energieverlust diskutierbar wird.

Es existieren zwar Lösungen von $G_{ik} = 0$, die aber für die Nahzone eines realistischen Senders nicht in Frage kommen und keinen Hinweis auf den Erzeugungsmechanismus geben. In einigen Fällen können wir aber dennoch Analogien zum elektromagnetischen Strahlungsbegriff erwarten:

1) in der linearisierten Theorie,

2) beim Studium der Wellenfronten (Charakteristiken), und

3) bei der Untersuchung des Riemann-Tensors der Lösungen von $G_{ik} = 0$ (aus $R^j{}_{ikm} = 0$ folgt $G_{ik} = 0$, aber für mehr als drei Dimensionen nicht das Umgekehrte), der in vieler Hinsicht dem elektromagnetischen Feldtensor ähnlich ist.

6.1 Linearisierte Theorie

6.1.1 Vakuumfelder und ebene Wellen

Setzen wir wie im Abschnitt 3.2[1]

$$g_{ik} = \eta_{ik} + 2v_{ik}, \qquad |v_{ik}| \ll 1, \tag{6.1.1}$$

so lauten die Feldgleichungen

$$\Box \phi_{ik} = -\kappa T_{ik}, \tag{6.1.2}$$

wobei

$$\phi_{ik} = v_{ik} - \tfrac{1}{2}\eta_{ik}\psi. \tag{6.1.3}$$

Sie sind zusammen mit der Nebenbedingung

$$\phi_{i,k}^{\ \ k} = 0 \tag{6.1.4}$$

zu lösen. Diese Nebenbedingung legt die Eichung bis auf Lösungen von

$$\Box \Lambda_i = 0 \tag{6.1.5}$$

fest, d. h. nur Eichtransformationen

$$\phi_{ik} = \bar{\phi}_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i} - \eta_{ik}\Lambda^j{}_{,j}, \tag{6.1.6}$$

die (6.1.5) erfüllen, ändern die Gestalt (6.1.2) der Feldgleichungen nicht. In materiefreien Gebieten gilt für ϕ_{ik} die Wellengleichung

$$\Box \phi_{ik} = 0 = \Box \psi_{ik}. \tag{6.1.7}$$

[1] Indexbewegung mit η_{ik}.

Schwache Gravitationsfelder breiten sich also im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Wir betrachten eine ebene Welle, die in der positiven x- Richtung läuft:

$$\phi_{ik} = \phi_{ik}(t - x). \tag{6.1.8}$$

Ableitungen nach dem Argument seien mit einem Punkt bezeichnet. Die Nebenbedingung (6.1.4) verlangt $\phi_i{}^0 = \phi_i{}^1 = 0$, also bis auf wegeichbare Konstanten:

$$\phi_0{}^0 = \phi_0{}^1 = -\phi_1{}^0 = -\phi_1{}^1, \quad \phi_2{}^0 = \phi_2{}^1, \quad \phi_3{}^0 = \phi_3{}^1,$$

so daß ϕ_{ik} nur mehr $10 - 4 = 6$ unabhängige Komponenten hat. Dabei sind aber noch Eichtransformationen (6.1.6) mit

$$\Lambda_j = \Lambda_j(t - x)$$

möglich, weil (6.1.5) dabei erfüllt ist und der Charakter einer ebenen Welle in der x-Richtung nicht zerstört wird. Da 4 willkürliche Funktionen Λ_j zur Verfügung stehen, muß es möglich sein, weitere 4 Komponenten der ϕ_{ik} zu eliminieren. Einsetzen in (6.1.6) zeigt, daß folgende Bedingungen erfüllbar sind:

$$\begin{aligned} \phi_2{}^0 = \bar{\phi}_2{}^0 + \dot{\Lambda}_2 = 0, \quad \phi_3{}^0 = \bar{\phi}_3{}^0 + \dot{\Lambda}_3 = 0, \\ \phi_1{}^0 = \bar{\phi}_1{}^0 - (\dot{\Lambda}^0 + \dot{\Lambda}^1) = 0, \\ \phi_i{}^i = \bar{\phi}_i{}^i - 2(\dot{\Lambda}^0 - \dot{\Lambda}^1) = 0. \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Mit $\phi_i{}^i = \psi_i{}^i = 0$ ist dann auch $\phi_{ik} = \psi_{ik}$ erreicht, und die Matrix ψ_{ik} vereinfacht sich zu

$$\psi_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{22} & \psi_{23} \\ 0 & 0 & \psi_{23} & \psi_{33} \end{pmatrix}, \tag{6.1.10}$$

wobei wegen $\psi_i{}^i = 0$ noch

$$\psi_{22} + \psi_{33} = 0 \tag{6.1.11}$$

gilt. Wir bemerken, daß $\psi_{22} - \psi_{33}$ und ψ_{23} von der Eichung (6.1.9) nicht berührt werden. Als Anfangsbedingungen benötigen wir für $t = 0$ vier Größen: ψ_{23}, $\dot{\psi}_{23}$, $\psi_{22} - \psi_{33}$, $\dot{\psi}_{22} - \dot{\psi}_{33}$.

Die Polarisationsfreiheitsgrade einer ebenen Gravitationswelle sind also durch eine spurlose symmetrische 2×2-Matrix charakterisiert, das Linienelement der Welle ist durch

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - (1 - 2\psi_{22})\,dy^2 - (1 + 2\psi_{22})\,dz^2 + 4\psi_{23}\,dy\,dz \tag{6.1.12}$$

gegeben.

6.1.2 Teilchen im Feld der Welle

Wir untersuchen nun das Verhalten von Probeteilchen im Feld der ebenen[2] Gravitationswelle. Dabei studieren wir zuerst freie Teilchen, für die die Geodätengleichung

$$\ddot{z}^i + \Gamma^i{}_{jk}\,\dot{z}^j\dot{z}^k = 0 \tag{6.1.13}$$

gilt, wobei $z^i(s)$ die Weltlinie des Teilchens ist. Mit der Anfangsbedingung $\dot{z}^\alpha(0) = 0$ folgt aus (6.1.13) $z^\alpha(s) = \text{const}$. Das Teilchen ruht daher an einem festen Koordinatenpunkt. Die Relativabstände zweier Teilchen ändern sich im Feld der Welle aber dennoch, da der metrische Tensor $g_{ik} = \eta_{ik} + 2v_{ik}$ zeitabhängig ist. So folgt aus (6.1.12) für den Simultanabstand $\mathrm{d}\sigma$ zweier Nachbarteilchen

$$\mathrm{d}\sigma = [\mathrm{d}x^2 + (1 - 2v_{22})\,\mathrm{d}y^2 + (1 + 2v_{22})\,\mathrm{d}z^2 - 4v_{23}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z]^{1/2}. \tag{6.1.14}$$

Abstände auf „Parallelen" zur x-Achse bleiben demnach ungeändert. Das zeigt, daß die Welle transversal polarisiert ist.

Um die Polarisationszustände[3] genauer zu analysieren, betrachten wir einen Ring von freien Teilchen (Staub) vom Radius 1, der in der (y, z)-Ebene liegt und dann durch die einfallende Welle deformiert wird (s. Abbildung 6.1). Der Abstand eines solchen Teilchens von einem im Zentrum ($y = z = 0$) befindlichen, sowie auch alle Winkel zwischen Radien sind dann aus der Metrik der (y, z)-Ebene

$$\mathrm{d}l^2 = (\delta_{\alpha\beta} - 2v_{\alpha\beta})\,\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \qquad (\alpha, \beta = 2, 3) \tag{6.1.15}$$

zu entnehmen. Sie ist in jedem Augenblick euklidisch, wobei aber nur vor dem Eintreffen der Welle die x^α die Bedeutung Cartesischer Orthogonalkoordinaten haben. Um die Gestalt des deformierten Ringes und die relative Teilchenbewegung zu späteren Zeiten zu untersuchen, führen wir in jedem Augenblick durch

$$x^\alpha = M^\alpha{}_{\beta'}(t)\,x^{\beta'}, \quad \mathrm{d}l^2 = \delta_{\alpha'\beta'}\,\mathrm{d}x^{\alpha'}\mathrm{d}x^{\beta'} \tag{6.1.16}$$

wieder ein Cartesisches Orthogonalsystem ein, das wir uns durch eine starre Platte in der (y, z)-Ebene realisiert denken. Die inneren Kräfte der Platte seien also im Idealfall so viel stärker als die Gravitationskräfte, daß keine Relativbewegung der Teilchen in der Platte auftritt. Für die Koordinaten der Plattenteilchen ist dann $x^{\alpha'} = \text{const}$, während die x^α variieren, weil für sie nicht (6.1.13), sondern eine um die inneren Kräfte ergänzte Gleichung gilt. Für die

[2] Die Grundlage allgemeinerer Rechnungen ist die aus (2.7.9) herzuleitende „Deviationsgleichung" (vgl. Pirani, in: Deser & Ford (1965)).

[3] Geht man von der Deviationsgleichung aus, so werden sie durch die Transversalkomponenten $R_{0\alpha0\beta}$ $(\alpha, \beta = 2, 3)$ des Riemann-Tensors beschrieben.

Staubteilchen hingegen ist $x^\alpha = \text{const}$, und wir interessieren uns für ihre $x^{\alpha'}$. Vor Eintreffen der Welle soll $x^\alpha = x^{\alpha'}$ sein. $M^\alpha{}_\beta$ wird also nachher von $\delta^\alpha{}_\beta$ nur um eine symmetrische Matrix $m^\alpha{}_\beta$ der Größenordnung $\psi^\alpha{}_\beta$ abweichen, wenn wir willkürlich hinzufügbare Rotationen (antisymmetrischer Beitrag) ausscheiden. ($\psi_{\alpha\beta}$ selbst gibt in dieser Größenordnung keinen Beitrag zu einer Rotation, da sich aus $\psi_{\alpha\beta}$ in linearer, drehinvarianter Weise kein antisymmetrischer Tensor konstruieren läßt). Der Ansatz $M^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + m^\alpha{}_\beta$ gibt in (6.1.15, 16) eingesetzt $m^\alpha{}_\beta = \psi_{\alpha\beta}$. Die Schwingung der Staubteilchen gegenüber der Platte ist nun aus

$$x^{\alpha'}(t) = x^\alpha - \psi_{\alpha\beta}(t)\, x^\beta \tag{6.1.17}$$

zu entnehmen, die konstanten x^α geben die Anfangslagen vor Eintreffen der Welle an. Die Resultate sind für verschiedene Polarisationszustände in Abbildung 6.1 gezeigt und mögen als Übungsaufgabe mittels (6.1.17) verifiziert werden. Die Probeteilchen bilden ursprünglich einen Kreis, der durch die Welle zu einer Ellipse mit zeitlich veränderlicher Gestalt und Achsenrichtung, aber konstanter Fläche deformiert wird („Polarisationsellipse"). Setzt man

$$\psi_{22}(t) = A(t)\cos 2\Omega(t), \qquad \psi_{23}(t) = A(t)\sin 2\Omega(t),$$

so sind die Halbachsenlängen $1 \pm A(t)$, der Verdrehungswinkel $\Omega(t)$. *Linearpolarisation* ist durch $\psi_{22}/\psi_{23} = \text{const}$ charakterisiert. Die Polarisationsellipse ändert nur die Gestalt, aber nicht die Achsenrichtung. Die Probeteilchen bewegen sich auf kleinen geraden Strecken durch die Ausgangslage. *Zirkularpolarisation* ist durch ${\psi_{22}}^2 + {\psi_{23}}^2 = \text{const}$ gekennzeichnet. Die Polarisationsellipse dreht sich, ohne die Gestalt zu ändern, und zwar bei rein harmonischen Wellen mit der *halben* Frequenz der Welle. Die Probeteilchen bewegen sich auf kleinen Kreisen um ihre Anfangslagen. *Elliptische Polarisation* ist der allgemeine Fall bei harmonischen Wellen. Die Polarisationsellipse ändert Gestalt und Stellung periodisch. Die Probeteilchen bewegen sich auf kongruenten kleinen Ellipsen um die Anfangslagen.

Wir sehen, daß der Grundtyp von Schwingungen, zu denen elastische Körper durch eine ebene Welle angeregt werden, eine *Quadrupolschwingung* ist, wobei sich die Querschnittsflächen nicht ändern. (Zwei unabhängige Polarisationsrichtungen dürfen also nicht wie in der Optik normal zueinander gewählt werden, sondern in einem Winkel von $\pi/4$, was gerade den beiden Möglichkeiten $\psi_{22} \neq 0$, $\psi_{23} = 0$ bzw. $\psi_{22} = 0$, $\psi_{23} \neq 0$ entspricht).

Wir wollen jetzt einen Quadrupol aus vier elastisch an die Platte gekoppelten Teilchen der Masse m als einfachstes Modell eines *Detektors* für Gravitationswellen verwenden (Abbildung 6.2). Die Verwendung elastisch gekoppelter Teilchen ermöglicht die Ausnützung von Resonanzeffekten. Ist die Kopplung schwach gedämpft, so absorbiert der Detektor irreversibel Energie aus dem Feld der Welle, die man messen kann.

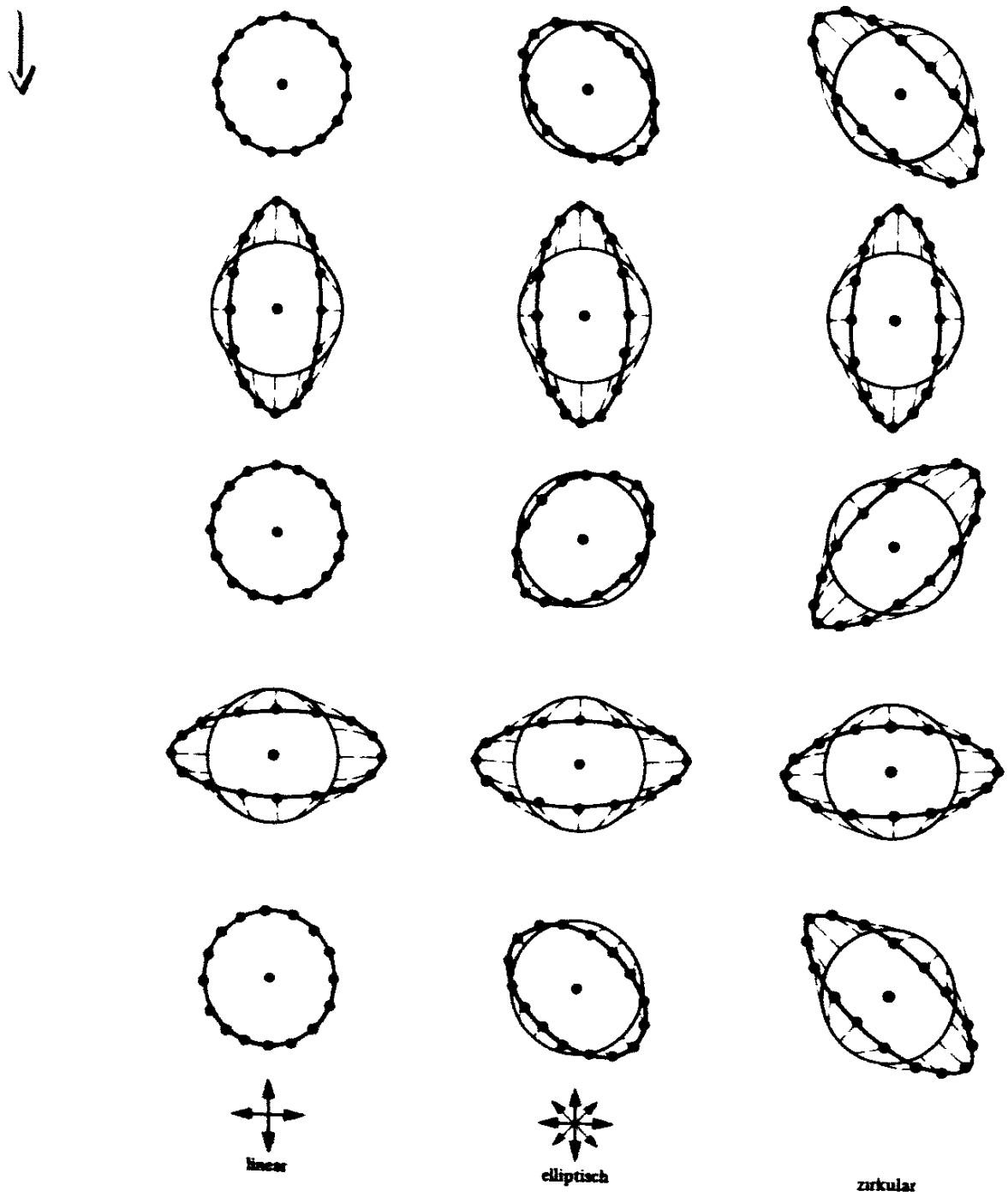

Abbildung 6.1: Polarisation von Gravitationswellen. (Nach Thorne & Price, Astrophys. J. **155**, 163 (1969).)

Zur Abschätzung dieser Energie gehen wir in der Näherung nichtrelativistischer Teilchenbewegung folgendermaßen vor[4]. Für ein freies Teilchen auf der y-Achse ist die Relativbewegung um die Ausgangslage für eine periodische Welle der Form $\psi_{22} = Ae^{i\omega t}$, $\psi_{23} = 0$ nach (6.1.17) durch $\Delta y' = yAe^{i\omega t}$ gegeben, was einer Scheinkraft $K = -m\omega^2 yAe^{i\omega t}$ entspricht. Bei elastisch-gedämpfter

[4]Nach R. P. Feynman, unveröffentlicht.

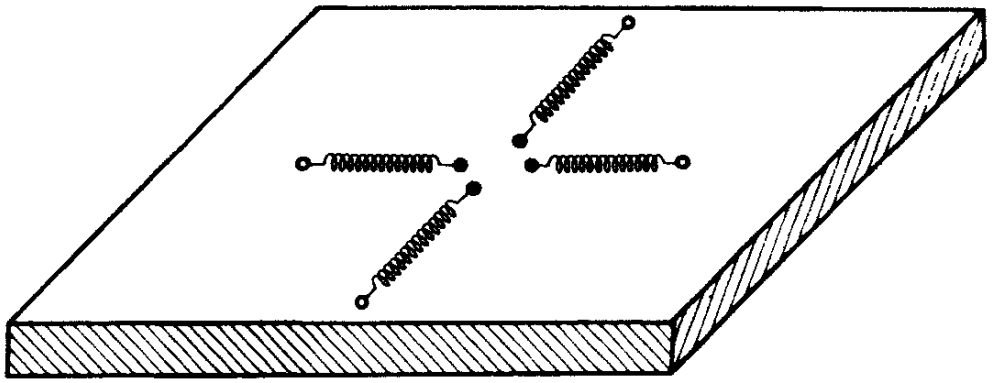

Abbildung 6.2: Quadrupolantenne.

Bindung ist die Bewegungsgleichung

$$m\left((\Delta y')^{\cdot\cdot} + \gamma(\Delta y')^{\cdot} + \omega_0^2\,\Delta y'\right) = K, \tag{6.1.18}$$

wobei eine ungedämpfte Schwingung

$$\Delta y' = yA\,\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\,e^{i\omega t}$$

entsteht. Die aus der Strahlung absorbierte mittlere Leistung entspricht der Arbeit der Kraft K während einer Periode, dividiert durch die Periodenlänge. Für den gesamten Quadrupol ergibt das

$$4\frac{1}{T}\int_0^T (\mathrm{Re}\,K)\,\mathrm{Re}(\Delta y')^{\cdot}\,\mathrm{d}t = 2A^2y^2\,\frac{\gamma\,\omega^6 m}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}. \tag{6.1.19}$$

Um daraus den Absorptionsquerschnitt zu berechnen, benötigen wir noch den Energiestrom der Welle.

6.1.3 Energiedichte und Energiestrom

Um Energiedichte und Energiestrom des Strahlungsfeldes herzuleiten, gehen wir von der Lagrange-Formulierung der Einsteinschen Theorie aus. Linearisieren wir (3.4.19, 6, 5), ergibt sich

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{2}\,\psi^{ik,j}\,\psi_{ik,j} - \psi^{ik,j}\,\psi_{jk,i} - \frac{1}{2}\,\psi_{,i}\,\psi^{,i} + \psi^{ik}{}_{,k}\,\psi_{,i}\right) - T_{ik}\,\psi^{ik}. \tag{6.1.20}$$

Für ein freies Feld, das sich in x-Richtung ausbreitet, verbleiben nur die $\psi^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 2, 3$), wenn die Eichung (6.1.9) benutzt wird, um nur die tatsächlichen Freiheitsgrade auftreten zu lassen. Aus der damit vereinfachten Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} \upsilon^{\alpha\beta,j} \upsilon_{\alpha\beta,j} = \frac{1}{\kappa}(\upsilon_{22}{}^{,j} \upsilon_{22,j} + \upsilon_{23}{}^{,j} \upsilon_{23,j}) \tag{6.1.21}$$

berechnen wir nach den üblichen Regeln den kanonischen Energie-Impulstensor des Feldes:

$$t_i{}^k = \frac{2}{\kappa}(\upsilon_{22,i} \upsilon_{22}{}^{,k} + \upsilon_{23,i} \upsilon_{23}{}^{,k}) - \delta_i^k \mathcal{L}. \tag{6.1.22}$$

Daraus erhalten wir für die Energiedichte – wir verwenden wieder die von der Eichung (6.1.9) unabhängigen Feldkomponenten –

$$\mathcal{E} = t_0{}^0 = \frac{2}{\kappa}\left[\frac{1}{4}\left(\dot{\upsilon}_{22} - \dot{\upsilon}_{33}\right)^2 + \left(\dot{\upsilon}_{23}\right)^2\right]. \tag{6.1.23}$$

Für den Energiestrom $t_0{}^\alpha$ ergibt sich bei der in x-Richtung fortschreitenden Welle nur eine x-Komponente

$$t_0{}^1 = \mathcal{E}. \tag{6.1.24}$$

Energiedichte und Energiestrom stimmen überein, da wir die Phasengeschwindigkeit der Welle $c = 1$ gesetzt haben.

Damit können wir den Absorptionsquerschnitt des oben betrachteten Gravitationswellendetektors berechnen. Für die linear polarisierte Welle $\upsilon_{22} = Ae^{i\omega t}$, $\upsilon_{23} = 0$ ist der mittlere Energiestrom $cA^2\omega^2/\kappa$. Teilen wir den Ausdruck (6.1.19) für die vom Detektor absorbierte Leistung durch ihn, so ergibt sich der *Absorptionsquerschnitt*

$$\sigma = \frac{2\kappa}{c} y^2 m\omega \frac{\gamma\omega^3}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

oder

$$\sigma = 4\pi^2 y^2 \frac{2M}{\lambda} \frac{\gamma\omega^3}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \tag{6.1.25}$$

wobei $2M = 8mG/c^2$ der Schwarzschild-Radius und y^2 der geometrische Querschnitt des Detektorsystems ist. (Zur Vorgangsweise in diesem Unterabschnitt ist folgendes zu bemerken: Da aufgrund des Äquivalenzprinzips der Begriff der Gravitationsfeldstärke nicht eindeutig definierbar ist, kann auch das Konzept einer lokalen Energiedichte des Gravitationsfeldes nur in speziellen Situationen einen approximativen Sinn haben, im Gegensatz zum Fall des Elektromagnetismus. Eine solche Situation ist dann gegeben, wenn sich die Metrik als eine „Hintergrundmetrik" (hier flach) interpretieren läßt, der Störungen überlagert sind, deren Wellenlänge λ klein gegen die Krümmungsradien R des Hintergrundes ist. Durch Entwickeln nach dem kleinen Parameter λ/R kann man aus den Einsteingleichungen zeigen, daß die Störung in niedrigster Näherung einer Wellengleichung über dem Hintergrund genügt, während in nächster Näherung der

nach den üblichen Regeln formal gebildete Energie-Impulstensor der Störung (bzw. sein Zeitmittel) als Quelle für die Hintergrundmetrik fungiert. Dies wurde von R. Isaacson gezeigt[5].)

6.1.4 Ausstrahlung

Um die Ausstrahlung von Gravitationswellen durch ein System von Massen zu untersuchen, betrachten wir retardierte Lösungen von (6.1.2).

$$\varphi_{ik}(\boldsymbol{x}_0, t) = -\kappa \int_{\text{Quelle}} T_{ik}\left(\boldsymbol{x}, t - \frac{r}{c}\right) \frac{\mathrm{d}^3 x}{4\pi r}, \tag{6.1.26}$$

wobei $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|$ und $\boldsymbol{x}_0$ der Ortsvektor des Aufpunktes ist. (6.1.26) erfüllt wegen der Energie-Impulserhaltung auch (6.1.4). Bei Vernachlässigung von Retardierungseffekten in der Quelle erhalten wir in großer Entfernung

$$\phi_{ik}(\boldsymbol{x}_0, t) = -\frac{\kappa}{4\pi r_0} \int T_{ik}^{\text{ret}}\, \mathrm{d}^3 x, \tag{6.1.27}$$

wobei $T_{ik}^{\text{ret}} = T_{ik}(\boldsymbol{x}, t - r_0/c)$ und $r_0 = |\boldsymbol{x}_0|$ ist. Die Ersetzung von r/c durch r_0/c beim retardierten Zeitargument entspricht genau einer Multipolentwicklung, wobei wir nur den ersten Term (hier Quadrupol, in der Elektrodynamik Dipol) beibehalten. Diese Näherung ist gültig, wenn die Wellenlänge der Strahlung viel größer als die Lineardimensionen der Quelle ist.

Das aus $T^{ik}{}_{,k} = 0$ folgende Laue-Theorem (3.2.25)

$$\int \mathrm{d}^3 x\, T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mathrm{d}^3 x\, T_{00}\, x^\alpha x^\beta \tag{6.1.28}$$

erlaubt es nun, alle Komponenten $\phi_{\alpha\beta}$ durch $T_{00} = \rho$ (Massendichte) auszudrücken (Punkt = Zeitableitung):

$$\phi_{\alpha\beta} = -\frac{\kappa}{8\pi r_0} \int \mathrm{d}^3 x\, x_\alpha x_\beta\, \ddot{\rho}_{\text{ret}}. \tag{6.1.29}$$

Die $\phi^{0\alpha}$ ergeben sich dann aus (6.1.4).

Bei der Berechnung der (etwa in x-Richtung) abgestrahlten Energie können wir das Feld in großer Entfernung und in kleinen Transversalbereichen als ebene Welle ansehen. Für diesen Fall kennen wir bereits den Energiestrom (6.1.23, 24), der sich sofort zu

$$t_0{}^1 = \frac{2}{\kappa}\left(\frac{\kappa}{8\pi r_0}\right)^2 \left[\frac{1}{4}\left(\dddot{Q}_{22}^{\text{ret}} - \dddot{Q}_{33}^{\text{ret}}\right)^2 + \left(\dddot{Q}_{23}^{\text{ret}}\right)^2\right] \tag{6.1.30}$$

ergibt, wobei

[5] R. Isaacson, Phys. Rev. **166**, 1263 und 1272 (1968).

$$\boxed{Q_{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3x \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\, r^2 \right) \rho} \tag{6.1.31}$$

der *Quadrupoltensor* der Quelle ist. Die Verallgemeinerung von (6.1.30) auf beliebige Richtungen ist

$$-t_0{}^\alpha n_\alpha = \frac{\kappa}{32\pi^2 r_0^2} \left[\frac{1}{4} \left(\dddot{Q}^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta}\, n_\alpha\, n_\beta \right)^2 + \frac{1}{2}\, \dddot{Q}^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta}\, \dddot{Q}^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta} - \dddot{Q}^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta}\, \dddot{Q}^{\mathrm{ret}}_{\alpha\gamma}\, n_\beta\, n_\gamma \right] \tag{6.1.32}$$

($t_0{}^\alpha n_\alpha$ ist der radiale Energiestrom, der Einheitsvektor n_α gibt die Richtung der Energieströmung an). Man überzeugt sich leicht, daß (6.1.32) für $n^\alpha = (1, 0, 0)$ in (6.1.31) übergeht. Daß (6.1.32) die korrekte Verallgemeinerung von (6.1.31) ist, folgt daraus, daß die drei in (6.1.32) auftretenden Terme die einzigen quadratischen Invarianten sind, die man aus $Q_{\alpha\beta}$ und n_α bilden kann. Diese Formel erlaubt es, die *Winkelverteilung* der Strahlung zu berechnen (s. Aufgabe).

Für die gesamte Energieströmung durch die Kugel vom Radius r_0 erhalten wir unter Verwendung der Hilfsformeln

$$\int n_\alpha n_\beta \,\mathrm{d}\Omega = \delta_{\alpha\beta} \frac{4\pi}{3}, \qquad \int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta \,\mathrm{d}\Omega = (\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma}) \frac{4\pi}{15}$$

(rechts müssen totalsymmetrische drehinvariante Tensoren stehen, deren Koeffizienten durch Spurbildung ermittelt sind) den gesamten Energieverlust der Quelle zu

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{G}{5c^5}\, \dddot{Q}^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta}\, \dddot{Q}^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta}\,.} \tag{6.1.33}$$

Bei (6.1.33) fällt auf, daß es keine Terme gibt, die von der Gesamtmasse und dem Dipolmoment abhängen. Die Abwesenheit von Dipolstrahlung ist eine direkte Konsequenz der (approximativen) Impulserhaltung, da die Zeitableitung des Dipolmoments der Massenverteilung aufgrund des Äquivalenzprinzips gerade mit dem Gesamtimpuls übereinstimmt. Die Abwesenheit von Monopolstrahlung haben wir im Abschnitt 3.3 sogar streng bewiesen, da es keine zeitabhängigen kugelsymmetrischen Lösungen der Vakuumgleichungen $G_{ik} = 0$ gibt (Birkhoff-Theorem).

Aufgaben

1. Zeige, daß die Metrik (6.1.15) zeitlich so variiert, daß Flächeninhalte konstant bleiben („Scherungswellen").

2. Verifiziere die angegebenen Eigenschaften der Polarisationszustände. (*Hinweis:* Benutze komplexe Zahlen $y + iz$ usw.)

3. Zwei gleiche Massen laufen mit gleicher Frequenz ω auf einer Kreisbahn. Untersuche das Strahlungsfeld; zeige insbesondere: a) die Frequenz der Strahlung ist 2ω, b) die Strahlung ist zirkularpolarisiert, c) die Ausstrahlung verschwindet (in der Quadrupolnäherung), wenn der Winkelabstand der Massen 90° ist.

4. Zeige, daß die Winkelverteilung der Abstrahlung für einen rotationssymmetrischen Sender $\propto \sin^4\theta$ ist (θ = Winkel zur Symmetrieachse).

6.2 Strahlung von Teilchen im Schwarzschild-Feld

Wir wenden nun die bisher entwickelte Theorie auf ein Teilchen der Masse m an, das in der Schwarzschild-Metrik einer Masse $\mathcal{M} \gg m$ frei fällt. Die dabei ausgesandte Strahlung ist als mögliche Erklärung für die im nächsten Abschnitt zu besprechenden Weberschen Experimente von Bedeutung. Der größeren Übersichtlichkeit halber werden wir uns bei den folgenden Überlegungen auf zwei Spezialfälle, nämlich Kreisbahnen und radialen Fall ins Zentrum, beschränken.

Zur Auswertung von (6.1.33) benötigen wir die dritte Zeitableitung des Quadrupolmoments (6.1.31). Für zwei Massen $\mathcal{M}$ und m, die sich im Abstand y_α bzw. x_α vom Ursprung befinden, ist

$$Q_{\alpha\beta} = \mathcal{M}\left(y_\alpha y_\beta - \frac{1}{3}y^2\delta_{\alpha\beta}\right) + m\left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}x^2\right). \tag{6.2.1}$$

Legen wir den gemeinsamen Schwerpunkt in den Ursprung, so ist $\mathcal{M}y_\alpha + mx_\alpha = 0$; setzen wir dies in (6.2.1) ein und drücken $Q_{\alpha\beta}$ durch die Relativkoordinaten $r_\alpha = x_\alpha - y_\alpha$ der beiden Massen aus, so wird für $m/\mathcal{M} \ll 1$

$$Q_{\alpha\beta} = m\left(r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right). \tag{6.2.2}$$

Für *Kreisbahnen* ist r^2 = const und fällt daher bei der Bildung der Zeitableitung weg. Legen wir die Kreisbahn in die (x, y)-Ebene, so wird

$$\dddot{Q}_{\alpha\beta}\dddot{Q}_{\alpha\beta} = \dddot{Q}_{11}^2 + 2\dddot{Q}_{12}^2 + \dddot{Q}_{22}^2 = 32m^2r^4\omega^6, \tag{6.2.3}$$

wobei ω die Kreisfrequenz der Bahn ist, die in Newtonscher Näherung durch $\omega^2r^3 = G\mathcal{M}$ gegeben ist. Setzt man dies in (6.2.3) ein, so ergibt sich für die ausgestrahlte Energie

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{32}{5c^5}G^4m^2\mathcal{M}^3/r^5 = -\frac{c^5}{5G}\left(\frac{2M}{r}\right)^3\left(\frac{2\mathrm{m}}{r}\right)^2. \tag{6.2.4}$$

Wir haben dabei wieder die Massen durch ihre Schwarzschild-Radien ausgedrückt, die beiden Klammerausdrücke in (6.2.4) sind dimensionslos. Daher muß $c^5/5G$ die Dimension einer Leistung haben, es ist

$$\frac{c^5}{5G} = 7.29 \cdot 10^{58}\,\mathrm{erg/s} = 4 \cdot 10^4 \mathcal{M}_\odot\, c^2/\mathrm{s}. \tag{6.2.5}$$

Wenn die Testmasse m bis in die Nähe des Schwarzschild-Radius $2M$ fallen kann, so wird kurzzeitig eine enorme Intensität der Gravitationsstrahlung erreicht ($c^5/5G$ entspricht der $2 \cdot 10^{25}$-fachen Leuchtkraft der Sonne), so daß man dabei hoffen kann, beobachtbare Effekte zu erhalten. Allerdings ist die Strahlungsintensität, die von Körpern ausgeht, die im Sonnensystem fallen, nur verschwindend gering, da für die lineare Ausdehnung R der Planeten und der Sonne stets $R \gg 2M$ ist und daher die Umgebung des Schwarzschild-Radius nie erreicht wird. So strahlt z. B. ein die Erde umkreisender Satellit mit $m = 10^6$ g eine Leistung $\approx 10^{-35}$ Watt ab, während die Erde selbst auf ihrer Bahn um die Sonne etwa 18 Watt in Form von Gravitationswellen abstrahlt.

Diese Beispiele legen bereits nahe, daß es kaum möglich ist, in einem Laborversuch einen leistungsfähigen Sender für Gravitationswellen aufzubauen und seine Strahlung zu messen[6]. Gravitationswellen merklicher Intensität können nur von Systemen mit Radien $R \approx 2M$ stammen, also von Körpern, die durch die Wirkung ihrer Eigengravitation hochgradig kollabiert sind. Bevor wir auf diese Möglichkeit und die Experimente zur Messung von Gravitationswellen näher eingehen, wollen wir aber die theoretische Untersuchung der Strahlung noch etwas weiterführen.

Der Energieverlust (6.2.4) bewirkt eine allmähliche Verringerung des Bahnradius r, der in der hier benutzten Newtonschen Näherung mit der Energie E der Bahn durch

$$E = -G\mathcal{M}m/2r \tag{6.2.6}$$

zusammenhängt. Aus

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{G\mathcal{M}m}{2r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{c^5}{5G}\left(\frac{2M}{r}\right)^3\left(\frac{2\mathrm{m}}{r}\right)^2 \tag{6.2.7}$$

folgt nach kurzer Rechnung

$$r^4 = r_0^4 - \frac{256}{5}\,\mathrm{m}\,M^2 ct. \tag{6.2.8}$$

Der Radius der Bahn nimmt demnach in endlicher Zeit auf Null ab. Allerdings ist das bei der Berechnung von (6.1.33) eingeschlagene lineare Näherungsverfahren nur für $r \gg 2M$ berechtigt.

Die *Frequenz der Strahlung* folgt aus (6.1.29) zu

[6] Ausführliche Untersuchungen dazu wurden von J. Weber (1961) angestellt.

$$\nu = \frac{c}{\pi r}\sqrt{\frac{M}{r}} \tag{6.2.9}$$

(doppelte Frequenz der Bahnbewegung: $\omega^2 = GM/r^3$).

Die obigen Resultate wurden von Peters[7] auf *elliptische Bahnen* verallgemeinert. Bei einer Bahn mit numerischer Exzentrizität ϵ und großer Halbachse $\mathcal{A}$ erhält er als Verallgemeinerung von (6.2.4)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{32c^2}{5G}\frac{M^2\mathrm{m}^2(M+\mathrm{m})}{\mathcal{A}^5(1-\epsilon^2)^{1/2}}\left(1+\frac{73}{24}\epsilon^2+\frac{37}{96}\epsilon^4\right). \tag{6.2.4a}$$

Peters hat auch die durch Abstrahlung von Gravitationswellen bewirkte allmähliche Verringerung des Bahndrehimpulsvektors L_α berechnet:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{2G}{5c^5}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\dddot{Q}_{\beta\delta}\dddot{Q}_{\gamma\delta}.} \tag{6.2.10}$$

Für elliptische Bahnen folgt aus (6.2.9) und (6.2.10) eine allmähliche Abnahme der Exzentrizität ϵ der Bahn. Auch der Radius der Bahn verringert sich langsam, wobei die gesamte Bindungsenergie in Form von Gravitationswellen abgestrahlt wird. Dieser Vorgang läuft so lange ab, bis die letzte in der Schwarzschild-Metrik mögliche stabile Kreisbahn mit Radius $r = 6M$ erreicht ist (s. Abbildung 4.3). Dieser Kreisbahn entspricht eine Energie $E = -mc^2/18$, so daß bis zum Erreichen von $r = 6M$ insgesamt etwa 5.5% der Ruhmasse des fallenden Körpers an Gravitationsenergie ausgesendet werden. Etwa die Hälfte dieser Strahlung wird dabei beim Übergang von $20M$ auf $6M$ frei, wie man aus (6.2.6) sieht, d. h. innerhalb eines Zeitraumes

$$t = 10^{-2}\,\mathrm{s}\left(\frac{M}{\mathrm{m}}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right), \tag{6.2.11}$$

wie man aus (6.2.8) sieht. Die mittlere Frequenz der Strahlung folgt aus (6.2.9) zu

$$\nu = 2\cdot 10^3\,\mathrm{Hz}\left(\frac{M_\odot}{M}\right), \tag{6.2.12}$$

wenn man den Mittelwert $r = 10M$ verwendet.

Der weitere Verlauf der Bahnkurve und der Ausstrahlung für $r < 6M$ entspricht etwa dem rein radialen Fall ins Zentrum, dem wir uns nun zuwenden. Die elementare Auswertung von (6.1.33) ergibt dabei

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{c^3}{5G}\frac{8}{3}\frac{M^2\mathrm{m}^2}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{6.2.13}$$

[7] P. C. Peters, Phys. Rev. **136B**, 1224 (1964).

Wenn wir eine Radialbewegung mit Gesamtenergie Null betrachten, so folgt aus (4.3.8a), (4.3.9) wegen $l = 0$

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{c\,\mathrm{d}s}\right)^2 = \frac{2M}{r}, \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{6.2.14}$$

so daß sich für die gesamte abgestrahlte Energie

$$\begin{aligned} E &= -\int \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{8c^3}{15G} M^2 \mathrm{m}^2 \int \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}r}{r^4} \\ &= \frac{8c^4}{15G} M^2 \mathrm{m}^2 \int_{2M}^{\infty} \sqrt{\frac{2M}{r}}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{r^4} \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

ergibt. Die elementare Integration führt auf

$$E = \frac{2}{945} mc^2 \left(\frac{\mathrm{m}}{M}\right) = 0.0022\, mc^2 \left(\frac{\mathrm{m}}{M}\right). \tag{6.2.16}$$

Beim radialen Fall wird daher nur ein sehr kleiner Bruchteil von mc^2 ausgestrahlt. Allerdings ist die lineare Näherung im Bereich $r \approx 3M$, aus dem der Hauptteil der Strahlung stammt, nicht mehr anwendbar. Davis, Ruffini, Press und Price[8] haben daher die Rechnungen unter Verwendung eines besseren, auf Zerilli[9] zurückgehenden Näherungsverfahrens wiederholt. Dabei ergibt sich für die beim radialen Fall emittierte Strahlung

$$E = 0.01\, mc^2 \left(\frac{\mathrm{m}}{M}\right). \tag{6.2.17}$$

Die lineare Näherung unterschätzt daher die ausgestrahlte Energie um einen Faktor fünf. Abbildung 6.3a zeigt die von diesen Autoren erhaltene Frequenzverteilung der Strahlung. Abbildung 6.3b die Beiträge der Multipole $L = 2$ (Quadrupol), $L = 3$ (Oktupol) und $L = 4$. Man sieht, daß der Hauptbeitrag zur Strahlung vom Quadrupolterm stammt, aber auch der Oktupol noch einen Beitrag liefert.

Das Maximum der Frequenzverteilung liegt bei

$$\omega_0 M = 2\pi\nu_0 M = 0.33$$

oder

$$\nu_0 = 10^3\,\mathrm{Hz}\left(\frac{M_\odot}{M}\right). \tag{6.2.18}$$

Da diese Strahlung im wesentlichen während des Falles von $10M$ bis $2M$ ausgestrahlt wird, ist ihre Dauer nur etwa $t \approx 1/\nu_0 \approx 10^{-3} M/M_\odot$ s.

[8] M. Davis, R. Ruffini, W. Press, R. Price, Phys. Rev. Lett. **27**, 1466 (1971).
[9] F. J. Zerilli, Phys. Rev. **D2**, 2141 (1971).

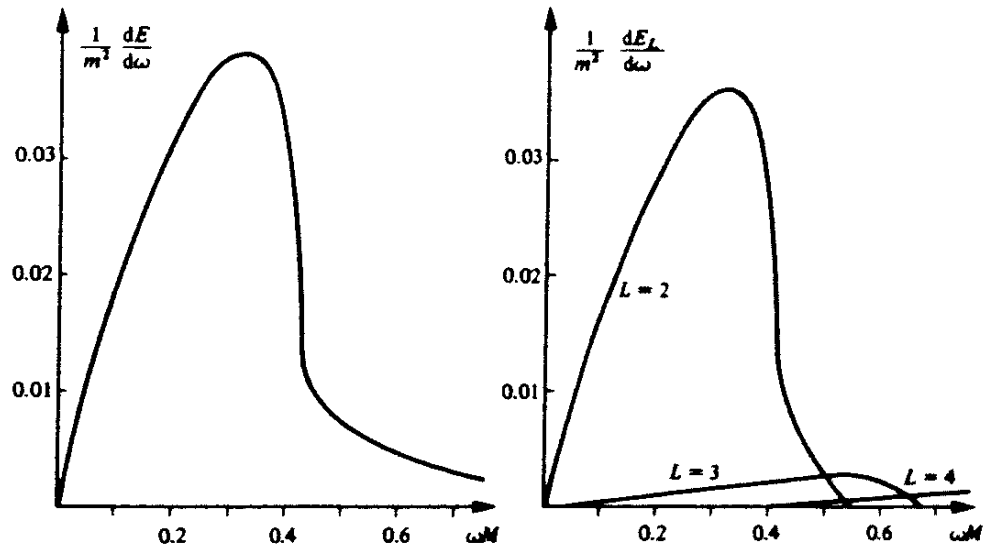

Abbildung 6.3: Spektrum der Gravitationsstrahlung beim Fall eines Teilchens der Masse m in ein schwarzes Loch der Masse $\mathcal{M}$: Multipolentwicklung.

6.3 Nachweis von Gravitationswellen

Die Überlegungen des vorangehenden Abschnitts haben gezeigt, daß ein Nachweis von im Labor erzeugten Gravitationswellen, die der Hertz'schen Entdeckung elektromagnetischer Wellen entsprechen würde, derzeit nicht realisierbar ist. Es verbleibt die Möglichkeit, Schwerewellen astrophysikalischen Ursprungs zu messen. Ein derartiges Experiment wurde erstmals 1960 von J. Weber an der University of Maryland begonnen. Weber benutzte als Detektoren für Gravitationswellen eine Reihe von Aluminiumzylindern, die eine Länge von 153 cm, Durchmesser zwischen 60 und 90 cm, eine Masse von etwa 10^6 g, eine Eigenfrequenz (der Grundschwingung) von 1660 Hertz und eine Dämpfung $\gamma = 10^{-5}\omega$ aufweisen. Nach (6.1.25) beträgt der Absorptionsquerschnitt eines derartigen Detektors im Falle der Resonanz $\sigma(\omega_0) = 10^{-19}\,\mathrm{cm}^2$. Damit Signale erzielt werden, die das thermische Rauschen überschreiten (das zu einer Energie $kT/2 = 10^{-14}$ erg der Grundschwingung führt, entsprechend einer Amplitude von etwa 10^{-14} cm), muß der in Form von Gravitationswellen einfallende Energiefluß innerhalb der Bandbreite der Resonanz des Detektors $\Delta\omega \simeq \gamma \simeq 10^{-5}\omega$) rund 10^4 erg/cm^{2}s betragen, falls es sich um Signale von einigen Sekunden handelt, während für kürzere Signale, wie sie Weber beobachtete, das zeitliche Integral des Energieflusses 10^4 erg/cm^2 erreichen muß[10], damit die vom Detektor absorbierte Energie etwa gleich $kT/2$ ist.

Um Signale und Rauschen zu unterscheiden und nichtgravitative Effekte zu eliminieren, stellte Weber zwei derartige Zylinder in einem Abstand von 1000 km in Maryland und in Chicago auf und beobachtete Koinzidenzen, d. h.

[10]Siehe etwa G. W. Gibbons, S. W. Hawking, Phys. Rev. **D4**, 2191 (1971).

ein gleichzeitiges Ansteigen des Signals in beiden Zylindern über eine gewisse Schwelle, wobei die Genauigkeit der Zeitauflösung etwa 0.1 s betrug. Die Zahlen dieser Koinzidenzen wurden registriert und die aufgrund des thermischen Rauschens erwartete Anzahl zufälliger Koinzidenzen abgezogen.

Weber beobachtete zwischen 1969 und 1974 tatsächlich zahlreiche Koinzidenzen und versuchte zu zeigen, daß diese nicht etwa auf thermische Schwankungen oder seismische Ursachen zurückzuführen sind. Da es in der Folge nicht gelang, die Weberschen Ergebnisse auch in anderen Laboratorien zu reproduzieren, besteht heute weitgehende Übereinstimmung darüber, daß die von Weber beobachteten Ereignisse nicht auf Gravitationswellen zurückgehen. Auch die von Webers Gruppe im Zusammenhang mit der Supernova 1987 behaupteten Signale blieben kontrovers. Bleibendes – und unbestrittenes – Verdienst seiner Pionierarbeit ist es jedoch, der Forschung auf diesem Gebiet den entscheidenden Impuls gegeben zu haben. Zwei Entwicklungen wurden dadurch ausgelöst.

Erstens wurden durch die Versuche, die Weberschen Ergebnisse astrophysikalisch zu deuten, das theoretische Verständnis der Gravitationsstrahlung wesentlich erweitert. Ein Beispiel dafür ist die Untersuchung der Gravitationssynchrotronstrahlung[11]. Sie sollte – wegen der starken Bündelung in der Bahnebene – die Strahlung in der galaktischen Ebene konzentrieren und damit einen geringeren Energiefluß zur Erklärung der Weberschen Daten erforderlich machen. Allerdings erwies sich in der Folge die hohe Polarisierung derartiger Strahlung als mit den Daten unverträglich. Inzwischen sind die Charakteristika der Gravitationsstrahlung für zahlreiche mögliche astrophysikalische Quellen, wie etwa kollabierende Sterne oder kompakte Doppelsternsysteme, bekannt[12].

Zweitens begannen in den letzten Jahren mehrere Gruppen mit dem Bau von „Weber-Zylindern" mit erhöhter Empfindlichkeit. Bis 1975 wurden damit rund 15 Experimente ausgeführt, ohne die von Weber beobachteten Ereignisse zu bestätigen[13]. An der Erhöhung der Empfindlichkeit, z. B. durch Kühlung, wird laufend gearbeitet. Dabei erfordert der Nachweis von Gravitationswellen mit diesem Detektortyp wahrscheinlich die Messung von Auslenkungen der Größenordnung 10^{-17} cm. In diesem Bereich ist der Detektor quantenmechanisch zu betrachten und der gleichzeitigen Messung von Amplitude und Phase sind durch die Heisenbergsche Unschärferelation Grenzen gesetzt. Das hat zur Untersuchung sogenannter „Quantum-Non-Demolition"-Messungen geführt[14].

Aber auch andere Detektortypen werden derzeit untersucht. Der Einfluß von Gravitationswellen auf die Metrik der Raum-Zeit kann beispielsweise auch über die Doppler-Verschiebung von Radarsignalen bestimmt werden, die an Raumschiffen reflektiert werden („Dopplertracking"). Auch elektromagnetische Resonatoren und andere Detektorgeometrien werden derzeit erforscht[15].

[11] s. Breuer (1975).
[12] s. Smarr (1979).
[13] E. Amaldi, G. Pizella in: de Finis (1979).
[14] C. M. Caves et al., Reviews of Mod. Phys. **52**, 341 (1980).
[15] J. A. Tyson, R. P. Giffand, Ann. Rev. Astr. Astrophys. **16**, 521 (1978); K. Thorne, Rev.

Die größten Hoffnungen richten sich dabei auf die in Entwicklung befindlichen Michelson-(laser-)interferometrischen Anordnungen von mehreren Kilometern Ausdehnung mit an Pendeln angebrachten Spiegeln (LIGO = Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory in den USA, VIRGO in Europa). Das Ziel aller dieser Bemühungen ist eine Steigerung der Detektorempfindlichkeit in einem Ausmaß, das gestattet, Gravitationswellen nachzuweisen und zu analysieren, die aus Sternzusammenbrüchen im Virgo-Haufen stammen. Während nämlich Supernovae in unserer Galaxis sich nur etwa alle 30 Jahre ereignen – die letzte im Jahre 1987 gab prompt Anlaß zu Gravitationswellen-Kontroversen –, sollte sich die Ereignisstatistik auf eines pro Monat vebessern, wenn Ereignisse im Virgohaufen registrierbar werden. Damit wäre das Zeitalter der Gravitationswellenastronomie eingeleitet. Für Details sei auf entsprechende Kapitel in den zu Abschnitt 4.4.c genannten Sammelbänden sowie auf Blair (1991), Janis & Porter (1993) und Saulson (1994) verwiesen.

Während die Experimente zum direkten Nachweis von Gravitationswellen also bis heute noch zu keinen schlüssigen Ergebnissen geführt haben, gelang im Jahre 1978 ein indirekter Beweis für die Existenz dieser Wellen. Der bereits 1975 entdeckte[16] Pulsar PSR 1913+16 erwies sich nämlich als Teil eines Doppelsternsystems. Mit einer Periode von 0,32 Tagen kreist der Pulsar um einen unsichtbaren Begleitstern, der ebenfalls ein Neutronenstern oder ein Weißer Zwerg sein muß. Die Aussendung von Gravitationswellen durch das Doppelsternsystem bedingt einen Energieverlust, der die beiden Sterne immer rascher umeinander kreisen läßt. Im Jahre 1978 gelang J. H. Taylor und seinen Mitarbeitern an der University of Massachusetts erstmals die Messung der entsprechenden Abnahme der Bahnperiode. Sie beträgt rund 10^{-4} s pro Jahr und stimmt mit den Vorhersagen der Relativitätstheorie überein (Abbildung 6.4).[17]

Seither konnte die Genauigkeit der Übereinstimmung aufgrund von Datenakkumulierung, Verbesserung der Meß- und Analysetechnik sowie der Tatsache, daß es gerade die relativistischen Effekte im System sind, die eine Bestimmung der Massen und Bahnparameter erlauben (während die Newtonsche Theorie hier nur die sog. Massenfunktion, allgemeiner nur Kombinationen von Systemparametern liefert), auf 1% gesteigert werden[18]. Aufgrund der resultierenden Bedeutung des Systems PSR 1913+16 wurde an die Entdecker, Hulse und Taylor, der Nobelpreis 1993 vergeben. (Im Jahre 1990 wurde ein weiteres Objekt dieses Typs, PSR 1534+12, entdeckt[19], bei dem erstmals die Spin-Bahn-Kopplung (4.1.10) eine Rolle zu spielen scheint.)

Damit ist zumindest ein indirekter Nachweis für die Existenz von Gravita-

Mod. Phys. **52**, 285 (1980); D. H. Douglas, V. B. Braginsky in Hawking & Israel (1979); J. Weber in Held (1980).

[16] R. A. Hulse, J. A. Taylor, Astrophys. Lett. **195**, L51 (1975).

[17] J. H. Taylor, L. A. Fowler, P. M. Mc Culloch, Nature **277**, 437 (1979); J. M. Weisberg, J. H. Taylor, GRG **13**, 1 (1981); Astrophys. J. **253**, 908 (1982), **345**, 434 (1989).

[18] T. Piran, Sci. Am. **272**, #5, 34 (1995), sowie einschlägige Artikel in den zu Abschnitt 4.4.c genannten Sammelbänden.

[19] A. Wolszczan, Nature **350**, 688 (1991).

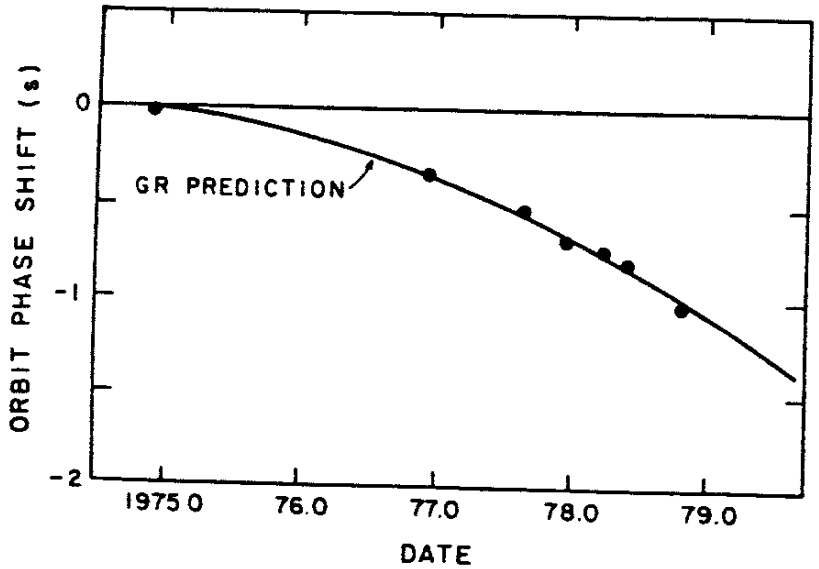

Abbildung 6.4: Die Abnahme der Bahnperiode des Pulsars PSR 1913+16 stimmt mit der Vorhersage der Relativitätstheorie überein.

tionswellen gelungen; ihre niedrige Frequenz liegt allerdings in diesem Fall weit außerhalb der Bandbreite aller denkbaren irdischen Detektoren.

Kapitel 7

Neue differentialgeometrische Methoden

Wir haben bisher den mathematischen Formalismus ausschließich auf Tensoren aufgebaut, die wir durch ihre Komponenten bezüglich eines Koordinatensystems festgelegt haben. Diese koordinatenmäßige Festlegung hat begriffliche und rechentechnische Nachteile. So bilden die Vektoren in einem Punkt P der X^n zwar einen Vektorraum (den *Tangentialraum* in P), sind aber dort bisher nur durch ihre Komponenten in bezug auf eine vom Koordinatensystem mitgelieferte *natürliche* oder *holonome Basis* gegeben. Oft wären jedoch Komponenten bezüglich anderer Basen im Tangentialraum wegen ihrer Orthogonalität oder Anpassung an Symmetrierichtungen der X^n rechentechnisch günstiger. So sind orthonormale Basen z. B. zur Einführung von Spinorfeldern im Riemannschen Raum notwendig, doch werden sie i. a. von keinem Koordinatensystem geliefert (*anholonome Basen*).

Die von Gauß, Riemann, Christoffel, Ricci, Bianchi, Levi-Cività, Einstein und Weyl entwickelte klassische Riemannsche Geometrie (Kapitel 2) wurde daher zunächst von Cartan, Schouten u.a. von der Beschränkung auf holonome Basen befreit und später von Chevalley, Koszul, Nomizu u. a. auf möglichst koordinaten- und basisunabhängige Begriffe aufgebaut.

Wir wollen hier – unter Verzicht auf mathematische Strenge – einige der neueren Formulierungen besprechen, die sich für physikalische Anwendungen (Berechnung des Riemann-Tensors, Integration auf X^n, Spinorfelder) als nützlich erwiesen haben.

7.1 Tangentialvektoren und Tangentialraum

Um eine koordinaten- und basisunabhängige Definition eines Tangentialvektors v in einem Punkt P einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X^n zu gewinnen, gehen wir folgendermaßen vor.

Auf der X^n sei eine skalare Funktion F gegeben, d. h. eine Abbildung der X^n in $\mathbf{R}$ (Menge der reellen Zahlen). Abbildung 7.1 zeigt, daß F von der Funktion $f(x^i)$ zu unterscheiden ist, die eine Abbildung $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ vermittelt und den koordinatenmäßigen Ausdruck für F darstellt. Diese Definition von F als Abbildung der X^n in $\mathbf{R}$ ist unabhängig von der Existenz des Koordinatensystems x, also koordinatenunabhängig. Die begriffliche Unterscheidung zwischen f und F haben wir im Kapitel 2 der Einfachheit halber nicht formelmäßig getroffen. F heiße nun differenzierbar, wenn f differenzierbar ist.

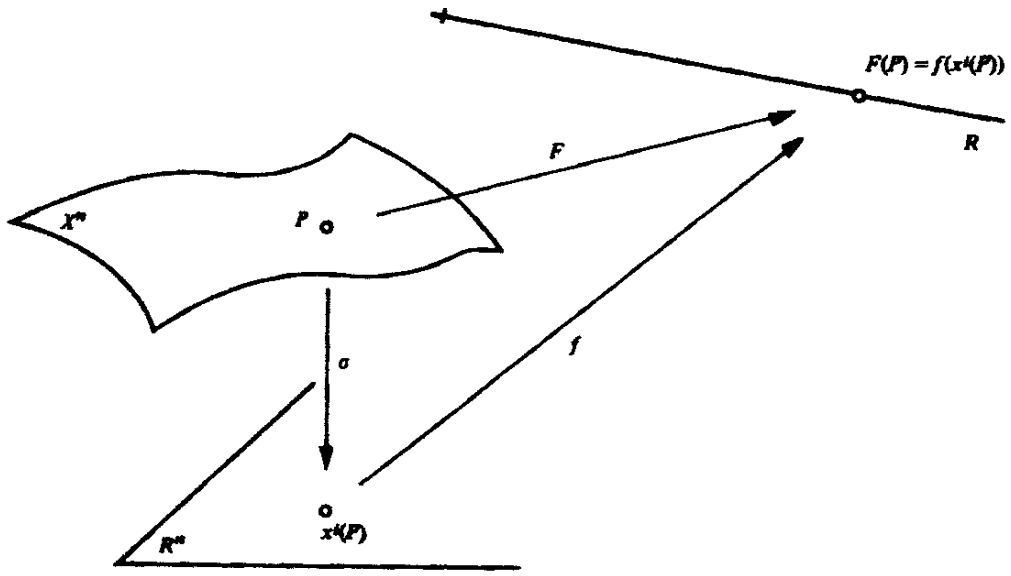

Abbildung 7.1: Zur Definition von F und f.

Wir können nun zur Einführung des Begriffes eines *Tangentialvektors* in einem Punkt P von X^n übergehen. Wir betrachten dazu den Raum $\mathcal{F}$ der (in einer Umgebung von P definierten, genügend oft differenzierbaren) Funktionen F auf X^n. Ein Tangentialvektor v im Punkt P ist dann eine lineare Abbildung des linearen Raumes $\mathcal{F}$ in die reellen Zahlen, $F \to v(F)$ = reelle Zahl, welche die Kettenregel

$$v(G) = \sum_i \left.\frac{\partial g}{\partial G_i}\right|_P v(G_i) \tag{7.1.1}$$

erfüllt, wenn die Funktion $G \in \mathcal{F}$ als zusammengesetzte Funktion $G = g(G_1, G_2, \ldots)$ gegeben ist ($G_i \in \mathcal{F}$). Offenbar bilden die derart definierten

Tangentialvektoren einen Vektorraum, da mit u, v auch $\alpha u + v$, definiert durch $(\alpha u + v)(F) = \alpha u(F) + v(F)$, (7.1.1) erfüllt ($\alpha \in \mathbf{R}$).

Ist ein Koordinatensystem σ gegeben, so kann jede einzelne Koordinate x^i als Funktion $\in \mathcal{F}$ aufgefaßt werden. Wenn nun F durch $F = f(x^i)$ koordinatenmäßig dargestellt ist, kann man dies als zusammengesetzte Funktion lesen, und es gilt nach (7.1.1)

$$v(F) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P v(x^i) \tag{7.1.2}$$

(hier bedeutet $v(x^i)$: v angewendet auf die Funktion x^i, also nicht die übliche Kurzschreibweise für eine Funktion $v(x^1, x^2, \ldots, x^n)$!). Die Zahlen

$$v^i := v(x^i) \tag{7.1.3}$$

nennen wir die *Komponenten* des Vektors v in bezug auf das gegebene Koordinatensystem. Damit wird

$$v(F) = v^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P \tag{7.1.4}$$

Durch das Koordinatensystem sind automatisch in jedem Punkt n Tangentialvektoren ∂_i ($i = 1, \ldots, n$) mitgeliefert, die folgendermaßen definiert sind: ist $F = f(x^i)$ die Koordinatendarstellung von $F \in \mathcal{F}$, so sei

$$\partial_i|_P(F) := \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P . \tag{7.1.5}$$

(7.1.1) ist klarerweise erfüllt, und (7.1.4) schreibt sich jetzt $v(F) = v^i \partial_i(F)$ oder

$$v = v^i \, \partial_i|_P . \tag{7.1.6}$$

Dies zeigt, daß jeder Vektor als Linearkombination der n *Basisvektoren* ∂_i ($i = 1, \ldots, n$) geschrieben werden kann, deren Unabhängigkeit sich aus ihren Komponenten $\partial_i(x^k) = \delta_i^k$ ergibt. Die Tangentialvektoren in P bilden daher einen n-dimensionalen Vektorraum, den *Tangentialraum* T_P in P. Eine Basis in T_P nennen wir auch ein n-Bein.

Ein *Vektorfeld* wird durch Angabe eines Vektors in jedem Punkt festgelegt. Ein *n-Bein-Feld* besteht aus n Vektorfeldern, deren Vektoren in jedem Punkt linear unabhängig sind[1]. Spezielle n-Bein-Felder werden von den Basisvektoren $\{\partial_i\}$ bezüglich eines Koordinatensystems gebildet (*holonome* n-Bein-Felder). Nicht jedes n-Bein-Feld $\{e_i\}$ jedoch läßt sich als $\{\partial_i\}$ bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems auffassen (*anholonome* n-Bein-Felder: wegen eines formalen Kriteriums dafür siehe Aufg. 5). Wir werden sehen, daß gerade die

[1] Oft auch als *bewegliches n-Bein* (engl. moving frame, frz. repère mobile) bezeichnet.

Verwendung derartiger anholonomer n-Bein-Felder wegen ihrer größeren Flexibilität Vorteile bringt.

Nach diesen begrifflichen Klarstellungen wollen wir der einfacheren Schreibweise wegen die Unterscheidung zwischen F, f: ∂_i, $\partial/\partial x^i$ wieder fallen lassen und auch statt „Vektorfeld" vielfach „Vektor" schreiben, wie das bisher schon geschehen ist.

Aufgaben

1. Zeige, daß aus (7.1.1) folgt: $v(F) = 0$, wenn $F = \text{const}$.

2. Leite das Transformationsgesetz für holonome Vektorkomponenten bei Koordinatenwechsel aus (7.1.6,5.1) ab.

3. Ist v ein Vektorfeld, so ergeben die Werte $v(f)$, punktweise berechnet, zusammen wieder eine skalare Funktion. Zeige ihre Übereinstimmung mit der Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v f$.

4. Sei u ein weiteres Vektorfeld, dann kann $u(v(f))$ berechnet werden. Zeige, daß $uv(f) := u(v(f))$ nicht zur Definition eines neuen Vektorfeldes uv führt, daß aber die *Lie-Klammer*

$$[u, v] = uv - vu$$

(der Kommutator der beiden Differentialoperatoren) ein Vektorfeld ist, das mit der Lie-Ableitung $\mathcal{L}_u v$ (vgl. (2.10.6) übereinstimmt. Verifiziere die Jacobi-Identität

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0 \tag{7.1.7}$$

und formuliere sie auch als Kommutatorrelation für Lie-Ableitungen.

5. Zeige, daß für ein n-Bein-Feld $\{e_i\}$ die *Integrabilitätsbedingung* $[e_j, e_k] = 0$ jedenfalls notwendig für seine Holonomie ist (im Kleinen ist sie auch hinreichend). Für ein anholonomes n-Bein-Feld $\{e_i\}$ hingegen sind in der (stets möglichen) Zerlegung

$$[e_j, e_k] = C^i{}_{jk}\, e_i \tag{7.1.8}$$

nicht alle *Anholonomiekoeffizienten* $C^i{}_{jk}$ gleich null.

6. Eine (parametrisierte) Kurve γ in X^n ist formal eine Abildung $\gamma : I \to X^n$, wo I etwa das Intervall $[0, 1]$ ist. Sind x^i Koordinatenfunktionen, so ist $x^i(\tau) := x^i(\gamma(\tau))$ die koordinatenmäßige Beschreibung (Parameterdarstellung) von γ, und γ heißt differenzierbar, wenn $x^i(\tau)$ differenzierbar ist. a)

Zeige, daß das eine koordinatenunabhängige Feststellung ist. b) Zeige, daß durch $u : F \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(F \circ \gamma)|_{\tau=0}$ ein Tangentialvektor in $\gamma(0)$ definiert ist, die Tangente an γ im Punkt $\gamma(0)$ – wie lauten seine Komponenten bezüglich $\{x^i\}$?

7.2 Differentiale und der Kotangentialraum

Der Gebrauch von Differentialen $\mathrm{d}x^i$, $\mathrm{d}f$ etc. ist in der Physik üblich. Während diese Größen als „unendlich kleine Größen" streng mathematisch nicht existieren, sind sie doch für praktische Überlegungen sehr zweckmäßig. Allerdings ergeben sich bei mehrmaliger Anwendung der Operation „d" Schwierigkeiten. Auch liefert eine naive Multiplikation

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (x_{,u}\,\mathrm{d}u + x_{,v}\,\mathrm{d}v)(y_{,u}\,\mathrm{d}u + y_{,v}\,\mathrm{d}v)$$

nicht die richtige Transformation des Flächenelements $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ auf neue Koordinaten .

Mit den Überlegungen des vorigen Abschnitts in engem Zusammenhang steht aber ein Kalkül, der Differentialen einen mathematisch wohldefinierten Sinn gibt und außerdem einfache Regeln liefert, die die erwähnten Schwierigkeiten bei der Differentiation und Multiplikation von Differentialen beheben. Dabei muß man sich als Physiker zunächst von der Idee des „unendlich kleinen" Differentials freimachen. Die zu definierende Größe $\mathrm{d}f$ ist endlich, stimmt aber in den sonstigen Eigenschaften mit den Vorstellungen überein, die man von „$\mathrm{d}f = f_{,i}\,\mathrm{d}x^i$" hat. Zunächst bemerken wir, daß $\mathrm{d}f = f_{,i}\,\mathrm{d}x^i$ die (infinitesimale) Änderung von f in einer nicht spezifizierten Richtung ist. $\mathrm{d}f$ hat erst einen Wert, wenn wir die Richtung durch Angabe einer Kurve durch den betrachteten Punkt festlegen. Dann wird

$$\mathrm{d}f = f_{,i}(\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}s = f_{,i}\,u^i\,\mathrm{d}s,$$

wobei s ein beliebiger Kurvenparameter ist und $u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ die Komponenten des Tangentenvektors an die Kurve sind. $\mathrm{d}f$ hat daher erst dann einen Wert, wenn wir einen Tangentialvektor vorgeben, und dieser Wert hängt linear von dem Tangentialvektor ab. $\mathrm{d}f$ ist also ein lineares Funktional auf dem Raum T_P der Tangentialvektoren, und wir definieren

$$\mathrm{d}f(u) := f_{,i}\,u^i = u(f). \tag{7.2.1}$$

$\mathrm{d}f$ ist dasjenige lineare Funktional auf dem Raum T_P, das jedem Vektor $u \in T_P$ die Richtungsableitung (7.2.1) von f zuordnet. Diese Definition unterscheidet sich genau um den Faktor $\mathrm{d}s$ von der obigen naiven Version „$\mathrm{d}f(u) = u^i f_{,i}\mathrm{d}s$".

Da das Studium der linearen Funktionale auf einem beliebigen Vektorraum $\mathbf{V}$ (hier T_P) eine der Standardkonstruktionen der linearen Algebra ist, wollen wir hier nur kurz die notwendigen Begriffe wiederholen[2].

Die linearen Funktionale über $\mathbf{V}$ mit Werten in $\mathbf{R}$ bilden den zu $\mathbf{V}$ *dualen Vektorraum* $\mathbf{V}^*$, dessen Elemente Kovektoren genannt werden (hier Kotangentialvektoren). Für $a \in \mathbf{V}^*$, u, $v \in \mathbf{V}$ und α, $\beta \in \mathbf{R}$ gilt

$$\begin{aligned} a(v) &= \text{reelle Zahl (inneres Produkt von } a \text{ und } v) = \langle a, v \rangle \\ a(\alpha u + \beta v) &= \alpha\, a(u) + \beta\, a(v). \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

$\mathbf{V}^*$ ist tatsächlich ein Vektorraum, die Linearkombination $c = \alpha a + \beta b$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{V}^*$) zweier Kovektoren ist das durch $c(v) = \alpha a(v) + \beta b(v)$ gegebene lineare Funktional.

Ist $\{e_i\}$ eine Basis in $\mathbf{V}$, so konstruieren wir die duale Basis $\{e^j\}$ in $\mathbf{V}^*$ wie folgt. Sei $a \in \mathbf{V}^*$, $v = v^i e_i \in \mathbf{V}$, dann ist $a(v) = a(v^i e_i) = v^i a(e_i)$. Die Komponentenzuordnungen $v \to v^j$ sind aber selbst lineare Funktionale von v (v^j sind reelle Zahlen, die offenbar linear von v abhängen), die wir mit e^j bezeichnen:

$$e^j(v) = v^j. \tag{7.2.3}$$

Damit wird

$$a(v) = v^j a(e_j) = a(e_j)\, e^j(v) \tag{7.2.4}$$

oder, durch Vergleich des ersten mit dem letzten Ausdruck in (7.2.4)

$$a = a(e_j)\, e^j =: a_j\, e^j. \tag{7.2.5}$$

Die $\{e^j\}$ bilden daher eine Basis von $\mathbf{V}^*$, die duale Basis zu $\{e_j\}$. (7.2.5) zeigt auch, daß $\mathbf{V}^*$ die gleiche – hier stillschweigend als endlich angenommene – Dimension wie $\mathbf{V}$ hat. Setzen wir (7.2.5) in (7.2.4) ein, ergibt sich die gewohnte Form eines inneren Produktes:

$$a(v) = a_j v^j. \tag{7.2.6}$$

Durch Spezialisierung auf $a = e^j$, $v = e_k$ erhalten wir

$$e^j(e_k) = \delta^j{}_k. \tag{7.2.7}$$

Diese Relation drückt die Dualität der Basen aus.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen kehren wir zum Tangentialraum T_P zurück. Das Differential $\mathrm{d}f$ in P ist ein Element des zu T_P dualen *Kotangentialraumes* T_P^*, wobei

[2]Siehe z. B. Dieudonné (1976) III, Anhang; Sexl u. Urbantke (1992), Anhang B.

$$\mathrm{d}f(v) = v(f) = f_{,i}\, v^i. \tag{7.2.8}$$

besondere gilt für $f = x^i$ wegen (7.2.3)

$$\mathrm{d}x^j(v) = v(x^j) = v^j = e^j(v).$$

: zu $\{\partial_j\}$ duale Basis $\{e^j\}$ ist daher durch

$$e^j = \mathrm{d}x^j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{7.2.9}$$

;eben. Die Koordinatendifferentiale bilden also die holonomen Kobasisfelder, d (7.2.7) nimmt die Form

$$\mathrm{d}x^i(\partial_k) = \delta^i{}_k \tag{7.2.10}$$

Für die Komponentenzerlegung (7.2.5) eines beliebigen Kotangentialvektors : T_P^* erhalten wir in der holonomen Basis $\mathrm{d}x^j$

$$a = a_j\, \mathrm{d}x^j. \tag{7.2.11}$$

alog zu den Vektorfeldern können wir nun *Kovektorfelder* betrachten. wobei em Punkt $P \in X^n$ ein Kovektor zugeordnet wird. Die Komponentenzerle- ıg eines Kovektorfeldes lautet

$$a = a_j(x)\, \mathrm{d}x^j. \tag{7.2.12}$$

her heißt a auch lineare Differentialform[3].

ıfgaben

Bestimme das Transformationsgesetz der Kovektorkomponenten bei Koordinatenwechsel .

Wie transformieren Kobasis und Komponenten von Vektoren und Kovektoren bei einem Basiswechsel

$$e_{\bar{j}} = p^k{}_{\bar{j}}\, e_k \tag{7.2.13}$$

in T_P?

Zeige ohne Verwendung einer Basis. daß d die Kettenregel

$$\mathrm{d}(f(g)) = \frac{\partial f}{\partial g}\, \mathrm{d}g \tag{7.2.14}$$

erfüllt.

Anleitung: Benutze $\mathrm{d}f(u) = u(f)$.

[3] Nicht jedes Element a kann in der Form $a = \mathrm{d}f$ geschrieben werden, da die in (7.2.12) retenden a_j i. a. nicht $a_j = f_{,j}$ erfüllen.

7.3 Die Tensoralgebra

In den letzten beiden Abschnitten haben wir Vektoren und Kovektoren eingeführt und können nun zu Tensoren übergehen. Allgemein geschieht dies folgendermaßen. $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ seien Vektorräume der Dimensionen m und n; wir betrachten den Raum der bilinearen Funktionale über dem Cartesischen Produkt $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$. Für ein Element T dieses Raumes ist, soll also gelten

$$T(v, w) = \text{reelle Zahl},$$

$$T(\alpha v + v', w) = \alpha T(v, w) + T(v', w), \tag{7.3.1}$$

$$T(v, \alpha w + w') = \alpha T(v, w) + T(v, w').$$

Analog zur Situation beim Dualraum bilden diese bilinearen Funktionale wieder einen Vektorraum. Speziell heißt nun der Raum aller bilinearen Funktionale, die analog auf $\mathbf{V}^* \times \mathbf{W}^*$ definiert sind, das *Tensorprodukt* $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ der Räume $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$.

Eine Basis in $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ kann man folgendermaßen konstruieren: $\{e^i\}$ sei Basis in $\mathbf{V}^*$, dual zu $\{e_i\}$, die eine Basis in $\mathbf{V}$ bilden. Analog sei $\{f^\alpha\}$ Basis in $\mathbf{W}^*$, dual zu $\{f_\alpha\}$. Für ein beliebiges Element $T \in \mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ gilt dann wegen der Bilinearität von T ($a = a_i e^i \in \mathbf{V}^*$, $b = b_\alpha f^\alpha \in \mathbf{W}^*$)

$$T(a, b) = T(a_i e^i, b_\alpha f^\alpha) = a_i b_\alpha T^{i\alpha}, \tag{7.3.2}$$

wo

$$T^{i\alpha} := T(e^i, f^\alpha). \tag{7.3.3}$$

Definieren wir nun als *Tensorprodukt* $v \otimes w \in \mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ *zweier Vektoren* $v \in \mathbf{V}$, $w \in \mathbf{W}$ das durch

$$(v \otimes w)(a, b) = a(v)\, b(w) \tag{7.3.4}$$

für alle $a \in \mathbf{V}^*$, $b \in \mathbf{W}^*$ gegebene bilineare Funktional, so ist insbesondere für die Basisvektoren $(e_i \otimes f_\alpha)(a, b) = a(e_i)\, b(f_\alpha) = a_i\, b_\alpha$. Daher kann (7.3.2) in der Form $T(a, b) = T^{i\alpha}(e_i \otimes f_\alpha)(a, b)$, also

$$\boxed{T = T^{i\alpha} e_i \otimes f_\alpha} \tag{7.3.5}$$

geschrieben werden. Da die Anwendung der rechten Seite von (7.3.5) auf $e_i \otimes f_\alpha$ wieder (7.3.3) ergibt, ist die Zerlegung (7.3.5) eindeutig und $\{e_i \otimes f_\alpha\}$ damit eine Basis im Raum $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$, dessen Dimension somit mn beträgt.

Man sieht, daß die Räume $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ und $\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}$ isomorph sind und für $\mathbf{V} \neq \mathbf{W}$ gefahrlos identifiziert werden können.

Analog kann man Tensorprodukte von mehreren Vektorräumen definieren. Ein *Tensor* vom Typ (a, b) über $\mathbf{V}$ ist ein Element des Vektorraumes $\mathbf{V}^a{}_b$, der durch Tensorproduktbildung $\mathbf{V} \otimes \ldots \otimes \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{V}^*$ der Räume $\mathbf{V}$ (a mal) und $\mathbf{V}^*$ (b mal) entsteht. Wenn $\{e_i\}$ Basis in $\mathbf{V}$, $\{e^i\}$ Basis in $\mathbf{V}^*$ ist, so gilt für $T \in \mathbf{V}^a{}_b$

$$\boxed{T = T^{iklm\ldots}{}_{np\ldots}\, e_i \otimes e_k \otimes e_l \otimes e_m \ldots \otimes e^n \otimes e^p \ldots} \tag{7.3.6}$$

Dies zeigt die Übereinstimmung des hier eingeführten Tensorbegriffs mit demjenigen des Kapitels 2.

T heißt symmetrisch bzw. antisymmetrisch, wenn

$$\begin{aligned} T(\ldots, v, \ldots, w, \ldots) &= T(\ldots, w, \ldots, v, \ldots), \\ \text{bzw.} \qquad\qquad &= -T(\ldots, w, \ldots, v, \ldots), \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

wobei v, w entweder beide aus $\mathbf{V}$ oder beide aus $\mathbf{V}^*$ sind.

Durch einen nichtsingulären symmetrischen Tensor g vom Typ (0.2), den metrischen Tensor, wird in $\mathbf{V}$ ein *skalares Produkt* definiert

$$g(u, v) = g_{ik}\, u^i v^k = u \cdot v, \qquad g_{ik} := g(e_i, e_k) = g_{ki}. \tag{7.3.8}$$

(Nichtsingulär bedeutet, daß aus $g(u, v) = 0$ für alle $v \in \mathbf{V}$ auch $u = 0$ folgt.) Bei festem u ist $g(u, \ldots)$ ein lineares Funktional auf $\mathbf{V}$, d. h. ein Kovektor. Durch den metrischen Tensor wird daher jedem Vektor u ein Kovektor $g(u, \ldots)$ zugeordnet. Diese basisunabhängige Identifizierungsvorschrift zwischen Vektoren und Kovektoren ist die abstrakte Formulierung des Hinauf- bzw. Hinunterziehens eines Index.

Spezialisieren wir $\mathbf{V}$ nun auf den Tangentialraum T_P, so gilt in der holonomen Basis $\{\partial_i\}$

$$g(\partial_i, \partial_k) = g_{ik} \tag{7.3.9}$$

genau wie im Kapitel 2. Der Vorteil ist jetzt aber, daß wir durch Wahl einer anholonomen Basis $\{e_i\}$ z. B. erreichen können, daß $g(e_i, e_k) = \eta_{ik}$ im ganzen Raum wird (*orthonormale Basis*).

Während es nur mit Hilfe des metrischen Tensors möglich ist, $\mathbf{V}$ mit $\mathbf{V}^*$ auf basisunabhängige Art zu identifizieren, kann man dies bei $\mathbf{V}$ und $(\mathbf{V}^*)^*$ ohne Einführung einer zusätzlichen Struktur tun, und zwar durch die Zuordnung $v' \leftrightarrow v$ für $v' \in (\mathbf{V}^*)^*$, $v \in \mathbf{V}$, wenn $v'(a) = a(v)$ für jedes $a \in \mathbf{V}^*$. Wir schreiben dann auch $\langle a, v \rangle = \langle v, a \rangle$.

Die *Tensoralgebra* über $\mathbf{V}$ erhalten wir, indem wir die direkte Summe der Räume $\mathbf{V}^a{}_b$ bilden, wobei wir $\mathbf{V}^1{}_0 = \mathbf{V}$, $\mathbf{V}^0{}_1 = \mathbf{V}^*$, $\mathbf{V}^0{}_0 = \mathbf{R}$ (reelle Zahlen) setzen und als Multiplikation das Tensorprodukt $\mathbf{V}^a{}_b \otimes \mathbf{V}^p{}_q \approx \mathbf{V}^{a+p}{}_{b+q}$ benutzen.

Aufgaben

1. Wie ist das Skalarprodukt in T_P^* zu bilden, das aufgrund der Zuordnung $u \to g(u, \ldots)$ zustandekommt?

2. Zeige, daß aus der Nichtsingularität von g folgt, daß die Zuordnung $u \to g(u, \ldots)$ umkehrbar eindeutig ist.

7.4 Die äußere Algebra

Wir betrachten nun einen für später wichtigen Teilraum der Tensoralgebra über einem Vektorraum $\mathbf{V}$, die *äußere* (oder Graßmann-) *Algebra* Λ über $\mathbf{V}$. Sie ist die direkte Summe der Räume Λ^p, wo Λ^p der Raum der total antisymmetrischen Tensoren vom Typ $(p, 0)$, $\Lambda^0 = \mathbf{R}$ und $\Lambda^1 = \mathbf{V}$ ist. Um zu einer Algebra zu gelangen, benötigen wir noch eine multiplikative Verknüpfung antisymmetrischer Tensoren, die aus Λ nicht herausführt, d. h., wieder auf antisymmetrische Tensoren führt. Sind $D \in \Lambda^p$, $T \in \Lambda^q$ zwei Tensoren, so ist das gewöhnliche Tensorprodukt $D \otimes T$,

$$(D \otimes T)(\underbrace{a, b, \ldots, c}_{p}; \underbrace{x, y, \ldots, z}_{q}) := D(a, b, \ldots, c)\, T(x, y, \ldots, z)$$

($a, \ldots, x, \ldots \in \mathbf{V}^*$) dazu nicht brauchbar, weil $D \otimes T$ nicht total antisymmetrisch ist. Durch totales Antisymmetrisieren erhalten wir aber daraus ein Element $D \wedge T$ von Λ^{p+q}:

$$(D \wedge T)(a, \ldots, z) := \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\pi} (\operatorname{sign} \pi)(D \otimes T)(\pi(a), \ldots, \pi(z)). \tag{7.4.1}$$

Hier läuft π über alle Permutationen der Symbole $a, \ldots, z$; $\operatorname{sign} \pi = +1$ bzw. -1 für gerade bzw. ungerade Permutationen. Die kombinatorischen Faktoren in (7.4.1) dienen dazu, das hiermit definierte *äußere* oder *alternierende Produkt* assoziativ zu machen. Sehen wir uns als Beispiel für $v, w \in \mathbf{V} = \Lambda^1$ das Produkt $v \wedge w \in \Lambda^2$ an: nach (7.4.1) und (7.3.4) ist

$$v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v. \tag{7.4.2}$$

(7.4.2) erfüllt außer den üblichen Distributivgesetzen noch

$$\begin{aligned} v \wedge w &= -w \wedge v, \\ v \wedge v &= 0. \end{aligned} \tag{7.4.3}$$

Eine Basis in Λ^2 wird aus den Produkten $e_i \wedge e_j$ $(i < j)$ von Basisvektoren in $\mathbf{V}$ gebildet, Λ^2 ist also $\binom{n}{2}$-dimensional. Bezüglich dieser Basis hat $v \wedge w = v^j e_j \wedge w^k e_k$ die Komponentenzerlegung

$$v \wedge w = \frac{1}{2!}(v^i w^k - v^k w^i)\, e_i \wedge e_k = \sum_{i<k}(v^i w^k - v^k w^i)\, e_i \wedge e_k. \tag{7.4.4}$$

Ganz analog können wir im allgemeinen Fall vorgehen: Die $\binom{n}{p}$ Produkte

$$e_H := e_{h_1} \wedge \ldots \wedge e_{h_p}. \qquad H := \{h_1, \ldots, h_p \mid h_1 < h_2 < \ldots < h_p\} \tag{7.4.5}$$

bilden eine Basis in Λ^p, so daß also $\dim \Lambda^p = \binom{n}{p}$ ist. Für $D \in \Lambda^p$, $T \in \Lambda^q$ geht die Vertauschungsregel (7.4.3) über in

$$D \wedge T = (-1)^{pq}\, T \wedge D. \tag{7.4.6}$$

Die Dimension von Λ ist $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$.

Wenn in $\mathbf{V}$ ein Skalarprodukt $g(v, w)$ durch (7.3.8) definiert ist, können wir auch in Λ^p eines einführen. Für Elemente $v, w \in \Lambda^p$, die in der Form

$$v = \underset{1}{v} \wedge \ldots \wedge \underset{p}{v}, \qquad w = \underset{1}{w} \wedge \ldots \wedge \underset{p}{w} \qquad (\underset{\alpha}{v}, \underset{\alpha}{w} \in \mathbf{V}) \tag{7.4.7}$$

geschrieben werden können, definieren wir als Skalarprodukt in Λ^p:

$$v \cdot w := \det(\underset{\alpha}{v} \cdot \underset{\beta}{w}) = \frac{1}{p!}\, v^{i_1 \ldots i_p}\, w_{i_1 \ldots i_p} \tag{7.4.8}$$

und dehnen es durch die übliche Linearitätsforderung auf alle Elemente von Λ^p aus. Die Metrik g erlaubt jetzt, orthonormale Basen $\{e_i\}$ in $\mathbf{V}$ zu definieren:

$$e_i \cdot e_j = \pm\delta_{ij}. \tag{7.4.9}$$

wobei etwa r +Zeichen und s −Zeichen vorkommen mögen (Relativitätstheorie bei unserer Konvention: $r = 1$, $s = 3$); $t = r - s$ heißt Signatur des inneren Produkts. Dann gilt für

$$e := e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \in \Lambda^n : \tag{7.4.10}$$

$$e \cdot e = (-1)^s = (-1)^{(n-t)/2}. \tag{7.4.11}$$

Die Einführung einer Längenmessung in $\mathbf{V}$ durch $|v| = \sqrt{|v \cdot v|}$ erlaubt auch eine Volumsmessung. Nehmen wir das Volumen des durch orthonormale e_i aufgespannten Parallelepipeds als Einheitsvolumen: $1 = |e_1| \cdot |e_2| \ldots |e_n| =$

$\sqrt{|e \cdot e|}$, so ist das Volumen $|\mathcal{V}|$ des von n beliebigen Vektoren $\underset{1}{v}, \ldots, \underset{n}{v} \in \mathbf{V}$ aufgespannten Parallelepipeds durch

$$\underset{1}{v} \wedge \underset{2}{v} \wedge \ldots \wedge \underset{n}{v} = \mathcal{V} e \tag{7.4.12}$$

gegeben, was eine direkte Verallgemeinerung des „Spatprodukts" auf n Dimensionen darstellt; sign $\mathcal{V}$ gibt die Orientierung der $\underset{\alpha}{v}$ relativ zu den e_i an. Dieser Zusammenhang der Multivektoren (die Elemente von Λ^p heißen manchmal p-Vektoren) mit der Volumsmessung ist der Grund für die wichtige Rolle der äußeren Algebra in der Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten.

Bei antisymmetrischen Tensoren ist ferner der ϵ-Tensor wesentlich, der es etwa für $n = 4$ erlaubt, einem total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe a^{ikj} einen Vektor a_m durch

$$a_m = \frac{1}{3!} \epsilon_{ikjm} a^{ikj} \tag{7.4.13}$$

zuzuordnen. Die Verallgemeinerung dieser Operation wird durch den $*$-*Operator* gegeben, der $\Lambda^p \leftrightarrow \Lambda^{n-p}$ abbildet (diese beiden Räume haben die gleiche Dimension $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$). Wieder benutzen wir dazu das Skalarprodukt (7.4.8). Sei $v \in \Lambda^p$, w ein beliebiger Vektor aus Λ^{n-p}. Dann ist

$$v \wedge w = (*v, w) \cdot e \tag{7.4.14}$$

die Definition eines neuen Vektors $*v \in \Lambda^{n-p}$, dessen Skalarprodukt mit dem beliebigen $w \in \Lambda^{n-p}$ gerade (7.4.14) erfüllt.

Aufgaben

1. A sei eine lineare Abbildung $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Durch $A(v \wedge w \wedge \ldots) = Av \wedge Aw \wedge \ldots$ kann A auf die Λ^p übertragen werden, $\Lambda^p \to \Lambda^p$. Da Λ^n eindimensional ist, muß $A(v \wedge \ldots)$ in diesem Fall ein Vielfaches von $v \wedge \ldots$ sein. Zeige, daß dieser Proportionalitätsfaktor übereinstimmt mit $\det A^k{}_j$, wo $A^k{}_j$ die durch $Ae_j = A^k{}_j e_k$ definierte Matrixdarstellung der Abbildung ist. (Das ergibt eine basisunabhängige Definition der Determinante einer Abbildung.) Wie ist die Situation bei den anderen Λ^p?

2. Die Vektoren $u, v, \ldots, w \in \mathbf{V}$ sind genau dann linear abhängig, wenn

$$u \wedge v \wedge \ldots \wedge w = 0.$$

3. Zeige: $\Lambda^p(\mathbf{V}^*)$ ist dual zu $\Lambda^p(\mathbf{V})$. (Inneres Produkt analog zu (7.4.8).)

. Ist in (7.4.12) $\mathcal{V} \neq 0$, so sind die $\underset{\alpha}{v}$ linear unabhängig und als Basis in $\mathbf{V}$ verwendbar: $g_{\alpha\beta} = \underset{\alpha}{v} \cdot \underset{\beta}{v}$ sind die Komponenten von g in dieser Basis.

Zeige: $|\mathcal{V}| = |\det g_{\alpha\beta}|^{1/2}$ *Hinweis:* (benutze (7.4.8, 11, 12)).

. Zeige, daß das Skalarprodukt (7.4.8) in Λ^p nicht singulär ist.

. Zeige, daß $u \wedge *v = (-1)^{(n-t)/2}(u \cdot v)\, e$. Was ergibt sich daraus für $**v$?

. Sei $\dim \mathbf{V} = 4$, die Basis e_1, e_2, e_3, e_4 orthonormal. Bilde $*e_i$, $*(e_i \wedge e_k)$, $*(e_i \wedge e_k \wedge e_j)$, $*e$.

. Welche Möglichkeiten bestehen, $*$ für Kovektoren zu definieren? Wann ist eine Vorzeichenkonvention nötig?

'.5 Äußere Differentialformen

)ie eben entwickelte äußere Algebra können wir sowohl über den Vektorfeldern ls auch über den Kovektorfeldern (Differentialformen) aufbauen. Dabei stellt ch der letztere Fall insofern als wichtiger heraus, als sich hier auch ohne die xistenz einer weiteren Struktur wie Metrik oder Übertragung ein Differen- ationsprozeß definieren läßt, die äußere Ableitung, die nicht aus der Algebra erausführt.

Alternierende (oder *äußere*) *Differentialformen* q-ter Stufe, kurz q-Formen, rdnen jedem Punkt P ein Element aus $\Lambda^q(T_P^*)$ zu. Mit 0-Formen seien skalare unktionen gemeint. Eine holonome Basis für die Algebra der äußeren Diffe- entialformen wird durch ($i < j$, $i < j < k, \ldots$)

$$1, \quad \mathrm{d}x^i, \quad \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j, \quad \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k, \ldots, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \ldots \mathrm{d}x^n \tag{7.5.1}$$

egeben, in bezug auf welche eine q-Form ω die Gestalt

$$\omega = \sum_H \omega_H(x^i)\mathrm{d}x^H \tag{7.5.2}$$

nnimmt, wobei wieder

$$H := \{h_1 < h_2 < \ldots h_q\}, \qquad \mathrm{d}x^H := \mathrm{d}x^{h_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{h_q}. \tag{7.5.3}$$

Beispiele für $n = 3$ sind ($a, b, \ldots, k$ sind Funktionen von x, y, z):

$$\begin{aligned} &\text{0-Form: } \Phi = \Phi(x, y, z), \qquad \text{1-Form: } \lambda = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}z, \\ &\text{2-Form: } \mu = f\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\ &\text{3-Form: } \nu = k\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \qquad \text{4-Formen, 5-Formen, } \ldots \equiv 0. \end{aligned} \tag{7.5.4}$$

Formen dieser Art erscheinen als Integranden von Linien-, Flächen-, und Volumsintegralen, wobei die Relevanz der äußeren Multiplikation $\wedge$ bei Variablensubstitutionen zutage tritt: ist $x^i = f^i(x^{\bar{k}})$, so ist einfach $\mathrm{d}x^i = f^i{}_{,\bar{k}}\mathrm{d}x^{\bar{k}}$ zu setzen und nach den Regeln von $\wedge$ auszumultiplizieren.

Bei der Umwandlung von Integralen über Ränder mehrdimensionaler Bereiche (Stokesscher, Gaußscher Satz) kommt im Integranden eine neue Form zu stehen, die in systematischer Art aus dem gegebenen Integranden abzuleiten ist. Das geschieht mit Hilfe der Operation d, der *äußeren Ableitung*, die wir jetzt definieren; auf die Formulierung der Integralsätze kommen wir später zurück. Der Operator d bildet q-Formen linear in $(q+1)$-Formen ab und ist durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt (ω, η sind Formen, f eine 0-Form):

$$\begin{aligned}
&1)\quad \mathrm{d}\wedge(\omega+\eta) = \mathrm{d}\wedge\omega + \mathrm{d}\wedge\eta,\\
&2)\quad \mathrm{d}\wedge(\omega\wedge\eta) = (\mathrm{d}\wedge\omega)\wedge\eta + (-1)^{\text{Stufe }(\omega)}\omega\wedge(\mathrm{d}\wedge\eta),\\
&3)\quad \mathrm{d}\wedge(\mathrm{d}\wedge\omega) = 0,\\
&4)\quad \mathrm{d}\wedge f = \mathrm{d}f \text{ (Differential, (7.1.8))}.
\end{aligned} \tag{7.5.5}$$

Wegen 4) werden wir häufig das Zeichen $\wedge$ nach d weglassen, zwischen Koordinatendifferentialen auch das Zeichen $\wedge$ des äußeren Produkts. Die Existenz dieses Operators wird dadurch gesichert, daß für eine Form (7.5.2) die Vorschrift

$$\mathrm{d}\omega = \sum_H \frac{\partial\omega_H}{\partial x^J}\,\mathrm{d}x^J\wedge\mathrm{d}x^H \tag{7.5.6}$$

alle Bedingungen erfüllt.

Eine Form ω heißt *exakt*, wenn sie sich als äußeres Differential schreiben läßt, d. h., wenn eine Form α mit $\omega = \mathrm{d}\alpha$ existiert. Da $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$ nach 3), ist für die Exaktheit notwendig, daß $\mathrm{d}\omega = 0$. Das ist aber im allgemeinen nicht hinreichend für die Exaktheit auf ganz X^n, man kann aber Gebiete abgrenzen, auf denen das zutrifft (Poincarésches Lemma)[4]. Wir kommen in Abschnitt 11.4 auf dieses Phänomen zurück. Damit eine Kobasis $\{\omega^1,\ldots,\omega^n\}$ holonom ist, ist notwendig: $d\omega^i = 0$.

Wir betrachten die Beispiele (7.5.4). Es wird $\mathrm{d}\nu = 0$ sowie

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z, \qquad \mathrm{d}\mu = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}\lambda = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[4] Vielfach wird auch 3) in (7.5.5) so genannt.

Schreiben wir $(a, b, c) = \boldsymbol{a}$, $(f, g, h) = \boldsymbol{v}$ und in üblicher Symbolik $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}\boldsymbol{O}$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}^3x$, so ist

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}) \quad \ldots \quad \mathrm{d}\Phi = \operatorname{grad}\Phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$\lambda = \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \ldots \quad \mathrm{d}\lambda = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{O},$$

$$\mu = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{O} \quad \ldots \quad \mathrm{d}\mu = \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}^3x.$$

Exaktheit würde also für λ bedeuten: $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} f$, für μ: $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}$. Die Gleichung $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$ ergibt für $\omega = \lambda$ bzw. $\omega = \Phi$: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$ bzw. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = 0$, und das Poincarésche Lemma ergibt für $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$ bzw. $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ die Existenz eines skalaren bzw. Vektorpotentials, wenn auch nicht stets im ganzen Definitionsgebiet von $\boldsymbol{a}$ bzw. $\boldsymbol{v}$ (vgl. die ebene Zirkulationsströmung, oder das magnetische Potential beim geraden Stromleiter).

Tensorielle q-Formen vom Typ (a, b) ordnen jedem Punkt ein Element aus $\mathbf{V}^a{}_b \otimes \Lambda^q(\mathbf{V}^*)$ zu ($\mathbf{V} = T_P$). Nützlich ist dabei die folgende „partielle" Komponentenzerlegung eines solchen Objekts Φ:

$$\Phi = \Phi^{i\ldots}{}_{kj\ldots} e_i \otimes \ldots \otimes e^k \otimes e^j \otimes \ldots, \qquad \Phi^{i\ldots}{}_{kj\ldots} = \Phi^{i\ldots}{}_{kj\ldots H}\,\mathrm{d}x_H. \tag{7.5.7}$$

Die partiellen Komponenten $\Phi^{i\ldots}{}_{kj\ldots}$ sind also gewöhnliche q-Formen, alle Indizes, in denen die „totalen" Komponenten $\Phi^{i\ldots}{}_{kj\ldots H}$ total antisymmetrisch sind, sind mit $\mathrm{d}x^H$ abgesättigt. Dies verbindet die Vorteile der Indexschreibweise am wirkungsvollsten mit jenen des Formenkalküls.

Aufgaben

1. Zeige, daß (7.5.6) die Bedingungen (7.5.5) erfüllt.

2. Zeige: Eine koordinatenfreie Formel für die Ableitung von 1-Formen ist gegeben durch

$$(\mathrm{d}\wedge\omega)(u, v) = u(\omega(v)) - v(\omega(u)) - \omega([u, v]), \tag{7.5.6'}$$

   wo $[u, v]$ wie in Aufgabe 4 von Abschnitt 7.1 definiert ist.

3. F_{ik} bedeute den elektromagnetischen Feldtensor, d. h. die Komponenten der 2-Form $\varphi = \frac{1}{2}F_{ik}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k$. Zeige, daß die 2. Maxwell-Gleichungen lauten: $\mathrm{d}\wedge\varphi = 0$. Nach dem Poincaré-Lemma gibt es dann eine 1-Form α mit $\mathrm{d}\wedge\alpha = \varphi$. Wie lautet das in üblicher Schreibweise?

4. Bilde mit dem Viererstrom j_k die 1- Form $\gamma = j_k\,\mathrm{d}x^k$ und versuche, mittels der $*$- Operation auch die 1. Maxwell-Gleichung durch die soeben eingeführte Form φ auszudrücken.

5. Studiere die mehrfach in verschiedener Reihenfolge angewandten Operationen d, $*$ an den Formen (7.5.4) und vergleiche mit bekannten Ausdrücken! ($*\mathrm{d} * \mathrm{d}\Phi = \Delta\Phi$, $*\mathrm{d} * \lambda = \operatorname{div} \boldsymbol{a}$, $\mathrm{d} * \mathrm{d}\lambda = (\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a})\, \mathrm{d}\boldsymbol{O}, \ldots$)

7.6 Übertragungen und Riemann-Geometrie

Die äußere Ableitung der q-Formen ist der einzige Differentiationsprozeß, der sich im Raum der Tensorfelder über X^n basisunabhängig erklären läßt, ohne daß zusätzliche ausgezeichnete Objekte hinzugenommen werden. In der Riemann-Geometrie ist das metrische Tensorfeld g ein solches Objekt; mit seiner Hilfe konnten wir beliebige Tensoren kovariant differenzieren, und nur in Relationen wie $A_{[i;k]} = A_{[i,k]}$ zeigt sich, daß die alternierende Ableitung von g nicht abhängt.

Zur Definition kovarianter Ableitungen ist allerdings keine Metrik erforderlich, sondern nur eine *Übertragung (=Konnexion, Zusammenhang)*, die es erlaubt, Vektoren zu vergleichen (Differenzenquotient!), wenn sie zu Tangentialräumen zweier infinitesimal benachbarter Punkte gehören. Im euklidischen Raum wird eine derartige Übertragung durch die gewöhnliche Parallelverschiebung gegeben, mit deren Hilfe wir Vektoren in beliebigen Punkten vergleichen können. Für Mannigfaltigkeiten wollen wir nur eine Übertragung zwischen infinitesimal benachbarten Punkten vorschreiben, von der wir zunächst bloß verlangen, daß sie die beiden Tangentialräume linear aufeinander abbildet, so daß die kovariante Differentiation additiv wird. Für Produktbildungen aller Art verlangen wir, soweit möglich: Übertragenes Produkt = Produkt der übertragenen Faktoren, was zu einer Leibniz-Produktregel für die Differentiation führt. Wir untersuchen jetzt, wie eine Übertragung dieser Art festgelegt wird, welche kovariante Differentiation damit verbunden ist und durch welche Spezialisierung wir zur bisher verwendeten zurückkommen.

$\{e_j\}$ sei ein n-Bein-Feld und $\{\omega^j\}$ die duale Basis für 1-Formen. Ist eine Übertragung erklärt, können wir das zum System gehörige n-Bein in Q in den „infinitesimal benachbarten" Punkt P übertragen, wobei $\vec{PQ}$ durch einen „infinitesimalen" Tangentialvektor ϵu, $u \in T_P$, charakterisiert sei. Wir vergleichen das längs u nach P übertragene n-Bein mit $\{e_j(P)\}$ und zerlegen die entsprechenden, mit $\mathrm{D}_{\epsilon u} e_j$ bezeichneten Differenzen nach letzterem: $\mathrm{D}_{\epsilon u} e_j = \omega^i{}_j(\epsilon u) e_i$. Die hier auftretende Matrix hängt von ϵu, P, $\{e_j\}$ und der Übertragung ab, und umgekehrt können wir die Übertragung durch Vorgabe dieser Matrix als Funktion der genannten Größen fixieren. Im folgenden wollen wir uns nur mit *linearen* (oder *affinen*) Übertragungen beschäftigen, bei welchen $\omega^i{}_k(\epsilon u)$, $\mathrm{D}_{\epsilon u} e_j$ von der „Verschiebungsstrecke" ϵu *linear* abhängen. Dann können wir den infinitesimalen Faktor ϵ herauskürzen, und die Zuordnung $u \to \omega^i{}_j(u)$ definiert eine Matrix von 1-Formen $\omega^i{}_j$ mit der Basiszerlegung

$$\omega^i{}_j = L^i{}_{jk}\, \omega^k; \tag{7.6.1}$$

analog definiert $u \to \mathrm{D}_u e_j$ vektorielle 1-Formen $\mathrm{D}e_j$, und wir haben für diese *absoluten* oder *kovarianten Differentiale*

$$\mathrm{D}e_j = \omega^i{}_j \otimes e_i. \tag{7.6.2}$$

(Eine Verallgemeinerungsmöglichkeit besteht etwa darin (Finsler- Geometrie), $\omega^i{}_j(u)$ nur als homogen 1. Grades in den u^k anzusetzen, so daß obiges Wegkürzen von ϵ noch möglich ist.)

Additivität und Produktregel ergeben nun für ein beliebiges Vektorfeld $v = v^j e_j$ als kovariantes Differential

$$\mathrm{D}v = \mathrm{D}(v^j e_j) = (\mathrm{d}v^j) \otimes e_j + v^j \omega^i{}_j \otimes e_i = (\mathrm{D}v)^i \otimes e_i, \tag{7.6.3}$$

$$(\mathrm{D}v)^i = \mathrm{d}v^i + \omega^i{}_j\, v^j = v^i{}_{:k}\, \omega^k \quad \text{mit} \quad v^i{}_{:k} := e_k(v^i) + L^i{}_{jk}\, v^j. \tag{7.6.3'}$$

Die *Übertragungskoeffizienten* $L^i{}_{jk}$ erinnern an die Christoffel- Symbole, sind aber hier unabhängig von jeder Metrik eingeführt und auch für holonome Basen $e_i = \partial_i$ nicht notwendigerweise in j, k symmetrisch.

Aus (7.6.1) und den verlangten Eigenschaften von D finden wir das *Verhalten* von $\omega^i{}_j$ bei einem *Basiswechsel*

$$\bar{e}_a = p^i{}_{\bar{a}}\, e_i, \quad e_i = p^{\bar{a}}{}_i\, \bar{e}_a, \quad p^i{}_{\bar{b}}\, p^{\bar{c}}{}_i = \delta_{\bar{b}}{}^{\bar{c}}:$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\bar{e}_a &= (\mathrm{d}p^i{}_{\bar{a}}) \otimes e_i + p^i{}_{\bar{a}}\, \mathrm{D}e_i = (\mathrm{d}p^i{}_{\bar{a}} + p^j{}_{\bar{a}}\, \omega^i{}_j) \otimes e_i \\ &= \omega^{\bar{b}}{}_{\bar{a}} \otimes \bar{e}_b = \omega^{\bar{b}}{}_{\bar{a}}\, p^i{}_{\bar{b}} \otimes e_i. \end{aligned} \tag{7.6.4}$$

Vergleich ergibt

$$\omega^{\bar{b}}{}_{\bar{a}} = p^{\bar{b}}{}_i\, p^j{}_{\bar{a}}\, \omega^i{}_j + p^{\bar{b}}{}_i\, \mathrm{d}p^i{}_{\bar{a}} = p^{\bar{b}}{}_i\, p^j{}_{\bar{a}}\, \omega^i{}_j - p^j{}_{\bar{a}}\, \mathrm{d}p^{\bar{b}}{}_i. \tag{7.6.5}$$

Sind beide Basen holonom, $e_i = \partial_i$, $\bar{e}_a = \partial_{\bar{a}} = \partial/\partial x^{\bar{a}}$, so ist $p^i{}_{\bar{a}} = \partial x^i/\partial x^{\bar{a}}$, und wir erhalten aus (7.6.1, 5) das Transformationsgesetz der holonomen Übertragungskoeffizienten

$$L^{\bar{a}}{}_{\bar{b}\bar{c}} = L^i{}_{kj} \frac{\partial x^{\bar{a}}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{b}}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{c}}} + \frac{\partial x^{\bar{a}}}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{\bar{b}} \partial x^{\bar{c}}}. \tag{7.6.6}$$

Die antisymmetrischen Anteile $2L^i{}_{[kj]} =: T^i{}_{kj}$ bilden ersichtlich Tensorkomponenten; der entsprechende Tensor *(Torsion)* verschwindet in der Riemannschen Geometrie wegen der Symmetrie der $\Gamma^i{}_{kj}$, nicht jedoch bei allgemeineren Übertragungen. Von dieser Tatsache wurde bei manchen Versuchen einer „vereinheitlichten Feldtheorie" (Gravitation und Elektrizität etc.) Gebrauch gemacht. Wir wollen nun diesen Tensor bzw. die Tatsache seines Verschwindens in der Riemann-Geometrie in einer beliebigen Basis ausdrücken. Dazu fassen

wir $T^i{}_{kj}$ als Koeffizienten der Formen $\frac{1}{2}T^i{}_{kj}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k = \omega^i{}_k \wedge \mathrm{d}x^k$ auf und bedenken, daß die holonome Kobasis $\mathrm{d}x^k$ durch $\mathrm{d}\wedge\mathrm{d}x^k = 0$ ausgezeichnet ist, während eine beliebige Kobasis ω^k das nicht erfüllt (wir schreiben ω^k statt e^k, um anzudeuten, daß jetzt in jedem Punkt eine Kobasis definiert ist, ω^k also 1-Formen sind). Die Formen

$$\Theta^i := \mathrm{d} \wedge \omega^i + \omega^i{}_k \wedge \omega^k = \frac{1}{2}T^i{}_{kj}\,\omega^j \wedge \omega^k \tag{7.6.7}$$

erfüllen, wie mittels (7.6.5) leicht nachzurechnen,

$$\Theta^{\bar{a}} = p^{\bar{a}}{}_i\,\Theta^i, \tag{7.6.8}$$

so daß die $T^i{}_{kj}$ Tensorkomponenten sind, die in der holonomen Basis mit $2L^i{}_{[kj]}$ übereinstimmen. Eine Grundformel der Riemannschen Geometrie ist also die Bedingung der *Torsionsfreiheit*

$$\mathrm{d} \wedge \omega^i + \omega^i{}_k \wedge \omega^k = 0, \tag{7.6.7'}$$

während die $L^i{}_{jk}$ nur in einer holonomen Basis symmetrisch sein müssen.

Ebenso wie (7.6.8) ist für die Formen

$$\Omega^i{}_j := \mathrm{d} \wedge \omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j =: \tfrac{1}{2}\,R^i{}_{jmn}\,\omega^m \wedge \omega^n \tag{7.6.9}$$

mittels (7.6.5) leicht zu bestätigen, daß

$$\Omega^{\bar{a}}{}_{\bar{b}} = p^{\bar{a}}{}_i\,p^j{}_{\bar{b}}\,\Omega^i{}_j \tag{7.6.10}$$

gilt, so daß die $R^i{}_{jmn}$ die Komponenten eines Tensors sind. Sie stimmen in einer holonomen Basis mit den Komponenten des Krümmungstensors überein, wenn wir für die $L^i{}_{kj}$ die $\Gamma^i{}_{kj}$ einsetzen.

Die *Riemannsche Übertragung* erfüllt nicht nur (7.6.7'), sondern steht mit der Riemannschen Metrik in engem Zusammenhang (vgl. (1.3.6, 11)), den wir jetzt in einer beliebigen anholonomen Basis herstellen. Die Metrik ist durch ein symmetrisches nichtsinguläres Tensorfeld g vom Typ (0,2) gegeben, das in jedem Tangentialraum ein Skalarprodukt definiert. Wir fordern für D die Gültigkeit der Produktregel bei Anwendung auf das Skalarprodukt (*Metrizitätsbedingung*):

$$u(g(v,w)) = g(\mathrm{D}_u v, w) + g(v, \mathrm{D}_u w). \tag{7.6.11}$$

Für $g_{ik} = g(e_i, e_k)$ erhalten wir dann mit $u(g_{ik}) = \mathrm{d}g_{ik}(u)$:

$$\mathrm{d}g_{ik} = \omega^m{}_i\,g(e_m, e_k) + \omega^n{}_k\,g(e_i, e_n) = \omega_{ki} + \omega_{ik}, \tag{7.6.12}$$

wobei wir definierten:

$$\omega_{ik} = g_{in}\,\omega^n{}_k, \qquad L_{ikj} = g_{in}\,L^n{}_{kj}. \tag{7.6.13}$$

Fundamental für die Riemannsche Geometrie ist nun, daß durch die Forderung von *Metrizität* bezüglich g und die Forderung nach *Torsionsfreiheit* der Metrik g eine *eindeutig* bestimmte *Übertragung* zugeordnet ist. Um das einzusehen, führen wir noch die Basiszerlegung

$$\mathrm{d} \wedge \omega^i = -\frac{1}{2} C^i{}_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k \tag{7.6.14}$$

mit den *Anholonomiekoeffzienten* $C^i{}_{jk} = -C^i{}_{kj}$ ein und drücken (7.6.7'), (7.6.12) in der Basis $\{\omega^i\}$ aus. Permutiert man in der aus (7.6.7') resultierenden Gleichung $L^i{}_{kj} - L^i{}_{jk} = C^i{}_{jk}$ nach Senken von i die Indizes zyklisch, addiert zwei der entstehenden Gleichungen und subtrahiert die dritte, so bekommt man mittels der aus (7.6.12) resultierenden Gleichung $L_{ikj} + L_{kij} = e_j(g_{ik})$:

$$2L_{ijk} + e_i(g_{jk}) - e_j(g_{ik}) - e_k(g_{ij}) = C_{ikj} + C_{jik} - C_{kji}. \tag{7.6.15}$$

Daraus kann L_{ijk} tatsächlich eindeutig entnommen werden, wenn g in einer beliebigen Basis gegeben ist. Bei Holonomie geht L_{ijk} in (1.3.6) über, für andere Basen gehen die Anholonomiekoeffizienten $C^l{}_{jk}$ ein und zerstören die Symmetrie $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$. Besonders wichtig sind dabei Basen mit $g_{ab} = \text{const.}$, etwa *Orthonormalbasen* ($g_{ab} = \eta_{ab}$), wo $\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0$, die Matrix der Übertragungsformen also ebenso wie jene der Krümmungsformen Ω_{ik} *antisymmetrisch* wird. (Letzteres folgt aus der Metrizität in *beliebigen* Basen.) In diesem Fall sind also nur $n(n-1)/2$ Übertragungsformen zu berechnen, das sind $n^2(n-1)/2$ *Rotationskoeffizienten* Γ_{ikj}. Für $n = 4$ ergibt das eine Reduktion von 40 Christoffelsymbolen auf 24 Rotationskoeffizienten. Für die relativistische Signatur $\pm(+---)$ kann man unter Verwendung komplexer Zahlen auf 3 komplexe Zusammenhangs- und Krümmungsformen (siehe Aufgabe) bzw. 12 komplexe *Spinkoeffizienten* kommen.[5]

Damit ist es gelungen, die grundlegenden Formeln der Übertragungs- und Riemanngeometrie in Termen von Differentialformen zu schreiben – also völlig koordinatenfrei. Allerdings fällt auf, daß wir die $L^i{}_{jk}$, Θ^i, $\Omega^i{}_k$ nicht als Komponenten basisunabhängig definierter Objekte eingeführt haben. Tatsächlich zeigen (7.6.8), (7.6.10), daß die Θ^i bzw. $\Omega^i{}_k$ partielle Komponenten einer vektoriellen bzw. tensoriellen 2-Form sind, die wir in Kapitel 11 direkt definieren

[5]Dies folgt aus allgemeinen gruppentheoretischen Betrachtungen (Abschnitt 11.3) sowie der Tatsache, daß die komplexe Drehgruppe $SO(n, \mathbf{C})$ für $n = 4$ nur halbeinfach ist (anstatt einfach, wie für die übrigen $n > 2$): $SO(4, \mathbf{C}) \cong SO(3, \mathbf{C}) \times SO(3, \mathbf{C})$, die reelle Gruppe $SO(3, 1)$ im Gegensatz zu $SO(4, \mathbf{R}) \cong SO(3, \mathbf{R}) \times SO(3, \mathbf{R})$ und $SO(2, 2) \cong SO(2, 1) \times SO(2, 1)$ aber *nicht* lokal isomorph ($\cong$) zu einem direkten Produkt ist (vgl. Sexl u. Urbantke (1992)). Dies bewirkt, daß die der Zerlegung von $SO(4, \mathbf{C})$ entsprechenden Faktoren für $SO(3, 1)$ konjugiert-komplex, in den beiden anderen Fällen aber reell und unabhängig sind. Hierin liegt also, wie von R. Penrose hervorgehoben wurde, eine Auszeichnung von $n = 4$ und der relativistischen Signatur $\pm(+---)$. Siehe seinen Artikel in DeWitt & Wheeler (1968).

werden. Die $L^i{}_{jk}$ hingegen kompensieren mit ihrem inhomogenen Transformationsverhalten gerade die nicht-tensorielle Natur von ∂_j, so daß das dahinterstehende basisunabhängige Objekt der Operator D der kovarianten Ableitung ist. Er kann in den wichtigsten Fällen (z. B. Riemanngeometrie) basisunabhängig charakterisiert werden durch Axiomatisierung seiner formalen Rechenregeln – vgl. Kapitel 11. Es gibt jedoch Ausnahmen, und man findet (u.a.) deshalb in neueren Lehrbüchern – z. B. Dieudonné IV (1976), Kobayashi-Nomizu (1963) – das Verfahren, alle als gleichberechtigt zugelassenen Basen (etwa orthonormale) in allen Punkten gleichzeitig zu betrachten, d. h. auf die von ihnen gebildete größere Mannigfaltigkeit überzugehen, auf der dann einer Übertragung ein tensorielles Objekt entspricht.

Wir stellen die für unsere Anwendungen wesentlichen Formeln hier nochmals zusammen:

$$g = g_{ik}\omega^i \otimes \omega^k. \tag{7.6.16}$$

$$\mathrm{d}g_{ik} = \omega_{ik} + \omega_{ki}, \qquad \omega_{ik} = g_{ij}\,\omega^j{}_k, \tag{7.6.17a}$$

$$\mathrm{d} \wedge \omega^i + \omega^i{}_k \wedge \omega^k = 0, \tag{7.6.17b}$$

$$\mathrm{d}\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j = \frac{1}{2} R^i{}_{jmn}\,\omega^m \wedge \omega^n. \tag{7.6.18}$$

Für genügend einfache Metriken ist es das rascheste Verfahren zur Berechnung des Krümmungstensors, orthonormale Basen zu benutzen und die $\omega^i{}_k$ aufgrund von (7.6.17a,b) ohne weitere Komponentenzerlegung zu erraten (siehe nächster Abschnitt). Es sei aber auch erwähnt, daß heute bereits eine Reihe von Computerprogrammen für symbolische Manipulationen existiert, mit deren Hilfe Riemanntensoren formelmäßig gegebener Metriken berechnet werden können. (Vgl. etwa R. A. d'Inverno, in Held (1980), Vol. 1).

Aufgaben

1. Zeige, daß die in (7.6.14) aufscheinenden $C^i{}_{jk}$ mit den in Aufgabe 5 von Abschnitt 7.1 definierten Größen übereinstimmen.

2. Zeige, daß aus dem Postulat einer Leibniz-Regel fürs innere Produkt zwischen Vektor- und Kovektorfeldern für die Kobasis $\mathrm{D}\omega^i = -\omega^i{}_j \otimes \omega^j$ folgt. Berechne nun das kovariante Differential von Kovektorfeldern.

3. Berechne das kovariante Differential von Tensorfeldern unter Verwendung einer Leibniz-Regel fürs Tensorprodukt. Berechne nun mittels des Ergebnisses von Aufgabe 2 das kovariante Differential des Einheitstensorfeldes (Komponenten δ^i_k) und des metrischen Tensorfeldes.

4. Zeige, daß für Orthonormalbasen, $g_{ik} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$, die Gleichungen (7.6.9) mit den Definitionen (Indexwerte 1, 2, 3)

$$\omega^{(\mu)} := \omega^{0\mu} + \frac{i}{2}\,\epsilon(\mu\nu\lambda)\,\omega^{\nu\lambda}, \quad \Omega^{(\mu)} := \Omega^{0\mu} + \frac{i}{2}\,\epsilon(\mu\nu\lambda)\,\Omega^{\nu\lambda}$$

komplex zusammengefaßt werden können zu

$$\Omega^{(\mu)} = \mathrm{d} \wedge \omega^{(\mu)} - \frac{i}{2}\,\epsilon(\mu\nu\lambda)\,\omega^{(\nu)} \wedge \omega^{(\lambda)}.$$

5. Zeige, daß im Raum der selbstdualen (komplexwertigen) 2-Formen η, die also $*\eta = i\eta$ erfüllen, die Formen

$$\eta^{(\mu)} := \omega^0 \wedge \omega^\mu + \frac{i}{2}\,\epsilon(\mu\nu\lambda)\,\omega^{(\nu)} \wedge \omega^{(\lambda)}$$

eine Basis bilden und für ihre kovarianten bzw. äußeren Differentiale gilt

$$\mathrm{D}\eta^{(\mu)} = i\,\epsilon(\mu\nu\lambda)\,\omega^{(\nu)} \otimes \eta^{(\eta)} \text{ bzw. } \mathrm{d} \wedge \eta^{(\mu)} = i\,\epsilon(\mu\nu\lambda)\,\omega^{(\nu)} \wedge \eta^{(\lambda)}.$$

Zeige, daß (mit $\bar{\eta}^{(\mu)}$ = konj.-komplex zu $\eta^{(\mu)}$) die $\Omega^{(\mu)}$ die Zerlegung

$$\Omega^{(\mu)} = R^{(\mu)}{}_{(\nu)}\,\eta^{(\nu)} + R^{(\mu)}{}_{(\bar{\nu})}\,\bar{\eta}^{(\nu)}$$

besitzen, in der $R^{(\mu)}{}_{(\mu)}$ durch den Krümmungsskalar, $R^{(\mu)}{}_{(\nu)} - \frac{1}{3}R^{(\lambda)}{}_{(\lambda)}\,\delta^\mu{}_\nu$ durch den Weyltensor und $R^{(\mu)}{}_{(\bar{\nu})}$ durch den spurfreien Teil des Riccitensors bestimmt sind und umgekehrt.

7. Aus Aufgabe 3 resultiert, daß die Metrizitätsbedingung (7.6.12) auch $\mathrm{D}g = 0$ geschrieben werden kann. Im Kontrast zum Ergebnis (7.6.15) suche man eine torsionsfreie Übertragung mit $\mathrm{D}g = 0$, wenn g
a) ein *anti*symmetrisches Tensorfeld vom Typ (0,2) ist
b) ein Tensorfeld vom Typ (1,1) ist.
Hinweis: Die Aufgabe stellt sich als unlösbar heraus, wenn g nicht noch weitere Bedingungen erfüllt. Zeige zu a) als notwendige Bedingung $\mathrm{d}\wedge g = 0$, wenn g als 2-Form aufgefaßt wird. Zu b) zeige man unter Verwendung holonomer Basen, daß sich die $L^i{}_{jk} = L^i{}_{kj}$ zwischen den aus $\mathrm{D}g = 0$ folgenden Gleichungen $g^i{}_{[j;k]} = 0$, $g^l{}_{[i}\,g^i{}_{j]:k} = 0$ eliminieren lassen, wobei die nichttriviale Bedingung

$$g^k{}_{[i}\,g^l{}_{j],k} + g^k{}_{[i,j]}\,g^l{}_k = 0 \tag{7.6.19}$$

entsteht. (Warum definiert hier die linke Seite ein Tensorfeld?)

7.7 Anwendung auf die Berechnung des Krümmungstensors spezieller Metriken

7.7.1 Das Robertson-Walker-Linienelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right] \\ &= \omega^0 \otimes \omega^0 - \omega^1 \otimes \omega^1 - \omega^2 \otimes \omega^2 - \omega^3 \otimes \omega^3 = \eta_{ab}\,\omega^a \otimes \omega^b \end{aligned} \tag{7.7.1}$$

mit der orthonormalen Kobasis ($w := \sqrt{1-kr^2}$)

$$\omega^0 = \mathrm{d}t, \qquad \omega^1 = Rw^{-1}\mathrm{d}r, \qquad \omega^2 = R\,r\,\mathrm{d}\theta, \qquad \omega^3 = R\,r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi. \tag{7.7.2}$$

Äußere Ableitung dieser 1-Formen gibt ($\dot{} = \partial/\partial t$, $' = \partial/\partial r$):

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\omega^0 = 0, \quad \mathrm{d}\omega^1 = \dot{R}w^{-1}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r, \quad \mathrm{d}\omega^2 = \dot{R}r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta + R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta, \\ &\mathrm{d}\omega^3 = \dot{R}r\sin\theta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi + R\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi + Rr\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \end{aligned} \tag{7.7.3}$$

Daraus folgen wegen $\mathrm{d}\eta_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0$ mittels (7.6.17) die 1-Formen $\omega^a{}_b$ zu

$$\begin{aligned} \omega^1{}_0 &= \dot{R}w^{-1}\mathrm{d}r, & \omega^2{}_1 &= w\,\mathrm{d}\theta, \\ \omega^2{}_0 &= \dot{R}r\,\mathrm{d}\theta, & \omega^3{}_1 &= w\sin\theta\,\mathrm{d}\phi, \\ \omega^3{}_0 &= \dot{R}r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi, & \omega^3{}_2 &= \cos\theta\,\mathrm{d}\phi. \end{aligned}$$

Wir betonen, daß diese Ausdrücke am besten durch direkten Vergleich von (7.7.3) mit (7.6.17) gewonnen werden. So schließen wir etwa aus $\mathrm{d}\omega^0 = 0$, daß $\omega^0{}_\alpha \wedge \omega^\alpha = 0$, also vermuten wir $\omega^0{}_1 =$ Vielfaches von ω^1, das sich dann eindeutig aus $\omega^0{}_1 = \omega^1{}_0$ und $\mathrm{d}\omega^1 = \ldots$ ergibt, etc.

Setzen wir nun in (7.6.9) ein, ergibt sich z. B.

$$\Omega^1{}_0 = \ddot{R}w^{-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r + \underbrace{\omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_0}_{\propto\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\theta = 0} + \underbrace{\omega^1{}_3 \wedge \omega^3{}_0}_{\propto\,\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}\phi = 0} = \frac{\ddot{R}}{R}\omega^0 \wedge \omega^1,$$

woraus wir

$$R^1{}_{001} = \frac{\ddot{R}}{R} = -R^1{}_{010}$$

ablesen; die übrigen $R^1{}_{0ab}$ verschwinden, da ja rechts die vollständige Zerlegung von $\Omega^1{}_0$ nach einer Basis von 2-Formen steht. Ein Vorteil unserer Methode besteht also darin, daß verschwindende Komponenten häufig nicht explizit berechnet werden. Analog wird

$$\Omega^2{}_0 = \ddot{R}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta + \dot{R}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \omega^2{}_1 \wedge \omega^1{}_0 + \omega^2{}_3 \wedge \omega^3{}_0$$

$$= \frac{\ddot{R}}{R}\,\omega^0 \wedge \omega^2 + \underbrace{\dot{R}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \dot{R}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r}_{=0} + 0 = \frac{\ddot{R}}{R}\,\omega^0 \wedge \omega^2,$$

$$R^2{}_{002} = \frac{\ddot{R}}{R} = -R^2{}_{020},$$

die übrigen $R^2{}_{0ab}$ verschwinden wieder. Die Übereinstimmung $R^2{}_{002} = R^1{}_{001}$ ist nicht etwa Zufall, sondern drückt die Rotationssymmetrie der Metrik aus. r, θ, ϕ sind ja nach Konstruktion von $\mathrm{d}s^2$ Orthogonalkoordinaten auf einer Hyperkugel, wie etwa r, ϕ Orthogonalkoordinaten auf einer gewöhnlichen Kugel mit dem Linienelement

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2} + r^2\,\mathrm{d}\phi^2$$

sind. Dabei sind natürlich die *Richtungen* der r- und ϕ- Linien in jedem Punkt vollkommen äquivalent, und nur durch die notwendige „ungeschickte" Wahl des Koordinatensystems gehen r und ϕ in $\mathrm{d}\sigma^2$ so verschiedenartig ein. Im auf die holonome Kobasis $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\phi$ bezogenen Tensorformalismus bleibt dieser Unterschied bestehen. $\mathrm{d}\sigma^2$ ist ja keinesfalls unter „Drehungen"

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\phi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\phi \end{pmatrix} = (M^i{}_k) \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\phi \end{pmatrix}$$

in T_P^* invariant, da die Basis $(\mathrm{d}r, \mathrm{d}\phi)$ orthogonal, aber *nicht* normiert ist. In den Formen $\omega^1 = w^{-1}\mathrm{d}r$, $\omega^2 = r\,\mathrm{d}\phi$ ist $\mathrm{d}\sigma^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$ invariant gegen Rotationen $\omega^i \to M^i{}_k\,\omega^k$. Daher werden die auf die orthonormale Basis bezogenen Krümmungskomponenten im Fall der Kugel die geometrisch evidente Symmetrie aufweisen, während das für holonome Komponenten nicht der Fall ist.

Analoges gilt für das Linienelement (7.7.1). Da im Fall der Hyperkugel alle drei Raumrichtungen r, θ, ϕ gleichwertig sind, erhalten wir ohne jede weitere Rechnung

$$R^1{}_{001} = R^2{}_{002} = R^3{}_{003} = \frac{\ddot{R}}{R},$$

und sogar die Berechnung von $R^2{}_{002}$ wäre unnötig gewesen.

Es ist klar, daß für die verbleibenden Komponenten nur noch eine einzige Rechnung nötig ist, etwa

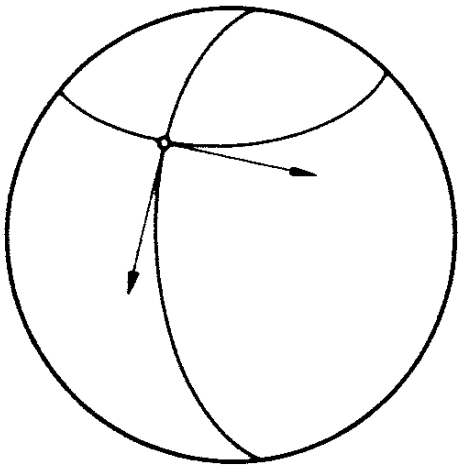

Abbildung 7.2: Orthogonalkoordinaten auf einer Kugel.

$$\Omega^2{}_1 = w'\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \omega^2{}_0 \wedge \omega^0{}_1 = \left(\frac{w\,w'}{rR^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)\omega^1 \wedge \omega^2$$

woraus

$$R^2{}_{112} = -\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = -R^2{}_{121}$$

und wegen der erwähnten Symmetrieeigenschaften

$$R^2{}_{121} = R^3{}_{131} = R^3{}_{232} = \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}$$

folgt. Außer diesen und den daraus durch Vertauschung im ersten und zweiten Indexpaar hervorgehenden verschwinden alle Komponenten des Krümmungstensors.

Der Ricci-Tensor $R_{ab} = R^c{}_{abc}$ ergibt sich zu

$$R_{00} = 3\,\frac{\ddot{R}}{R}. \qquad R_{11} = R_{22} = R_{33} = -\frac{\ddot{R}}{R} - 2\,\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}.$$

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{01} = R_{02} = R_{03} = 0,$$

der Krümmungs-Skalar $R = \eta^{ab} R_{ab}$ wird

$$R = R_{00} - 3R_{11} = 6\,\frac{\ddot{R}}{R} + 6\,\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2},$$

da ja die Komponenten der Metrik einfach η_{ab} sind. Wir berechnen die gemischten Komponenten des Einstein-Tensors $G^a{}_b = R^a{}_b - \frac{1}{2}\,\delta^a{}_b R$:

$$G^0{}_0 = -3\,\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}, \qquad G^1{}_1 = G^2{}_2 = G^3{}_3 = -2\,\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2},$$
$$G^1{}_2 = G^2{}_3 = G^3{}_1 = G^0{}_1 = G^0{}_2 = G^0{}_3 = 0.$$

Das sind bereits die in (5.7.1, 2) benutzten Ausdrücke. Wir müßten sie zwar auf die früher verwendeten holonomen Komponenten umrechnen, doch für eine beliebige diagonale Metrik stimmen die Diagonalkomponenten eines beliebigen (1,1)-Tensors A in beiden Fällen überein, wenn die Kobasis wie hier gewählt ist: Sei

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_i g_{ii}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i \ldots \qquad \omega^i = \sqrt{|g_{ii}|}\,\mathrm{d}x^i, \qquad g^{ii} = 1/g_{ii}, \tag{7.7.4}$$

dann ist

$$\begin{aligned}
&e_i = \sqrt{|g^{ii}|}\,\partial_i,\\
&A = \sum_{i,k} A^{\bar{i}}{}_{\bar{k}}\,\partial_i \otimes \mathrm{d}x^k = \sum_{i,k} A^i{}_k\, e_i \otimes \omega^k = \sum_{i,k} A^i{}_k \sqrt{|g^{ii}||g_{kk}|}\,\partial_i \otimes \mathrm{d}x^k\\
&A^{\bar{i}}{}_{\bar{k}} = \sqrt{|g^{ii}||g_{kk}|}\,A^i{}_k,\\
&A^{\bar{i}}{}_{\bar{i}} = A^i{}_i
\end{aligned} \tag{7.7.5}$$

(hier wurden die holonomen Komponenten durch Überstreichen gekennzeichnet und die Summenkonvention aufgehoben). Dies ist der Grund für die Zweckdienlichkeit der gemischten Komponenten des Ricci- und Einstein-Tensors im Fall diagonaler Metrik, da die in bezug auf die anholonome Basis η_{ab} definierten Tensorkomponenten (z. B. im Fall des Energie-Impulstensors) mit den von lokalen freifallenden Beobachtern gemessenen (die ja ein Inertialsystem mit Metrik η_{ab} benutzen) übereinstimmen.

7.7.2 Drehinvariante Linienelemente

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2a}\mathrm{d}t^2 - e^{2b}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2, \tag{7.7.6}$$

wobei $a = a(r,t)$, $b = b(r,t)$. Wir können die Äquivalenz der θ- und ϕ-Richtung ausnutzen, wenn wir

$$\omega^0 = e^a\,\mathrm{d}t, \qquad \omega^1 = e^b\,\mathrm{d}r \qquad \omega^2 = r\,\mathrm{d}\theta, \qquad \omega^3 = r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$$

als orthonormale Kobasis einführen. Aus

$$\mathrm{d}\omega^0 = e^a a' \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}\omega^1 = e^b \dot{b}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r,$$

$$\mathrm{d}\omega^3 = \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi, \qquad \mathrm{d}\omega^2 = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

ergibt sich ($\omega_{ab} = -\omega_{ba}$!)

$$\omega^1{}_0 = e^{a-b}\,a'\,\mathrm{d}t + e^{b-a}\,\dot{b}\,\mathrm{d}r, \qquad \omega^2{}_1 = e^{-b}\,\mathrm{d}\theta = \frac{e^{-b}}{r}\,\omega^2,$$

$$\omega^3{}_1 = \frac{e^{-b}}{r}\,\omega^3, \qquad \omega^3{}_2 = \cos\theta\,\mathrm{d}\phi.$$

Es genügt wieder aus Symmetriegründen, $\Omega^0{}_1$, $\Omega^0{}_2$, $\Omega^1{}_2$, $\Omega^2{}_3$ zu berechnen. (Achtung: obwohl $\omega^0{}_2 = 0$, darf $\Omega^0{}_2 = 0 + \omega^0{}_a \wedge \omega^a{}_2$ nicht vergessen werden!). Wir erhalten

$$\mathrm{d}\omega^0{}_1 = A\omega^0 \wedge \omega^1, \quad \mathrm{d}\omega^2{}_1 = -e^{-b}(\dot{b}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta + b'\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta), \quad \mathrm{d}\omega^3{}_2 = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi,$$

$$A := -[e^{-2b}(a'^2 - a'b' + a'') + e^{-2a}(\dot{a}\dot{b} - \dot{b}^2 - \ddot{b})],$$

und für die Krümmungsformen

$$\Omega^0{}_1 = A\omega^0 \wedge \omega^1 \Rightarrow R^0{}_{101} = A,$$

$$\Omega^0{}_2 = \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_2 = -\frac{e^{-b}}{r}(e^{-b}a'\omega^0 + e^{-a}\dot{b}\,\omega^1) \wedge \omega^2$$

$$\Rightarrow R^0{}_{202} = -a'e^{-2b}/r = R^0{}_{303}, \qquad R^0{}_{212} = -\dot{b}\,e^{-a-b}/r = R^0{}_{313},$$

$$\Omega^1{}_2 = e^{-a-b}\,\frac{\dot{b}}{r}\,\omega^0 \wedge \omega^2 + e^{-2b}\,\frac{b'}{r}\,\omega^1 \wedge \omega^2$$

$$\Rightarrow R^1{}_{202} = e^{-a-b}\dot{b}/r = R^1{}_{303}, \qquad R^1{}_{212} = e^{-2b}\,b'/r = R^1{}_{313},$$

$$\Omega^2{}_3 = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2b}}{r^2}\right)\omega^2 \wedge \omega^3 \Rightarrow R^2{}_{323} = \frac{1 - e^{-2b}}{r^2}.$$

Daraus finden wir für R_{ab}:

$$R_{00} = A - 2a'e^{-2b}/r, \qquad R_{01} = -2\dot{b}\,e^{-a-b}/r, \qquad R_{11} = -A - 2b'e^{-2b}/r,$$

$$R_{22} = R_{33} = (a' - b')e^{-2b}/r - (1 - e^{-2b})/r^2, \qquad \text{die anderen} = 0,$$

für den Krümmungs-Skalar:

$$\frac{1}{2}R = A - 2(a' - b')e^{-2b}/r + (1 - e^{-2b})/r^2,$$

und für den Einstein-Tensor in gemischten Komponenten:

$$G^0{}_0 = -\frac{1}{r^2} - e^{-2b}\left(\frac{2b'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) = G^{\bar{0}}{}_{\bar{0}},$$

$$G^1{}_1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-2b}\left(\frac{2a'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = G^{\bar{1}}{}_{\bar{1}},$$

$$G^2{}_2 = G^3{}_3 = e^{-2a}(\dot{a}\dot{b} - \dot{b}^2 - \ddot{b}) + e^{-2b}\left(a'' + a'^2 - a'b' + \frac{a' - b'}{r}\right)$$

$$= G^{\bar{2}}{}_{\bar{2}} = G^{\bar{3}}{}_{\bar{3}}, \qquad G^1{}_0 = 2\dot{b}e^{-a-b}/r, \qquad G^{\bar{1}}{}_{\bar{0}} = e^{a-b}G^1{}_0 = 2\dot{b}e^{-2b}/r.$$

Die $G^{\bar{i}}{}_{\bar{k}}$ sind bereits die in (3.3.24) verwendeten holonomen Komponenten.

Aufgaben

1. Sei $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\,\mathrm{d}\sigma^2$, wo $\mathrm{d}\sigma^2 = h_{\mu\nu}(x^\lambda)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$ nur von den raumartigen Koordinaten abhängt. Drücke Krümmungstensor und Einstein-Tensor von $\mathrm{d}s$ durch $R(t)$ und die entsprechenden Tensoren der 3-Metrik $\mathrm{d}\sigma^2$ aus:

$$R^0{}_{\alpha 0\beta} = \frac{\ddot{R}}{R}\,\delta_{\alpha\beta},$$

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 (\delta_{\alpha\mu}\,\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\,\delta_{\beta\mu}) + {}^{(3)}R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}.$$

Man behandle das nichtdiagonale Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right)\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)$$

($u := t - r$; wegen seiner Bedeutung siehe Lindquist, Schwartz und Misner, Phys. Rev. **137**, 1364 (1965)). Man zeige, daß von den holonomen kovarianten Komponenten des Ricci-Tensors nur $R_{uu} = 2\dot{m}/r^2$ nicht verschwindet. *Hinweis:* Verwende eine orthonormale Basis mit

$$\omega^0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r.$$

3. Berechne $G_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}$ für das Gödelsche Linienelement (K. Gödel, Rev. Mod. Phys. **21**, 447 (1949))

$$ds^2 = (dt + e^x dy)^2 - dx^2 - \frac{1}{2}e^{2x}\,dy^2 - dz^2.$$

4. Berechne den Ricci-Tensor für das Linienelement

$$ds^2 = f^2(r)\left[dt + 4l\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\phi\right]^2 - dr^2/f^2 - (r^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)$$

(vgl. C. W. Misner, J. Math. Phys. **4**, 924 (1963), Appendix). Für welches $f(r)$ ist R_{ik} gleich Null?

7.8 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Wir haben im Abschnitt 3.4 das invariante Integral einer auf dem Riemannschen Raum definierten skalaren Funktion benutzt. Es zeigt sich, daß die Definition koordinatenunabhängiger Integrale über Mannigfaltigkeiten direkt auf äußere Differentialformen höherer Stufe fuhrt. Zunächst aber einige Vorbemerkungen.

In der speziellen Relativitätstheorie wird der Energie-Impulsvektor eines Systems durch

$$P^i = \int_\sigma T^i{}_k\,d\tau^k \tag{7.8.1}$$

definiert und gezeigt, daß bei Divergenzfreiheit von $T^i{}_k$ die Größen P^i nicht von σ abhängen und Komponenten eines Vierervektors bilden (die Indizes beziehen sich auf Cartesische Inertialkoordinaten, und $d\tau^i$ ist das vektorielle Flächenelement der raumartigen Hyperfläche σ). Im Riemannschen Raum kann das nicht der Fall sein, die Resultate von Integrationsprozessen können hier immer nur Invariante sein. Denn führen wir im einfachsten Alternativfall eine Koordinatentransformation aus,

$$P^i = \int p^i(x)\sqrt{-g}\,d^4x = \int p^{\bar{k}}(x)\frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{k}}}\sqrt{-\bar{g}}\,d^4\bar{x}, \tag{7.8.2}$$

kann im allgemeinen $\partial x^i/\partial x^{\bar{k}} = p^i{}_{\bar{k}}(\bar{x})$ nicht vor das Integral gezogen werden, so daß die P^i kein einfaches Transformationsverhalten zeigen. Tensoren können daher nicht als Resultate von Integrationen auftreten. Genauer betrachtet, ist das bei (7.8.1) ebenso: Nur bei *Lorentz-Transformation* und Verwendung cartesischer Koordinaten bilden die P^i Vierervektoren. Der Grund ist, daß Lorentz-Transformationen auch aktiv aufgefaßt werden können und Symmetrien des

linkowski-Raums sind, wobei in cartesischen Koordinaten die Transformation near ist. (Diese Situation kann auch in Riemannschen Räumen mit Symmeriegruppen auftreten, die entsprechenden Erhaltungsgrößen (Aufgabe 1) transormieren dann nach der koadjungierten Darstellung der Symmetriegruppe.)

Diese neue Eigenschaft des allgemeinen Riemannschen Raumes gegenüber lem flachen ist einer der Gründe, weshalb es unmöglich ist, Gesamtenergie und impuls eines beliebigen Systems in der Einsteinschen Gravitationstheorie zu lefinieren. Nur für asymptotisch flache Metriken (wie etwa die Schwarzschild-Metrik) lassen sich Gesamtenergie und -impuls angeben, die dann in bezug auf orentz-Transformationen im Unendlichen einen Vierervektor bilden. Wir werlen daher im folgenden nur invariante Integrale zu definieren versuchen, und war Integrale über den ganzen Raum X^n oder über q-dimensionale Teilmanigfaltigkeiten G^q, die in einem Koordinatensystem x^i durch ihre Parameterlarstellung:

$$x^i = \Phi^i(u^1, \ldots, u^q) \tag{7.8.3}$$

gegeben seien. Dabei variieren die u^μ auf einem Gebiet Γ des $\mathbf{R}^q$.

Naiverweise würde man zunächst Ausdrücke der Art

$$\int A_i \, \mathrm{d}x^i, \quad \int A_{ik} \, \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^k, \quad \int A_{ikj} \, \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^k \, \mathrm{d}x^j \ldots \tag{7.8.4}$$

bilden, um Invariante als Resultat zu erhalten. Es wird sich allerdings zeigen, daß $\mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^k \ldots$ äußere Produkte sein müssen, so daß von den A_{ik} jeweils nur der total antisymmetrische Teil beiträgt. Die Integranden sind daher q- Formen σ, die über G^q integriert werden:

$$J = \int_{G^q} \sigma = \int_{G^q} \sigma_H(x) \, \mathrm{d}x^H. \tag{7.8.5}$$

Besonders wichtig im Zusammenhang mit derartigen Integralen ist der *allgemeine Stokessche Integralsatz:* Ist die Teilmannigfaltigkeit, über die wir integrieren, der Rand ∂G einer $q+1$ dimensionalen Teilmannigfaltigkeit G (der Rand eines Volumens ist die Oberfläche, der eines Flächenstücks die Randkurve etc.), so gilt

$$\boxed{\int_{\partial G} \sigma = \int_G \mathrm{d} \wedge \sigma.} \tag{7.8.6}$$

Die Beispiele (7.5.4) zeigen, daß (7.8.6) für λ den Stokesschen, für μ den Gaußschen Integralsatz liefert.

Der etwas langwierige Beweis von (7.8.6) samt genauer Formulierung der Voraussetzungen und die formale Definition von ∂G ist z. B. in Spivak (1965) zu finden. Wir wollen hier nur die Berechnung und physikalische Bedeutung von

Integralen der Gestalt (7.8.5) erläutern und Ausdrücke für Volumselemente herleiten.

Die Berechnung von (7.8.5) erfolgt durch Zurückführung auf Integrationen von q-Formen im $\mathbf{R}^q$. Ist ϕ eine q- Form im $\mathbf{R}^q$, so zerlegen wir ϕ nach einer Kobasis,

$$\phi = f\,\mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^q, \tag{7.8.7}$$

wobei u^μ $(\mu = 1, \ldots, q)$ cartesische Koordinaten im $\mathbf{R}^q$ sind, und definieren

$$\int \phi = \int_\Gamma f\,\mathrm{d}^4u. \tag{7.8.8}$$

Rechts steht ein gewöhnliches q-dimensionales Integral, dessen Koordinatenunabhängigkeit man leicht einsieht.

Um die Integrale (7.8.5) zu definieren, ordnen wir σ die durch Einsetzen der Parameterdarstellung (7.8.3) entstehende q- Form $\Phi * \sigma$ über $\mathbf{R}^q$ zu:

$$\begin{aligned} \Phi * \sigma &:= \textstyle\sum_H \sigma_H(\Phi^\iota(u^\mu))\,\mathrm{d}\Phi^H, \\ \mathrm{d}\Phi^H &= \frac{\partial(x^{h_1}, \ldots, x^{h_q})}{\partial(u^1, \ldots, u^q)}\,\mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^q. \end{aligned} \tag{7.8.9}$$

Diese q-Form über $\mathbf{R}^q$ integrieren wir wie (7.8.7). Wieder kann man verifizieren, daß $\int \Phi * \sigma$ nicht vom speziellen Koordinatensystem abhängt. Als Beispiel betrachten wir die Form $x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ im $\mathbf{R}^3$, die über den über $x^2 + y^2 \leq 1$ liegenden Teil der Fläche $z = xy$ zu integrieren sei. Mit $z = xy$, $\mathrm{d}z = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$ folgt $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ und daher

$$\int_G (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \int\limits_{x^2+y^2\leq 1} -xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

usw.

Wir wollen nun versuchen, die bisher formal eingeführten Integrale auch anschaulich als Riemannsche Summen zu interpretieren. Die Tangentenvektoren

$$v_\mu = \frac{\partial \Phi^\iota}{\partial u^\mu}\,\partial_\iota \quad (\mu = 1, \ldots, q) \tag{7.8.10}$$

an die Parameterlinien spannen in jedem Punkt P einen q- dimensionalen Teilraum t_P von T_P auf, den Tangentialraum an G^q. Das Integral (7.8.5) ist nun der Limes $\Delta u^\mu \to 0$ der Summe von Beiträgen der von den Vektoren $v_1\Delta u^1$, $v_2\Delta u^2, \ldots$ aufgespannten Parallelepipede. Der Beitrag eines solchen Parallelepipeds zur Riemannschen Summe sollte folgende Eigenschaften haben:

1) Lineare Abhängigkeit von jeder Kante.

2) Ein Parallelepiped mit zwei zusammenfallenden Kanten gibt keinen Beitrag.

Der Beitrag ist also der Wert, den ein multilineares alternierendes Funktional über T_P für die Argumente $v_1, \ldots, v_q$ annimmt. Mit anderen Worten: *Zu jeder q-Form σ auf X^n gehört ein Integral über G^q.* Die Produkte der Differentiale in (7.8.4) müssen also äußere Produkte sein. Integrieren wir die Zahlenfunktion $\sigma(v_1, \ldots, v_q)$ über $\mathrm{d}^q u$, so ist das Resultat genau der Wert, den wir mittels (7.8.7 – 9) erklärt haben.

Eine Riemannsche Metrik g auf X^n definiert durch

$$\gamma(v, w) = g(v, w), \qquad v, w \in t_p,$$

die *induzierte Metrik* $\gamma = \Phi * g$ auf G^q. Sie erlaubt die Einführung einer Volumsmessung, indem wir Volumina von Parallelepipeden in den Tangentialräumen t_P wie im Abschnitt 7.4 ((7.4.12) und Aufgabe 4) erklären. Daraus geht hervor, daß den Vektoren $v_1, \ldots, v_q$ durch

$$\begin{aligned} \eta_q &= \sqrt{|\det \gamma_{\mu\nu}|}\, v^1 \wedge \ldots \wedge v^q, \\ \gamma_{\mu\nu} &:= \gamma(v_\mu, v_\nu) = g(v_\mu, v_\nu) \end{aligned} \tag{7.8.11}$$

das Volumen des von ihnen aufgespannten Parallelepipeds zugeordnet wird, wenn die v^μ die zu den v_μ dualen Kovektoren über t_P sind. Die q-Form η_q heißt (pseudo-) *skalares Volumselement* von G^q.

Für $q = n$ erhalten wir das skalare Volumselement

$$\mathrm{d}V = \sqrt{|\det g_{ik}|}\, \mathrm{d}^n x = \sqrt{|\det g_{ik}|}\, \epsilon(i_1 \ldots i_n)\, \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{i_n} \tag{7.8.12}$$

von X^n selbst in holonomer Gestalt.

$$\epsilon_{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{|\det g_{ik}|}\, \epsilon(i_1 \ldots i_n) \tag{7.8.13}$$

sind also kovariante Komponenten eines total antisymmetrischen (Pseudo-) Tensors n-ter Stufe, des bekannten ϵ-Tensors (vgl. Konventionen). Für $q = 1$ ergibt (7.8.11) das gewöhnliche Linienelement $\mathrm{d}s$ für Kurven.

Die $*$-Operation ermöglicht es, die in (7.8.4) formal angeschriebenen Integrale mit Volumsintegralen in Verbindung zu bringen, d. h., ihre metrische Bedeutung zu klären, wie sie vom $\mathbf{R}^3$ her geläufig ist (bei geeigneter Interpretation von $\boldsymbol{A}$ bedeutet etwa $\int \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ die Arbeit, $\int *(\boldsymbol{A}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \int \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}\boldsymbol{O}$ die Durchflußmenge). So ist etwa für $n = 4$

$$\int F_{ikmn}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^k\, \mathrm{d}x^m\, \mathrm{d}x^n = \int F_{ikmn}\, \epsilon(ikmn)\, \mathrm{d}^4 x = \int F\, \mathrm{d}V \tag{7.8.14}$$

das Volumsintegral der durch

$$F = -F_{ikmn}\, \epsilon^{ikmn} = 4! * (F_{ikmn}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^k\, \mathrm{d}x^m\, \mathrm{d}x^n) \tag{7.8.15}$$

definierten Funktion F über X^4.

Zu einem Vektorfeld A (bzw. der mit ihm identifizierten 1-Form) betrachten wir die Integrale $\int A$, $\int *A$ über eine Kurve bzw. Hyperfläche. Wegen (7.4.14) ist

$$A(e_1) = (A, e_1) = \eta_1((A, e_1)e_1),$$

$$*A(e_1, \ldots, e_{n-1}) = (*A, e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-1}) = \eta_n(A \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-1}),$$

so daß $\int A$, $\int *A$ ihre übliche Bedeutung als Integrale der Tangential- bzw. Normalprojektion von A längs der Kurve bzw. Hyperfläche beibehalten. In holonomen Komponenten ist

$$A = A_i \, \mathrm{d}x^i, \qquad *A = A^i \, \mathrm{d}\tau_i, \qquad \text{wo}$$
$$\mathrm{d}\tau_i := \frac{1}{(n-1)!} \epsilon_{ii_1 \ldots i_{n-1}} \, \mathrm{d}x^{i_1} \ldots \mathrm{d}x^{i_{n-1}} \tag{7.8.16}$$

die Komponenten einer vektoriellen $(n-1)$-Form sind, des *vektoriellen normalen Hyperflächenelements* der Hyperfläche. Da die $*$-Operation eindeutig umkehrbar ist, haben wir damit gleichzeitig die Bedeutung von Integralen der Gestalt

$$J = \int A_{i_1 \ldots i_{n-1}} \, \mathrm{d}x^{i_1} \ldots \mathrm{d}x^{i_{n-1}}$$

gefunden. Die Formen $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{n-1}$ lassen sich analog als Komponenten einer tensoriellen $(n-1)$-Form auffassen (tensorielles tangentiales Hyperflächenelement).

Ganz analog könnten wir jetzt neben den skalaren Volumselementen beliebiger G^q noch zwei entsprechende tensorielle einführen (tangential und normal). wollen hier aber nur noch den Stokesschen Satz für $n = 4$, $q = 3$ explizit anschreiben:

$$\int_{\partial V} A^i \, \mathrm{d}\tau_i = \int_V \left(A^i \sqrt{|g|}\right)_{,i} \mathrm{d}^4x = \int_V A^i{}_{;i} \, \mathrm{d}V. \tag{7.8.17}$$

Aufgaben

1. a) A^i sei ein divergenzfreies Vektorfeld, das im räumlich Unendlichen genügend stark verschwindet. Zeige, daß das Integral $\int_\sigma A^i \, \mathrm{d}\tau_i$ dann nicht von der speziell gewählten raumartigen Hyperfläche σ abhängt und daher eine integrale Erhaltungsgröße ist.

   Anleitung: Wende (7.8.17) auf ein Gebiet V an, dessen Rand ∂V zum Teil aus zwei Hyperflächen σ und σ' besteht.

b) Suche nach Beispielen für derartige Vektorfelder! Beachte, daß die lokale Energie-Impulserhaltung $T^{ik}{}_{;k} = 0$ im allgemeinen nicht zu integralen Erhaltungsgrößen führt. Zeige, daß zu jedem Killingvektor v eine Erhaltungsgröße gehört, indem $A^i = T^{ik} v_k$ gewählt wird. Spezialisiere auf den flachen Raum! Wie kommt das gewohnte Transformationsverhalten der Erhaltungsgrößen in diesem Fall zustande?

c) Unter Annahme eines statischen Gravitationsfeldes bilde man für die statischen Beobachter (Vierergeschwindigkeit $u = (v, v)^{-1/2} v$, wo v das Killingfeld) die lokale Energiedichte $\mathcal{E} = T^{ik} u_i u_k$. Ihr Integral über eine zum Killingfeld orthogonale Hyperfläche σ mit Volumselement $\mathrm{d}\tau$ ist

$$E = \int_\sigma \mathcal{E}\, \mathrm{d}\tau \neq \int_\sigma T^{ik} v_k\, \mathrm{d}\tau_i = \int_\sigma (v, v)^{1/2} \mathcal{E}\, \mathrm{d}\tau.$$

Nur die letztere Größe ist erhalten, der Faktor $(v, v)^{1/2}$ berücksichtigt die potentielle Energie des durch T^{ik} beschriebenen Systems im Gravitationsfeld.

2. Berechne induzierte Metrik und skalares Volumselement auf den Massenschalen $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ der speziellen Relativitätstheorie mit der Minkowski-Metrik $g = \mathrm{d}E^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{p}^2$ im Impulsraum (Parameter $\boldsymbol{p}$):

$$\gamma = \left(\frac{\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{E}\right)^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{p}^2, \qquad \eta_3 = \frac{m}{E}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}.$$

Beachte die bei Flächen mit lichtartigen Normalen (hier $m = 0$, Lichtkegel) auftretende Situation $\eta_3 \equiv 0$. Das lorentzinvariante Integral $\int \ldots \mathrm{d}^3 p/E$ bleibt aber weiter sinnvoll.

3. Wie kann man vektorielle (und tensorielle) Flächenelemente koordinatenfrei charakterisieren? In welchem Sinn ist das vektorielle Flächenelement zur Hyperfläche orthogonal, das tensorielle tangential?

Kapitel 8

Sternbau und Gravitationskollaps

Die Theorie des Gravitationskollapses hat sich immer mehr zu einem der zentralen Themen der allgemeinen Relativitätstheorie entwickelt. Eine Fülle von Resultaten über kollabierende Objekte wurde hergeleitet, von denen hier nur die einfachsten Theoreme über den sphärisch symmetrischen Kollaps bewiesen werden können. Die Theorie des Gravitationskollapses stellt zugleich eine Verbindung von Elementarteilchenphysik und Gravitationstheorie her, da die in die Theorie des Sternbaues eingehende Zustandsgleichung $p = p(\rho, T)$ aus der Kern- und Hochenergiephysik herzuleiten ist. Eine qualitative, nichtrelativistische Analyse der Theorie entarteter Sterne soll als Einführung in diese Problematik den Anfang dieses Kapitels bilden.

8.1 Elementare Theorie entarteter Sterne

Das Leben eines Sternes beginnt mit seiner Entstehung aus einer Gaswolke, die sich unter der Wirkung der eigenen Schwerkraft allmählich kontrahiert und dabei aufheizt, bis der entstehende Druck der Schwerkraft das Gleichgewicht hält. Die Gleichgewichtsbedingung ergibt sich dabei aus einer einfachen Betrachtung der Druckzunahme im Innern eines kugelförmig und nichtrotierend angenommenen Sternes. Es ist („Emdensche Gleichungen")

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2}\,\rho, \tag{8.1.1}$$

wobei

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, \mathrm{d}r' \tag{8.1.2}$$

die im Stern bis zum Radius r enthaltene Masse bedeutet. (8.1.1) folgt daraus, daß der Druckanstieg $\mathrm{d}p$ zwischen r und $r + \mathrm{d}r$ der Gravitationskraft = Schwerebeschleunigung $(G\mathcal{M}(r)/r^2)$ mal Dichte (ρ) entspricht. Um ein einfaches Bild des Sternbaues zu erreichen, nähern wir im folgenden den Stern durch eine Gaskugel homogener Dichte ($\rho = \text{const}$). (8.1.1, 2) vereinfachen sich dann zu

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{4\pi}{3} G\rho^2 r \tag{8.1.3}$$

oder

$$p = p_0 - \frac{2}{3}\pi G\rho^2 r^2. \tag{8.1.4}$$

Dabei ist die Integrationskonstante p_0 der Druck im Zentrum des Sternes. Für $r = R$ (Sternradius) muß $p = 0$ werden: daraus folgt

$$p_0 = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2 \tag{8.1.5}$$

oder, anders geschrieben,

$$\frac{p_0}{\rho c^2} = \frac{2\pi}{3}\frac{G\rho R^3}{R c^2} = \frac{1}{2}\frac{M}{R}, \tag{8.1.6}$$

wobei $2M = 8\pi G\rho R^3/3$ der Schwarzschild-Radius des betrachteten Sternes ist.

Im folgenden werden wir (analog zur Näherung konstanter Dichte ρ) den Druck p_0 im Sternzentrum durch einen mittleren Druck p ersetzen und ferner numerische Faktoren (wie etwa die 2 in (8.1.6)) der Einfachheit halber vernachlässigen, da es zunächst nur auf Größenordnungen ankommt. (8.1.6) wird dann

$$\boxed{\frac{M}{R} \approx \frac{p}{\rho c^2}.} \tag{8.1.7}$$

Das für die allgemeine Relativitätstheorie entscheidende Verhältnis von Schwarzschild-Radius zu Radius eines Körpers ist daher durch das Verhältnis von Druck zu Energiedichte (ρc^2) bestimmt.

8.1.1 Die Zustandsgleichung normaler Sterne

Um (8.1.7) weiter auszuwerten, müssen wir Annahmen über die Zustandsgleichung der Sternmaterie machen. Allgemein können wir

$$\frac{p}{\rho c^2} =: f(\rho, T) \tag{8.1.8}$$

setzen, wobei die dimensionslose Funktion f von Dichte und Temperatur abhängt.

Betrachten wir zunächst Sterne, deren Materie durch ein *ideales Gas* genähert werden kann. Die Gasgleichung $pV = RT$ läßt sich leicht auf die Form bringen:

$$f = \frac{p}{\rho c^2} = \frac{k_B T}{mc^2} = \frac{v^2}{3c^2}, \tag{8.1.9}$$

wobei m die Molekülmasse, v eine mittlere Molekülgeschwindigkeit und k_B die Boltzmannsche Konstante bedeuten.

Für normale Sterne ist f und damit das Verhältnis von Schwarzschild-Radius zu Radius in unserem einfachen Modell eindeutig durch die Temperatur (und das Molekülgewicht) im Sterninneren bestimmt. Es ist

$$\frac{M}{R} = \frac{k_B T}{mc^2} \approx 10^{-6},$$

da $k_B T$ im Sterninneren einigen keV entspricht (durch Kernreaktion festgelegt), während die Ruhenergie mc^2 von Wasserstoff (der den Hauptbestandteil normaler Sterne bildet) etwa 1 GeV ist.

Da relativistische Effekte – wie Lichtablenkung δ, Rotverschiebung des von der Sternoberfläche emittierten Lichtes $\Delta\nu/\nu$ und der relative Massendefekt $\Delta\mathcal{M}/\mathcal{M}$ eines Sternes – von der Größenordnung M/R sind (siehe (4.2.5), (4.3.27) und Aufgabe 3), erhalten wir die bemerkenswerte Gleichungskette

$$\delta \approx \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta\mathcal{M}}{\mathcal{M}} \approx \frac{M}{R} = f(\rho, T) \approx \frac{k_B T}{mc^2} \approx 10^{-6}. \tag{8.1.10}$$

Die Kleinheit relativistischer Effekte ist daher bei Normalsternen von der Kernphysik her bedingt. (8.1.10) zeigt, daß die relativistischen Effekte unabhängig von der Größe der Gravitationskonstante sind!

Solange Kernreaktionen die Temperatur T aufrechterhalten können, brennt der Stern nun stationär auf der Hauptreihe des Hertzsprung-Russel[1]-Diagrammes (Sterne von etwa Sonnenmasse einige Milliarden Jahre lang; schwerere Sterne wesentlich kürzer, da die Leuchtkraft $L \propto \mathcal{M}^{3.5}$ ist, während der Energievorrat nur proportional zu $\mathcal{M}$ ist).

8.1.2 Die Zustandsgleichung entarteter Materie

Wenn die Vorräte an Kernenergie erschöpft sind, kann die hohe Temperatur und damit der Druck im Sterninneren nicht mehr aufrechterhalten werden, und der Stern bricht in sich zusammen. Es werden dabei sehr große mittlere Dichten im Sterninneren erreicht, und es zeigt sich, daß dann wieder besonders einfache Verhältnisse vorliegen.

[1] Siehe z. B. Müller (1964), p. 146.

Zunächst haben wir die Zustandsgleichung (8.1.8) im Bereich hoher Dichten ($\rho > 10^4\,\mathrm{g/cm^3}$) herzuleiten. Während ein ideales Gas dadurch charakterisiert werden kann, daß $f(\rho, T)$ nur eine Funktion $f(T) = k_B T/mc^2$ der Temperatur ist, wird für die Materie bei hoher Dichte $f = f(\rho)$ bei allen für Sternmodelle in Betracht kommenden Temperaturen. In diesem Fall bezeichnet man die *Materie* als *entartet*:

$$\frac{p}{\rho c^2} = \underset{\text{(allgem. Fall)}}{f(\rho, T)} = \begin{cases} f(T) & \text{ideales Gas.} \\ f(\rho) & \text{entartete Materie.} \end{cases} \tag{8.1.11}$$

Bei entarteter Materie ist die kinetische Energie der Teilchen und damit der Druck nicht durch die Temperatur bedingt wie beim idealen Gas, sondern kommt aufgrund der Unschärferelation durch die gegenseitige Einschränkung der Teilchen auf kleine Raumgebiete zustande (Fermi-Entartung). Komprimiert man nämlich ein Material – dabei ist es ziemlich gleichgültig, wovon man ausgeht – auf Dichten von etwa $10^4\,\mathrm{g/cm^3}$, so nimmt das Material metallische Eigenschaften an, und die Elektronen verhalten sich wie ein freies Elektronengas, dessen Druck wir abzuschätzen haben[2].

Die Elektronen beschränken sich wegen des Pauli-Prinzips (heuristisch gesprochen) gegenseitig auf Raumgebiete der Größe d^3, wobei d ein mittlerer Teilchenabstand ist. Nach der Unschärferelation kommt den Teilchen dadurch der Fermi-Impuls p_F zu.

$$p_F \cdot d \approx \hbar, \tag{8.1.12}$$

der zur Fermi-Energie $\epsilon_F = p_F^2/2m_0$ der Teilchen führt (m_0 ist die Elektronenmasse[3]). Zur Herleitung der Zustandsgleichung eines entarteten Gases kann man (wenn man wieder von numerischen Faktoren absieht) die kinetische Energie kT der Teilchen im normalen Gas einfach durch ϵ_F ersetzen:

$$f = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{\epsilon_F}{mc^2} \approx \begin{cases} \dfrac{1}{mc^2}\dfrac{p_F^2}{m_0} & \text{(NR)}, \\ \dfrac{1}{mc^2}\, p_F c & \text{(R)}. \end{cases} \tag{8.1.13, 14}$$

Die beiden Ausdrücke für ϵ_F beziehen sich dabei auf den Fall nichtrelativistischer (NR) bzw. hochrelativistischer (R) Elektronen. Der Übergang von (8.1.13) auf(8.1.14) geschieht etwa bei $p_F \approx m_0 c$ oder, mit (8.1.12), bei

$$d \approx \hbar/m_0 c = \lambda_e = 4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{cm}. \tag{8.1.15}$$

[2]Siehe Müller (1964), p. 150 und Huang II (1964), p. 107, wo sich eine ausführliche und exakte Behandlung der Theorie der Fermi- Entartung findet.

[3]Da $\epsilon_F \propto 1/m_0$ ist, tragen die jeweils leichtesten Fermionen am meisten zum Druck bei.

Wenn der mittlere Teilchenabstand d in der Sternmaterie also auf die Compton-Wellenlänge λ_e der Elektronen herabsinkt, erreichen die Elektronen relativistische Geschwindigkeiten. Die λ_e entsprechende Dichte ist

$$\rho_0 \approx m/\lambda_e^3 = m\, m_0^3 c^3/\hbar^3 \approx 3 \cdot 10^7\,\mathrm{g/cm^3}, \tag{8.1.16}$$

wenn wir als Molekülmasse m wieder die des Wasserstoffatoms ansetzen.

Setzt man (8.1.12) und $\rho = m/d^3$ in (8.1.13, 14) ein, so erhält man als Zustandsgleichung

$$\boxed{\frac{p}{\rho c^2} = \frac{m_0}{m}(\rho/\rho_0)^{n/3} \qquad \begin{array}{lll} n=2 & \rho<\rho_0 & \text{(NR)} \\ n=1 & \rho>\rho_0 & \text{(R)} \end{array}} \tag{8.1.17}$$

Diese Zustandsgleichung gilt für $10^4\,\mathrm{g/cm^3} < \rho < 10^8\,\mathrm{g/cm^3}$.

8.1.3 Weiße Zwerge

Wir setzen nun (8.1.17) in die Gleichgewichtsbedingung (8.1.7) für den Stern ein. Aus $M/R = f$ folgt mit $R \approx (\mathcal{M}/\rho)^{1/3}$

$$G\mathcal{M}^{2/3}\rho^{1/3}/c^2 = f \tag{8.1.18}$$

oder

$$\mathcal{M} = \frac{c^3 f^{3/2}}{\rho^{1/2} G^{3/2}}. \tag{8.1.19}$$

Für jede Dichte ρ gibt es daher genau eine Masse $\mathcal{M}(\rho)$, bei der ein entarteter Stern im Gleichgewicht ist. Einsetzen von (8.1.17) liefert

$$\mathcal{M}(\rho) = \frac{c^3}{\rho^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n/2} \left(\frac{m_0}{m}\right)^{3/2} \tag{8.1.20}$$

oder

$$\mathcal{M}(\rho) = \begin{cases} \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} \mathcal{M}_c, & \rho < \rho_0 \\ \mathcal{M}_c, & \rho > \rho_0 \end{cases} \tag{8.1.21}$$

wobei

$$\mathcal{M}_c = \mathcal{M}(\rho_0) = \frac{c^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{m_0}{m}\right)^{3/2} \tag{8.1.22}$$

die *Chandrasekhar-Grenzmasse* ist.

(8.1.21) zeigt, daß die durch den Elektronendruck aufrechterhaltenen Sterne, die *Weißen Zwerge*, ein Massenspektrum haben, das – in der hier dargestellten einfachen Näherung – für $\rho < \rho_0$ wie $\rho^{1/2}$ ansteigt und für $\rho = \rho_0$ die Chandrasekhar-Grenze $\mathcal{M}_c$ als obere Schranke hat. (Siehe dazu den linken Teil von Abbildung 8.1.)

Einsetzen von (8.1.16) in (8.1.22) liefert

$$\mathcal{M}_c = m\left(\frac{c\hbar}{m^2 G}\right)^{3/2} = m\alpha_G^{-3/2}. \tag{8.1.23}$$

Dabei ist die dimensionslose Konstante

$$\boxed{\alpha_G := \frac{m^2 G}{c\hbar} = 5{,}9 \cdot 10^{-39}} \tag{8.1.24}$$

die *Feinstrukturkonstante der Gravitation*, die völlig analog zur Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante α ist und die Stärke der Gravitationswechselwirkung in dimensionsloser Form angibt. α_G spielt in der Theorie des Sternbaues die gleiche Rolle wie α in der Theorie des Atombaues.

Nach (8.1.23) ist die Zahl A der Protonen in einem Weißen Zwerg etwa durch

$$A = \mathcal{M}_c/m = \alpha_G^{-3/2} \approx 10^{57} \tag{8.1.25}$$

gegeben, so daß sich als Chandrasekhar-Grenze eine Masse

$$\mathcal{M}_c = m\alpha_G^{-3/2} = 3{,}7 \cdot 10^{33}\,\mathrm{g} \approx 1{,}8\mathcal{M}_\odot$$

ergibt (der korrekte Wert ist $1{,}2\,\mathcal{M}_\odot$).

Relativistische Effekte sind für Weiße Zwerge von der Größenordnung

$$\delta \approx \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta\mathcal{M}}{\mathcal{M}} \approx \frac{M}{R} \approx \frac{m_0}{m}(\rho/\rho_0)^{2/3} \approx \frac{m_0}{m} \approx 10^{-4}. \tag{8.1.26}$$

Die Kleinheit relativistischer Effekte spiegelt demnach das Elektron : Proton-Massenverhältnis wider. Es ist interessant zu sehen, wie hier allgemeine Relativitätstheorie, Astrophysik und Elementarteilchenphysik ineinandergreifen.

Die *Radien Weißer Zwerge* sind durch

$$R \approx \lambda_e \alpha_G^{-1/2}(\rho_0/\rho)^{1/6} \approx 5000\,\mathrm{km}\,(\rho_0/\rho)^{1/6} \tag{8.1.27}$$

gegeben, wie in Aufgabe 1 gezeigt wird.

3.1.4 Neutronensterne

Unsere bisherige Rechnung hat gezeigt, daß für $\rho > 10^8\,\mathrm{g/cm^3}$ die Elektronen relativistisch werden, d. h. kinetische Energien von der Größenordnung MeV aufweisen. Es erfolgt bei diesen Dichten ein allmählicher Übergang zu Neutronenmaterie, da wegen der hohen kinetischen Energie der Elektronen die Neutronen nicht in Protonen und Elektronen (und Antineutrinos $\bar{\nu}_e$) zerfallen können, sondern im Gegenteil mittels der Reaktion

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e$$

im Stern Neutronen gebildet werden. Im Dichtebereich zwischen 10^8 und $10^{13}\,\mathrm{g/cm^3}$ werden zunächst sehr neutronenreiche schwere Atomkerne wie Ni^{62}_{28}, Y^{122}_{39} aufgebaut. Ab etwa $\rho \approx 3 \cdot 10^{11}\,\mathrm{g/cm^3}$ existieren dann freie Neutronen neben Atomkernen, und bei $\rho \approx 10^{13}\,\mathrm{g/cm^3}$ ist schließlich der Übergang zum Neutronengas beendet.

Ab diesen Dichten läßt sich die Zustandsgleichung wieder einfach berechnen, da dann analoge Verhältnisse wie bei Weißen Zwergen vorliegen. Da Neutronen der Fermi-Statistik genügen, baut sich ab $\rho \approx 10^{13}\,\mathrm{g/cm^3}$ allmählich der Neutronendruck auf, wobei die Zustandsgleichung

$$f(\rho) = \frac{p}{\rho c^2} = (\rho/\rho_1)^{n/3} \qquad \begin{array}{lll} \rho < \rho_1 & n = 2 & \mathrm{NR} \\ \rho > \rho_1 & n = 1 & \mathrm{R} \end{array} \tag{8.1.28}$$

aus (8.1.17) durch die Substitution $m_0 = m$ = Neutronenmasse hervorgeht (das Neutron ist nun sowohl für den Druck als auch für die Energiedichte verantwortlich) und

$$\rho_1 = m/\lambda_n^3 \approx 10^{16}\,\mathrm{g/cm^3} \tag{8.1.29}$$

ist (λ_n ist die Compton-Wellenlänge des Neutrons).

Ersetzen wir m_0 auch in (8.1.21) durch m, so erhalten wir für das *Massenspektrum der Neutronensterne*

$$\mathcal{M}(\rho) = \begin{cases} (\rho/\rho_1)^{1/2}\mathcal{M}_c & \rho < \rho_1 \\ \mathcal{M}_c & \rho > \rho_1 \end{cases} \tag{8.1.30}$$

Die Grenzmasse $\mathcal{M}_c$ für Neutronensterne ist dabei durch die Chandrasekhar-Grenze $\mathcal{M}_c$ wie bei Weißen Zwergen gegeben, da (8.1.23) nur von der Protonenmasse m abhängt, die wir gleich der Neutronenmasse setzen können. Die Resultate dieser Überlegungen sind in Abbildung 8.1 zusammengefaßt.

Der Abfall der Kurve zwischen 10^8 und $10^{13}\,\mathrm{g/cm^3}$ ist durch die Bildung der Neutronen verursacht, die eine Verringerung von Dichte und Druck der Elektronen bewirkt. In diesem Dichtebereich gibt es – wie in der Abbildung angedeutet – keine stabilen Sterne. Der Grund dafür ist leicht einzusehen: Wenn

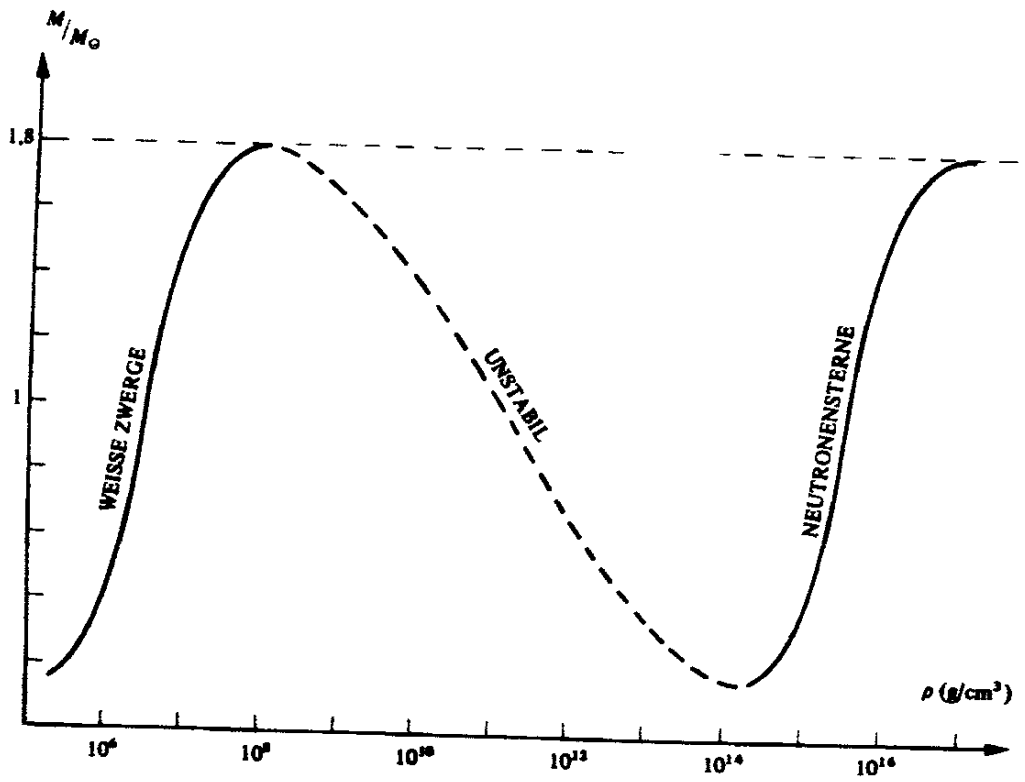

Abbildung 8.1: Das Massenspektrum entarteter Sterne (elementare Rechnung).

ein Stern dieser Dichte radial oszilliert und dabei zu $\rho' = \rho + \delta\rho$ kollabiert, so ist bei ρ' nur die Masse $\mathcal{M}(\rho') < \mathcal{M}(\rho)$ stabil. Der Stern kollabiert daher weiter, bis er den Neutronensternast erreicht.

Relativistische Effekte sind für Neutronensterne von der Größenordnung

$$\delta \approx \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta\mathcal{M}}{\mathcal{M}} \approx \frac{M}{R} \approx \frac{p}{\rho c^2} \approx (\rho/\rho_1)^{2/3} \approx 1. \tag{8.1.31}$$

Bei Neutronensternen liefert die allgemeine Relativitätstheorie daher wesentliche Korrekturen zur Newtonschen Theorie.

Die Radien von Neutronensternen sind analog zu (8.1.27) durch

$$R \approx \lambda_n \alpha_G^{1/2} (\rho_1/\rho)^{1/6} \approx 5\text{km}\,(\rho_1/\rho)^{1/6} \tag{8.1.32}$$

gegeben.

Die hier dargestellte einfache Theorie läßt die Ähnlichkeit der beiden Familien entarteter Sterne, der Weißen Zwerge und der Neutronensterne, sehr klar erkennen. Es ist allerdings zu betonen, daß die hier gewonnenen Resultate nur größenordnungsmäßig richtig sind. So werden z. B. die Radien von Neutronensternen um einen Faktor 2 – 3 unterschätzt und dadurch relativistische Effekte überschätzt. Abbildung 8.2 zeigt die Resultate verschiedener *numerischer Berechnungen des Massenspektrums von Neutronensternen.* Da die Effekte der

starken Wechselwirkungen (Kernkräfte) zwischen den Neutronen und die Erzeugung von Hyperonen und Pionen theoretisch nur schwer zu erfassen sind, ergeben sich wesentliche Unterschiede zwischen den Vorhersagen verschiedener Autoren.

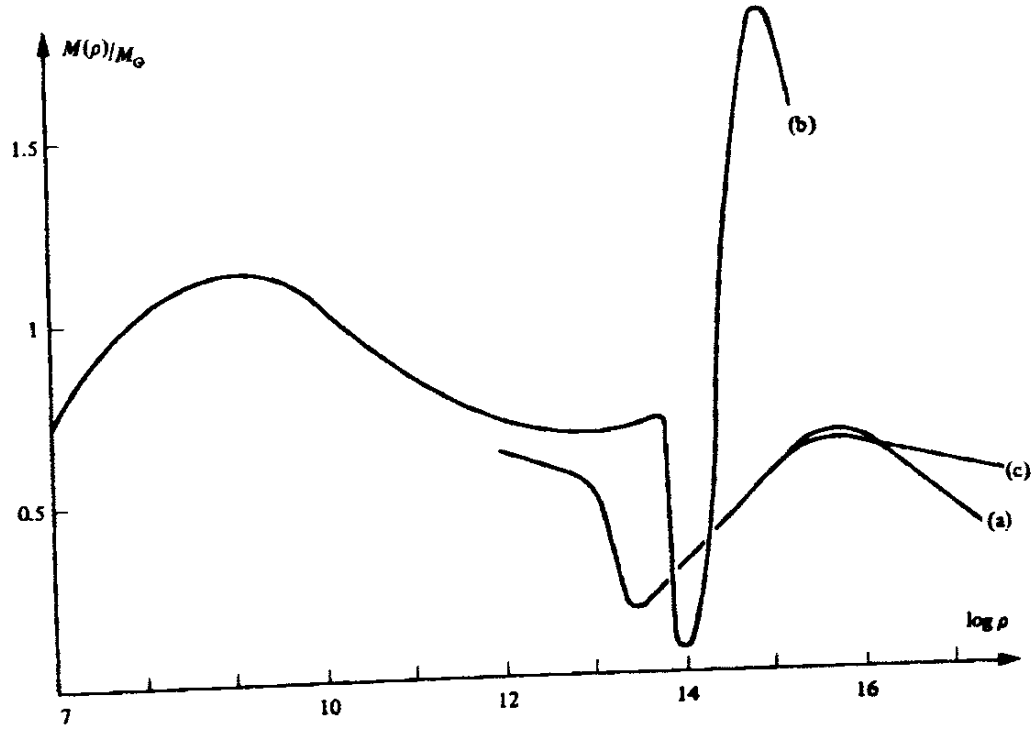

Abbildung 8.2: Das Massenspektrum entarteter Sterne (numerische Rechnungen: a) Harrison-Wheeler, b) Cameron, c) Hagedorn).

Die Entdeckung der *Pulsare* im Jahre 1967 und ihre darauf folgende *Identifizierung mit Neutronensternen* ist in der neueren astronomischen Literatur ausführlich erläutert, so daß wir hier auf eine Schilderung verzichten können. Besonders wesentlich haben sich dabei die Resultate der Röntgenastronomie erwiesen, die es erlaubt haben, die erste Massenbestimmung eines Neutronensterns (Hercules X1) vorzunehmen[4].

Aufgaben

1. Berechne die Radien von Weißen Zwergen und Neutronensternen als Funktion der Dichte.

2. Zeige, daß die Schallgeschwindigkeit in entarteter Materie durch

$$c_s = c\,(5f/3)^{1/2} \tag{8.1.33}$$

[4]Siehe dazu Giacconi, Physics Today, May 1973, p. 38.

gegeben ist. Der Pulsar im Crab-Nebel sendet Signale mit einer Periode von 0,033 sec aus. Können diese Signale durch Vibration oder Rotation Weißer Zwerge erklärt werden?

3. Zeige, daß die Bindungsenergie einer homogenen Massenkugel nach der Newtonschen Theorie durch

$$E_B = \frac{3}{5}\frac{G\mathcal{M}^2}{R} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\Delta\mathcal{M}}{\mathcal{M}} = \frac{E_B}{\mathcal{M}c^2} = \frac{3M}{5R} \tag{8.1.34}$$

gegeben ist.

4. Normale Sterne werden instabil, wenn der Strahlungsdruck im Sterninneren größer als der Gasdruck wird. Zeige, daß diese Instabilitätsbedingung auf $\mathcal{M} \approx \mathcal{M}_c$ führt. (Korrekt wäre $\mathcal{M} \approx 60\mathcal{M}_\odot$.) α_G bestimmt daher auch die Größenordnung normaler Sterne. Tatsächlich sind keine Hauptreihensterne mit $\mathcal{M} > 60\mathcal{M}_\odot$ bekannt.

8.2 Die Innenraumlösung und die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung

Nach diesen heuristischen Betrachtungen über die Struktur entarteter Sterne kehren wir zur allgemeinen Relativitätstheorie zurück. Um die Theorie der *Gleichgewichtskonfigurationen* kugelsymmetrischer Sterne aufgrund der Einsteinschen Feldgleichungen zu entwickeln, müssen wir zunächst die Metrik im Sterninneren ermitteln, also die zur Schwarzschild-Metrik gehörende Innenraumlösung.

Allgemein hatten wir in (3.3.16) die einfache Form

$$\mathrm{d}s^2 = e^\nu\,\mathrm{d}t^2 - e^\lambda\,\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 =: \eta_{ik}\,\omega^i \otimes \omega^k \tag{8.2.1}$$

für ein kugelsymmetrisches Linienelement hergeleitet und die $G^i{}_k$ in (7.7.6), bereits auf eine orthonormale Basis bezogen, berechnet.

Da wir zunächst statische Gleichgewichtskonfigurationen herleiten wollen, können wir in (7.7.6) alle Zeitableitungen weglassen. Die Materie im Sterninneren soll wie in der Kosmologie durch eine ideale Flüssigkeit genähert werden:

$$T_i^k = (\rho + p)\,u_i\,u^k - \delta_i^k\,p, \tag{8.2.2}$$

so daß in der orthonormalen Basis bei ruhender Materie $T_i^k = \mathrm{diag}\,(\rho, -p, -p, -p)$ wird. Die Einstein-Gleichungen ergeben dann mit (7.7.6) und $\nu = 2a$, $\lambda = 2b$

$$G_0^0 = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\kappa\rho, \tag{8.2.3}$$

$$G^1_1 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = \kappa p \tag{8.2.4}$$

Setzen wir $e^{-\lambda} = u/r$, so folgt aus (8.2.3)

$$u' = -\kappa\,\rho\,r^2 + 1 \tag{8.2.5}$$

oder, integriert,

$$u = r - 2M(r), \tag{8.2.6}$$

wobei (die Regularität von g^{rr} bei $r = 0$ verlangt $M(0) = 0$!)

$$2M(r) := \kappa \int_0^r \rho(r')\,r'^2\,\mathrm{d}r'. \tag{8.2.7}$$

Damit haben wir den räumlichen Teil $\mathrm{d}\sigma^2$ des Linienelementes bestimmt:

$$\mathrm{d}\sigma^2 = e^{\lambda}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 = (1 - 2M(r)/r)^{-1}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2. \tag{8.2.8}$$

Für $r > R$ (R ist der Koordinatenradius des Sternes) geht (8.2.8) in die räumliche Schwarzschildmetrik über.

Subtraktion von (8.2.3) von (8.2.4) liefert

$$e^{-\lambda}(\nu' + \lambda') = \kappa\,(\rho + p)\,r \tag{8.2.9}$$

oder

$$\nu(r) = -\lambda(r) + \kappa \int_\infty^r \mathrm{d}r\,e^{\lambda}\,r\,(p + \rho). \tag{8.2.10}$$

Diese Lösung erfüllt offensichtlich $\lambda = -\nu$ für $r > R$ und geht daher im Außenraum in die Schwarzschild-Metrik über. Damit ist die Metrik im Innenraum des Sternes vollständig bestimmt, falls $p(r)$ und $\rho(r)$ bekannt sind.

Zur Berechnung dieser Funktionen dient zunächst die Zustandsgleichung, die wir hier der Einfachheit halber als $p = p(\rho)$ ansetzen wollen. Ferner müssen wir die relativistische Verallgemeinerung von (8.1.1) zur Berechnung von $p(r)$ heranziehen. Diese Gleichung, die Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung, kann entweder aus der noch nicht benutzten Feldgleichung $G^2_2 = \kappa p$ gewonnen werden oder aus dem Erhaltungssatz

$$T_i^{\ k}{}_{;k} = 0, \tag{8.2.11}$$

der schneller das gewünschte Resultat liefert. Für $i = 0, 2, 3$ ist (8.2.11) identisch erfüllt, während sich für $i = 1$ nach kurzer Rechnung

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = (p+\rho)\frac{\nu'}{2} \tag{8.2.12}$$

ergibt. Wir setzen ν' aus (8.2.4) ein und erhalten

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{r(p+\rho)}{2}\left[\left(\kappa p + \frac{1}{r^2}\right)e^{\lambda} - \frac{1}{r^2}\right] \tag{8.2.13}$$

oder, mit (8.2.8):

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{(\rho+p)\left[M(r) + \frac{\kappa p r^3}{2}\right]}{r(r-2M(r))}} \tag{8.2.14}$$

Das ist die TOV-Gleichung, die den Druck im Sterninneren bestimmt. Die Randbedingung ist wieder $p(R) = 0$.

Als Beispiel einer Lösung der TOV-Gleichung betrachten wir zunächst den Fall inkompressibler Materie $\rho = \text{const}$. Aus (8.2.7) erhalten wir

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}G\rho r^3 \qquad (r \le R). \tag{8.2.15}$$

Setzt man das in die TOV-Gleichung ein, so wird

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{4\pi G(\rho+p)\left(\frac{\rho}{3}+p\right)r^3}{r\left(r - \frac{8\pi G\rho r^3}{3}\right)}. \tag{8.2.16}$$

Mit der dimensionslosen Radialkoordinate

$$x = \sqrt{8\pi G\rho/3}\, r \tag{8.2.17}$$

vereinfacht sich (8.2.16) zu

$$\frac{4\rho\,\mathrm{d}p}{(\rho+p)(\rho+3p)} = -\frac{\mathrm{d}x^2}{1-x^2} \tag{8.2.18}$$

oder

$$\frac{p(x)}{\rho} = \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-X^2}}{3\sqrt{1-X^2} - \sqrt{1-x^2}}. \tag{8.2.19}$$

wobei X die Radialkoordinate des Sternrandes bedeutet, für die

$$X^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 = \frac{2M}{R} \tag{8.2.20}$$

gilt. X^2 gibt demnach das Verhältnis von Schwarzschild-Radius zu Radius des Sternes an. Der Druck p_0 im Sternmittelpunkt wird nach (8.2.19, 20)

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - 1}. \tag{8.2.21}$$

Für $2M \ll R$ geht (8.2.19) in die Newtonsche Gleichung (8.1.6) über. Für $2M \lesssim R$ ergeben sich dagegen starke Abweichungen, für $R = \frac{9}{8}(2M)$ wird $p_0 = \infty$, und der Stern bricht zusammen. Ein Stern, der aus inkompressibler Materie besteht, muß daher größer als 9/8 seines Schwarzschild-Radius sein. Die Ursache für das starke Anwachsen des Druckes ist dabei in dem zweifachen Auftreten von p auf der rechten Seite von (8.2.16) zu suchen. Druck erzeugt demnach noch mehr Druck.

Aufgabe

Berechne e^ν aus (8.2.10) für $\rho = \text{const.}$
Lösung:

$$e^\nu = \frac{1}{4}\left[3\sqrt{1 - X^2} - \sqrt{1 - x^2}\right]^2. \tag{8.2.22}$$

8.3 Energiedichte und Bindungsenergie

Nach (8.2.7) ist die Masse eines Sternes durch

$$\mathcal{M} = 4\pi \int_0^R \mathrm{d}r\, r^2 \rho(r) \tag{8.3.1}$$

gegeben. Diese Formel scheint zunächst analog zur nichtrelativistischen Gleichung für die Masse zu sein, unterscheidet sich jedoch davon wesentlich:

Zunächst ist ρ nicht einfach die Baryonendichte n, da zu ρ auch die Energiedichte der Kompression zu zählen ist, wie in Kapitel 5 (Gl. (5.3.25)) ausgeführt wurde.

Ferner ist das Volumselement $\mathrm{d}V$ des dreidimensionalen Raumes (t = const.) durch

$$dV = r^2 \mathrm{d}r (1 - 2M(r)/r)^{-1/2} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \tag{8.3.2}$$

gegeben. Die pro Volumseinheit integrierte Massendichte ist folglich nur

$$\rho\sqrt{1 - 2M(r)/r} < \rho. \tag{8.3.3}$$

Es wird sich zeigen, daß dies den Effekt (8.1.34) der negativen Gravitations-Selbstenergie ergibt.

Aus der Form (8.3.2) des Volumselementes folgt, daß die Baryonenzahl A im Stern durch

$$A = \frac{4\pi}{m} \int r^2 n(r) \left(1 - 2M(r)/r\right)^{-1/2} \mathrm{d}r \tag{8.3.4}$$

gegeben ist, wobei m die Masse eines Baryons ist. (m ist der Massenstandard, in bezug auf den die Kompressionsarbeit und die Effekte der Gravitationsenergie definiert werden. In m ist daher die Masse des zugehörigen Elektrons (im Fall von Protonen) bzw. auch die Bindungsenergie des Atomkernes zu berücksichtigen. (Für Materie am Endpunkt der thermonuklearen Entwicklung ist also m genauer als 1/56 der Masse von Fe^{56} zu definieren.)

Die Bedeutung des Unterschiedes zwischen (8.3.1) und (8.3.4) wird am einfachsten klar, wenn wir zum Spezialfall inkompressibler Materie übergehen. Da in diesem Fall keine Kompressionsarbeit auftritt, ist $n = \rho = \text{const.}$ und

$$A = \frac{4\pi n}{m} \int_0^R r^2 (1 - 8\pi G r^2 \rho/3)^{-1/2} \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho}{3m} R^3 f(X^2), \tag{8.3.5}$$

wobei X durch (8.2.20) definiert ist und

$$f(X^2) = \frac{3}{2} \left[\arcsin X - X\sqrt{1 - X^2}\right] / X^3. \tag{8.3.6}$$

Die Grenzwerte von $f(X^2)$ sind

$$f(X^2) = \begin{cases} 1 + \dfrac{3}{10} X^2 = 1 + \dfrac{3}{5}\dfrac{M}{R}, & X \ll 1, \\[2ex] \dfrac{3\pi}{4}, & X = 1. \end{cases} \tag{8.3.7, 8}$$

Für $X = \sqrt{8/9}$, also an der Stabilitätsgrenze, ist $f(X^2) = 1.64$. Die physikalische Bedeutung von (8.3.5) wird klar, wenn wir diese Relation in der Form

$$\mathcal{M}_0 = mA = \mathcal{M} f(2M/R) \tag{8.3.9}$$

schreiben. Dabei ist $\mathcal{M}_0$ die „preassembly mass", also die Gasmasse, die man braucht, um den Stern zu bilden (Feldtheorie: nackte Masse). Da bei der Sternbildung ein Massendefekt auftritt, ist $\mathcal{M}_0 > \mathcal{M}$.

Für den relativen Massendefekt erhalten wir

$$\frac{\Delta\mathcal{M}}{\mathcal{M}} = \frac{\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}}{\mathcal{M}} = f(2M/R) - 1. \tag{8.3.10}$$

(8.3.7) zeigt, daß (8.3.10) für $2M \ll R$ mit der Newtonschen Relation (8.1.34) übereinstimmt. An der Stabilitätsgrenze $2M = 8R/9$ ist der Massendefekt 64%. Bei Neutronensternen wird nach Abbildung 8.3 ein Massendefekt von 30% tatsächlich erreicht, wobei wesentliche Abweichungen zwischen Formel (8.1.34) und den Vorhersagen der Einsteinschen Theorie (8.3.10) auftreten.

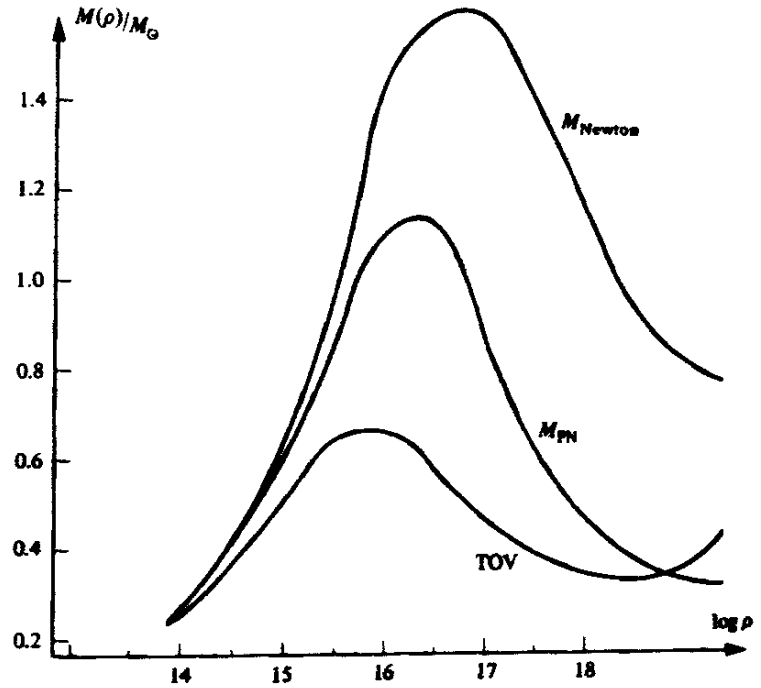

Abbildung 8.3: Die Masse von Neutronensternen (Harrison-Wheeler Zustandsgleichung: $\mathcal{M}_{PN}$ ist in der folgenden Aufgabe erklärt).

Aufgabe

Post-Newtonsche Näherung. Zeige, daß im Fall kompressibler Materie in erster Ordnung in G/c^2

$$\mathcal{M}_{PN} = \mathcal{M}_0 + E_G/c^2 + U/c^2 \tag{8.3.11}$$

gilt, wobei die Gravitations-Bindungsenergie E_G durch

$$E_G = G \int_0^{\mathcal{M}} \frac{\mathcal{M}(r)}{r} \, \mathrm{d}\mathcal{M}(r) \tag{8.3.12}$$

definiert ist und die innere Energie U der Materie durch

$$U = 4\pi \int_0^R r^2 n\epsilon \, \mathrm{d}r \tag{8.3.13}$$

(ϵ ist die spezifische innere Energie, vgl. (5.3.25)). Der Massendefekt eines Sternes hat daher zwei Komponenten, wobei $E_G < 0$ und (i.a.) $U > 0$ ist. Die Trennung des Massendefektes in diese beiden Anteile ist physikalisch deshalb möglich, weil es sich bei den Kräften, die zur inneren Energie beitragen, um kurzreichweitige Kräfte handelt, während E_G durch die langreichweitige Gravitationskraft verursacht ist.

8.4 Die Geometrie der Schwarzschild-Metrik[5]

8.4.1 Die Außenraumgeometrie

Zum weiteren Verständnis der Gleichgewichtskonfigurationen und des Gravitationskollapses ist es notwendig, die Schwarzschild-Metrik (SSM) vom geometrischen Standpunkt her genauer zu untersuchen. Das Linienelement der SSM lautet

$$\mathrm{d}s^2 = (1 - 2M/r)\,\mathrm{d}t^2 - (1 - 2M/r)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{8.4.1}$$

wenn wir uns zunächst auf den Außenraum einer Masse beschränken. Zur Veranschaulichung der geometrischen Eigenschaften der SSM betrachten wir einen Schnitt zu einer konstanten Zeit t (da das Linienelement statisch ist, kommt es auf den Wert von t nicht an). Ferner setzen wir $\theta = \pi/2$. Physikalisch bedeutet dies (wenn wir uns die Metrik (8.4.1) durch eine geeignete Innenraummetrik ergänzt denken), daß wir den gravitierenden Körper durch einen Schnitt $\theta = \pi/2$ in zwei genau gleiche Hälften zerlegt denken und die Geometrie auf der Schnittfläche untersuchen, wobei wir uns zunächst auf den Außenraum beschränken. Die entstehende Fläche mit Linienelement

$$\mathrm{d}\sigma^2 = (1 - 2M/r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\phi^2 \tag{8.4.2}$$

können wir durch eine Einbettung in einen dreidimensionalen euklidischen Hilfsraum veranschaulichen, indem wir dort eine Rotationsfläche suchen, die ebenfalls das Linienelement (8.4.2) aufweist. Dazu führen wir im dreidimensionalen Einbettungsraum Zylinderkoordinaten z, r, ϕ ein. Gesucht ist eine Fläche $z = z(r)$ mit Linienelement (8.4.2):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2 + r^2\,\mathrm{d}\phi^2 \\ &= \mathrm{d}r^2\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)^2\right] + r^2\,\mathrm{d}\phi^2 \stackrel{!}{=} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\phi^2 \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

oder

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - 1, \tag{8.4.4}$$

was integriert ergibt

$$z = \pm\sqrt{8M}\,\sqrt{r - 2M}. \tag{8.4.5}$$

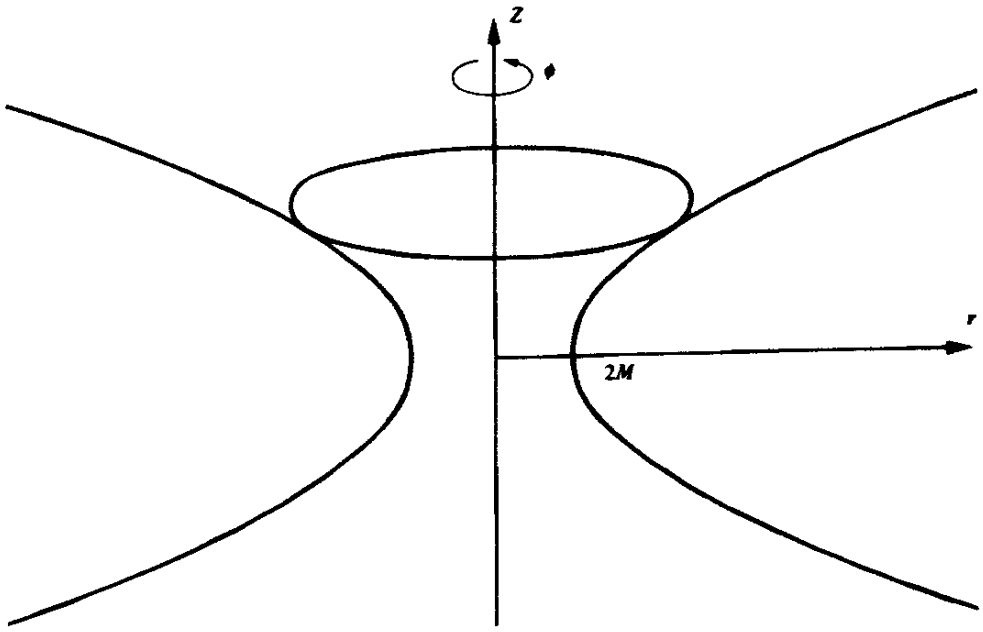

Abbildung 8.4: Zur Geometrie der Schwarzschild-Metrik.

Die Rotationsfläche entsteht daher durch Drehung einer Parabel um ihre Leitlinie (Abbildung 8.4).

In $r = 2M$ ist keinerlei Singularität vorhanden, was etwas überraschend ist. Ferner ist zunächst befremdend, daß für $r < 2M$ keinerlei „Raum" existiert, wogegen man intuitiv eine Singularität $r = 0$ erwartet hätte.

Hier kommen nun die Begriffe zum Tragen, die wir in Abschnitt 2.1 entwickelt haben. Bei der Definition der differenzierbaren Mannigfaltigkeit haben wir nämlich die Forderung vermieden, daß man im ganzen Raum X^4 ein einziges singularitätsfreies Koordinatensystem einführen kann. Im Falle der SSM zeigt sich nun, daß die Koordinaten t, r, θ, ϕ ungeeignet sind, um die volle Mannigfaltigkeit zu beschreiben. Erst 1960 zeigte Kruskal[6], wie die Mannigfaltigkeit maximal ausgedehnt werden kann, und er gab auch ein Koordinatensystem an, das sie voll überdeckt.

Zur Herleitung des Kruskalschen Koordinatensystems betrachten wir zunächst eine Metrik der allgemeineren Form

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Phi\, dt^2 - \Phi^{-1}\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2 \\ &= \Phi(r)(dt^2 - dr^{*2}) - r^2\, d\Omega^2, \end{aligned} \tag{8.4.6a, b}$$

wobei $\Phi = \Phi(r)$ und

$$dr^* := dr/\Phi(r). \tag{8.4.7}$$

[5]Die Übungsaufgaben zu diesem Kapitel enthalten den Beweis verschiedener im Text aufgestellter Behauptungen und sind auch zum Verständnis des Abschnittes 8.6 erforderlich.

[6]M. D. Kruskal, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).

Im Falle der SSM, die die Form (8.4.6) hat, ist

$$r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right). \tag{8.4.8}$$

Der Vorteil der Koordinate r^* liegt darin, daß radiale Lichtstrahlen einfach der Gleichung $\mathrm{d}t = \pm \mathrm{d}r^*$ genügen, so daß Kausalitätsprobleme einfach überschaubar werden. Im Anschluß an Kruskal versuchen wir nun, eine Koordinatentransformation $(t, r^*) \to (v, u)$ zu finden, die diese Eigenschaft erhält, etwaige Singularitäten oder Nullstellen von Φ, wie sie auch im Fall der SSM auftreten, jedoch beseitigt[7]. Das Linienelement muß daher in den neuen Koordinaten die Form

$$\mathrm{d}s^2 = f^2(u, v)\,(\mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2) - r^2(u, v)\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{8.4.9}$$

annehmen, wobei nun die positive Funktion f^2 anstelle von Φ getreten ist. Durch Gleichsetzen der beiden Formen des Linienelements sieht man sofort, daß die gesuchte Koordinatentransformation von der Form

$$\begin{aligned} u &= h(r^* + t) + g(r^* - t), \\ v &= h(r^* + t) - g(r^* - t) \end{aligned} \tag{8.4.10}$$

sein muß, wobei g und h willkürliche Funktionen sind und

$$f^2 = \Phi/4g'h'. \tag{8.4.11}$$

Dabei bedeutet der Strich wie üblich Ableitung nach dem Argument. Damit f^2 in (8.4.11) positiv und endlich ist, muß jede Nullstelle bzw. Singularität des Zählers $\Phi(r)$ durch den Nenner aufgehoben werden, und zwar für alle t. Deshalb müssen h, g die Gestalt haben

$$h(r^* + t) = a\,e^{\gamma(r^* + t)}, \quad g(r^* - t) = b\,e^{\gamma(r^* - t)}, \tag{8.4.12}$$

wobei a und b beliebige Konstanten sind. Der Wert von γ ist so zu wählen, daß

$$f^2 = \Phi(r)\,e^{-2\gamma r^*}/4ab\gamma^2 \tag{8.4.13}$$

positiv wird. Im Fall der SSM ist dies für $\gamma = (4M)^{-1}$ der Fall, da dann

$$f^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{-r*/2M}\,\frac{4M^2}{ab} = \frac{8M^3}{abr}\,e^{-r/2M}. \tag{8.4.14}$$

ist. Wenn wir im Anschluß an Kruskal die willkürlichen Konstanten $a = b = 1/2$ wählen, so ergibt sich durch Einsetzen von (8.4.12) in (8.4.10) die gesuchte Koordinatentransformation zu

[7] Mit Ausnahme echter Singularitäten, die im Fall der SSM in $r = 0$ auftreten und die in Aufgabe 2 diskutiert werden.

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt{\frac{r}{2M} - 1}\, \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\
v &= \sqrt{\frac{r}{2M} - 1}\, \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right).
\end{aligned}
\tag{8.4.15}
$$

Die Umkehrtransformation kann nur implizit angegeben werden, sie lautet

$$
\begin{aligned}
u^2 - v^2 &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \\
\frac{2uv}{u^2 + v^2} &= \operatorname{tgh}\left(\frac{t}{2M}\right) \\
f^2(u, v) &= \frac{32M^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right).
\end{aligned}
\tag{8.4.16}
$$

Die Eigenschaften dieser Transformation gehen aus Abbildung 8.5 hervor.

Die Halbebene $(t,\ r > 2M)$ wird durch (8.4.15) auf den Quadranten I der (u, v)-Ebene abgebildet[8]. (8.4.16) zeigt, daß die Kurven $r = \text{const.}$ Hyperbeln in der (u, v)-Ebene sind, während die Kurven $t = \text{const.}$ in Gerade in dieser Ebene übergehen. (8.4.16) zeigt aber auch, daß das Linienelement (8.4.9) auch in den anderen Quadranten der (u, v)-Ebene bis zur Kurve $r = 0$ hin regulär ist und kein Grund besteht, diese Gebiete auszuschließen (Abbildung 8.6).

Man kann zeigen, daß die in Abbildung 8.6 gezeigte Gesamtmannigfaltigkeit eine *maximale analytische Ausdehnung* der Schwarzschild-Mannigfaltigkeit ist, d. h., jede Geodätische dieser Mannigfaltigkeit kann bis zu unendlichen Werten des affinen Parameters (siehe die Aufgaben zu Abschnitt 1.2 und Abschnitt 11.2) erstreckt werden, oder sie trifft bei einem endlichen Wert desselben auf die Singularität $r = 0$ (Übungsaufgabe). Die Formeln (8.4.15) stellen dabei nur im durch die Schwarzschild-Koordinaten beschriebenen Quadranten die Umkehrung von (8.4.16) dar, in den anderen Quadranten der ausgedehnten Mannigfaltigkeit gelten andere Umkehrformeln[9].

Um die räumliche Struktur der Schwarzschild-Geometrie zu veranschaulichen, haben wir zu Beginn dieses Abschnittes eine Reihe von Schnitten $t = \text{const.}$ betrachtet. Diese Schnitte gehen alle durch den Ursprung der (u, v)-Ebene und überdecken nicht die volle Mannigfaltigkeit. Um die Geometrie der gesamten Mannigfaltigkeit zu untersuchen, müssen wir daher eine andere Reihe raumartiger Schnitte, z. B. $v = \text{const.}$, $\theta = \pi/2$ wählen[10] und Einbettungsdiagramme dieser Flächen angeben (Abbildung 8.7).

[8] Läßt man auch das negative Vorzeichen der Quadratwurzel in (8.4.15) zu, so erhält man auch den Quadranten III der (u, v)-Ebene. Dies entspricht genau den beiden Vorzeichen in (8.4.5) und der oberen *plus* unteren Hälfte von Abbildung 8.4.

[9] Eine Tabelle ist bei M. D. Kruskal, loc. cit., angegeben.

[10] Diese Schnitte sind jedoch vor beliebigen anderen raumartigen Schnitten in keiner Weise ausgezeichnet.

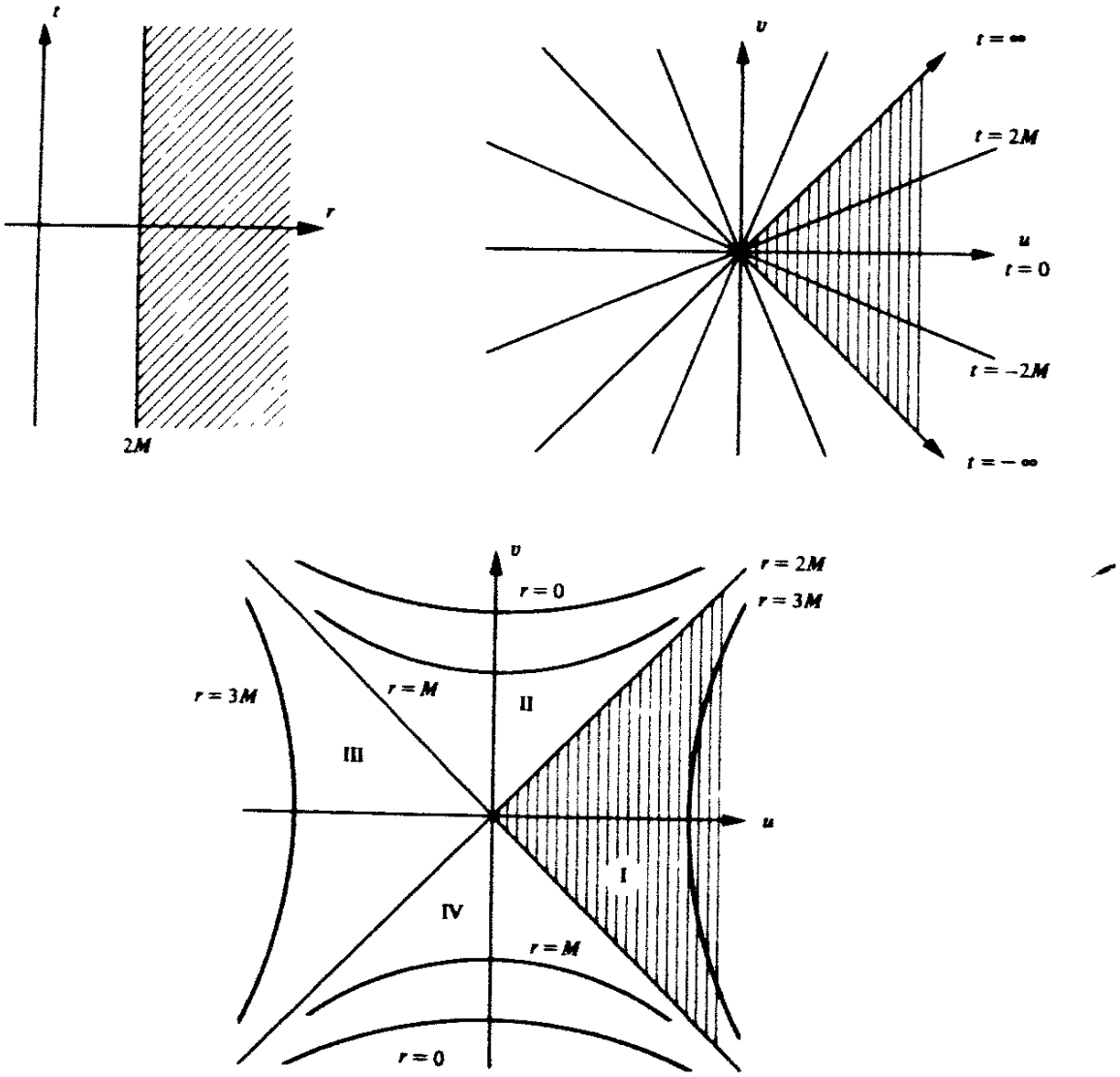

Abbildung 8.5: Transformation auf Kruskal-Koordinaten.

Für $v = 0$ stimmt der Schnitt mit der vorher konstruierten Fläche (8.4.5) überein. Etwas später erreicht der Schnitt bereits etwas kleinere Werte von r als $2M$, bis bei $v = 1$ schließlich $r = 0$ erreicht wird. Bei negativen v-Werten ist das Verhalten genauso, so daß wir insgesamt das Bild einer zunächst expandierenden ($v < 0$) Metrik erhalten, die in $v = 0$ einen Moment der Zeitsymmetrie hat und für Werte $v > 0$ wieder kollabiert, bis schließlich bei $v = 1$ der Wert $r = 0$ erreicht wird. Für noch größere Werte von v müssen wir die Schnitte wie in der Abbildung angegeben legen, so daß immer mehr Punkte in $r = 0$ zusammenfallen. Es ergibt sich damit das Bild eines immer weiter fortschreitenden Kollapses.

Die volle Kruskal-Mannigfaltigkeit erweist sich damit als dynamische, zeitlich veränderliche Geometrie. Wie ist dieses Bild mit dem einer stati-

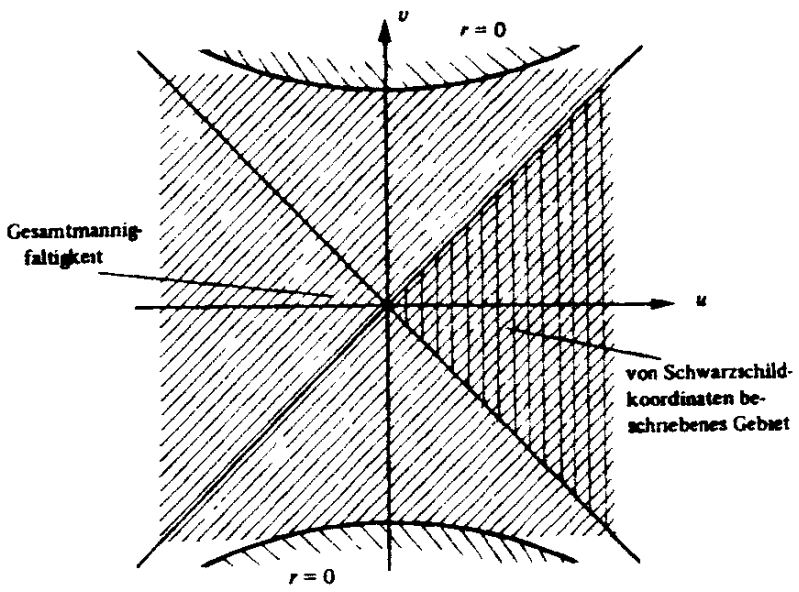

Abbildung 8.6: Gesamtmannigfaltigkeit und Schwarzschild-Koordinaten.

schen, zeitlich unveränderlichen Schwarzschild-Metrik zu vereinen? Daß die Schwarzschild-Metrik statisch ist, könnte man anschaulich etwa dadurch begründen, daß es möglich ist, in ihr ein zeitlich unveränderliches Gerüst einzubauen, das die einzelnen Punkte mit einer Vielzahl von Streben miteinander verbindet. Durch Abmessung dieser Streben könnte man die Geometrie der Schwarzschild-Metrik dann empirisch bestimmen. Die Knotenpunkte dieses Gerüstes haben Weltlinien, die in Abbildung 8.8 gezeigt sind, nämlich die Linien $r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$, $\phi = \text{const.}$

Dieses Gerüst läßt sich im Raum jedoch nur bis zu $r = 2M$ konstruieren, da – wie die Abbildung zeigt – die Weltlinien mit $r = \text{const.} < 2M$ keine zeitartigen, sondern raumartige Linien sind. Daher läßt sich die Behauptung, daß die Schwarzschild-Metrik statisch sei, nur für den Teil $r > 2M$ aufrechterhalten, während der bei Kruskal neu hinzukommende Teil mit $0 < r < 2M$ nicht durch ein statisches Gerüst (statische Beobachter) ausgemessen und beschrieben werden kann. Um die volle Kruskal-Metrik zu beschreiben, ist eine Schar von Beobachtern (Teilchen), die etwa Weltlinien $u = \text{const.}$ haben, nötig. Wie man aus Abbildung 8.8 ersieht, beginnen die Weltlinien dieser Beobachterklasse zunächst alle in $r = 0$, expandieren dann zu endlichen r-Werten, die für $v = 0$ ihr Maximum erreichen, und kollabieren schließlich für $v \geq 1$ sukzessive wieder zu $r = 0$. Man überlegt sich leicht, daß vom Austritt aus der Singularität $r = 0$ bis zum Wiedereintritt eine endliche Eigenzeit vergeht (Aufgabe 2). Dies zeigt klar den dynamischen Charakter der Kruskal-Metrik.

Abschließend wollen wir noch das Verhalten von Lichtstrahlen, d.h. die *Kausalzusammenhänge* in der Kruskal-Metrik studieren. Da radiale Lichtstrahlen einfach durch $du = \pm dv$ gegeben sind, also durch gerade Linien mit Neigung $\pm 45°$ in der (u, v)-Ebene, hat der Lichtkegel die gewohnte speziell-relativistische

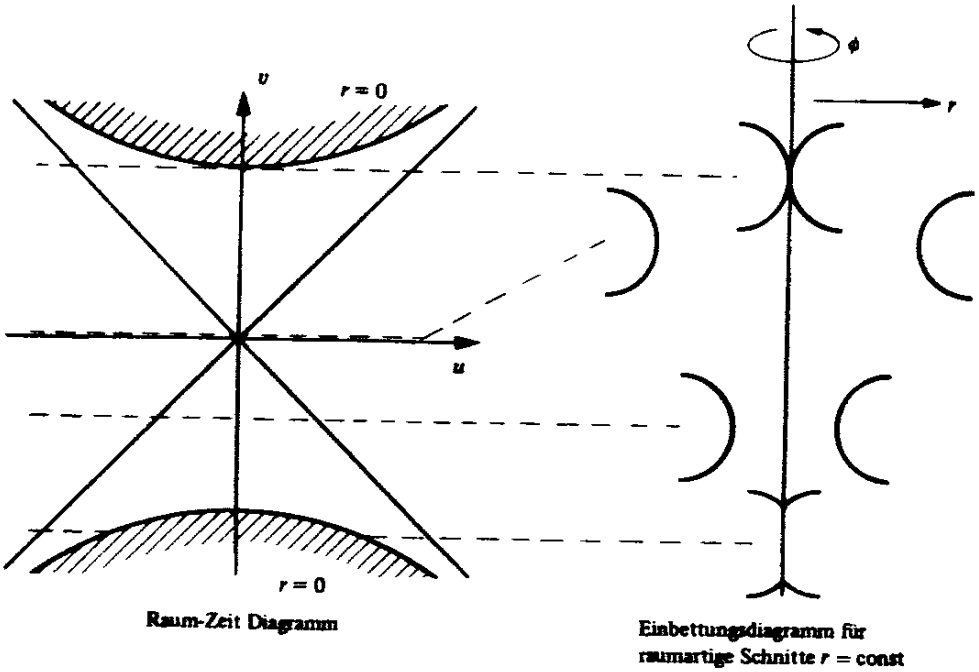

Abbildung 8.7: Schnitte durch die Kruskal-Metrik für verschiedene v-Werte.

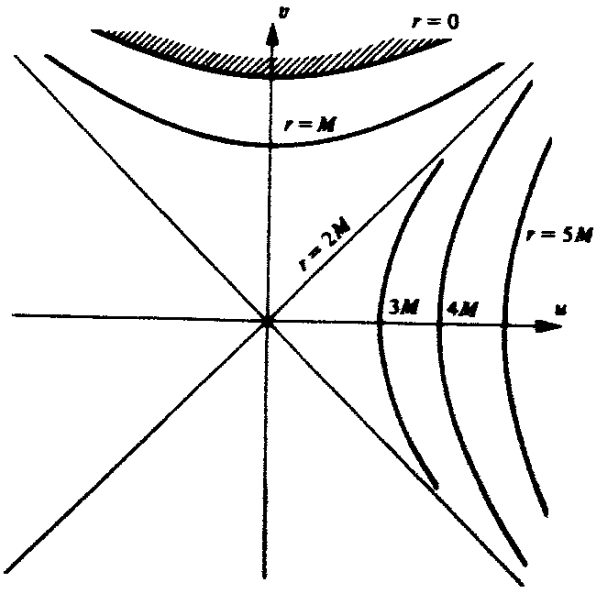

Abbildung 8.8: Ist die Schwarzschild-Metrik statisch?

Form. Wie Abbildung 8.9 zeigt, zerlegt der Lichtkegel, der vom Ursprung der (u, v)-Ebene ausgeht, den Raum in vier Teilbereiche.

Region I und III werden von den Linien $r = \text{const.} > 2M$ erfüllt, d. h., dort liegen die Weltlinien normaler Beobachter (statisches Gerüst). Diese Beobachter können Signale aus der Region IV erhalten und Signale nach II senden (oder auch selbst nach II fallen oder aus IV gekommen sein). Jedes Teilchen

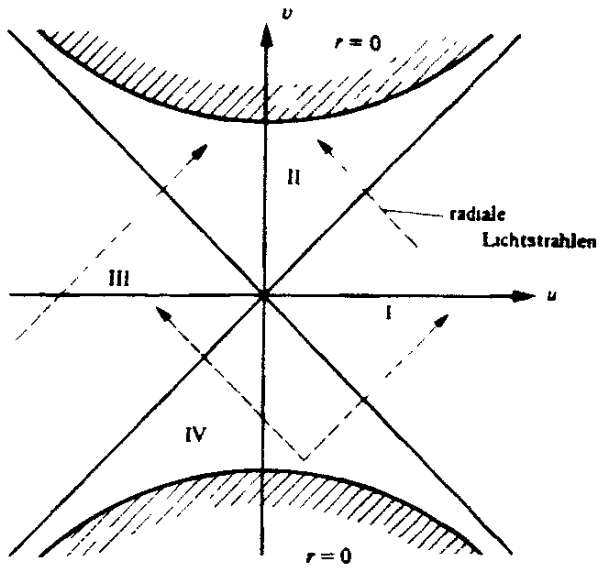

Abbildung 8.9: Kausalzusammenhänge in der Kruskal-Mannigfaltigkeit.

dagegen, das einmal in die Region II eingetreten ist, läuft notwendig nach endlicher Eigenzeit in die Singularität $r = 0$, ein Teilchen, das in IV ist, muß vor endlicher Zeit aus der Singularität $r = 0$ gekommen sein. II und IV heißen daher auch „katastrophale Regionen". Eine Kausalverbindung von Punkten in I mit III ist – wie die Abbildung zeigt – nicht möglich. Diese beiden Regionen entsprechen dem oberen und unteren Teil der Rotationsfläche (Abbildung 8.4), so daß die beiden asymptotisch flachen Räume kausal nicht verbunden sind. Allerdings kann ein Beobachter in II Signale aus beiden Räumen empfangen, ein Beobachter in IV Signale in beide Räume senden. Die Singularität in $r = 0$ ist also durch einen *Ereignishorizont* von der Außenwelt $r > 2M$ abgeschirmt: im Außenraum können Ereignisse, die in Region II stattfinden, prinzipiell nicht beobachtet werden.

8.4.2 Die Innenraumgeometrie

Nach diesem Studium der Geometrie im Außenraum einer Masse wenden wir uns der Innenraummetrik zu. Dabei beschränken wir uns auf inkompressible Materie, also konstante Massendichte. Der räumliche Teil des Linienelements (8.2.8)

$$d\sigma^2 = (1 - 8\pi G\rho r^2/3)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{8.4.17}$$

ist dann – vgl. (2.8.10) – das Linienelement eines Raumes konstanter (positiver) Krümmung, also einer Hyperkugel mit Radius

$$\mathcal{A} = (3/8\pi G\rho)^{1/2}. \tag{4.8.18}$$

Wenn wir wie zuvor $\theta = \pi/2$ setzen, können wir die entstehende zweidimensionale Fläche anschaulich im dreidimensionalen Einbettungsraum darstellen, wobei sich eine Kugel ergibt. (Abbildung 8.10).

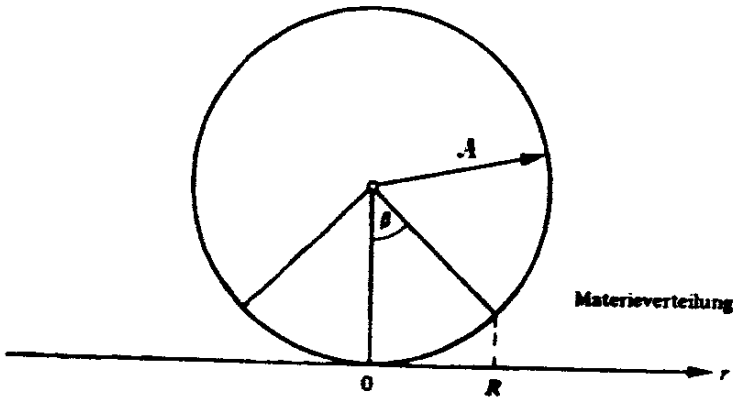

Abbildung 8.10: Innenraumlösung und Materieverteilung.

Die Materieverteilung reicht dabei nur zu einem maximalen Radius $r = R$, wie in der Abbildung gezeigt. Die in (8.2.17) eingeführte dimensionslose Koordinate ist $x = r/\mathcal{A}$, $X = R/\mathcal{A}$. $X = 1$ heißt, daß die Materieverteilung einer Halbkugel entspricht, während $X < 1$ kleinere Kugelsektoren ergibt. In Abbildung 8.10 ist ferner der Winkel β mit $\sin\beta = R/\mathcal{A} = X$ gezeigt, der sich zur Charakterisierung von Massenverteilungen als zweckmäßig erweisen wird. Damit haben wir ein Bild von der SSM des Innenraumes, die glatt an die SSM des Außenraums anzuschließen ist (Abbildung 8.11). In der Abbildung sind drei Massenverteilungen verschiedener Dichte, Radius und Teilchenzahl eingezeichnet, die alle zur gleichen Außenraummasse M gehören. Die Abbildung zeigt auch, daß wir in der ersten Analyse nur einen Teil der möglichen Massenkonfigurationen erfaßt haben, da diejenigen Innenraumlösungen, die mehr als einer Halbkugel entsprechen ($\beta > \pi/2$), nicht berücksichtigt wurden. Allerdings sind alle Lösungen mit $\beta > \arcsin\sqrt{8/9} = 63°$ instabil.

Aufgaben

1. Formal kann die Frage, inwieweit die Schwarzschild- Geometrie statisch oder dynamisch ist, durch Untersuchung des betreffenden Killing-Vektorfeldes beantwortet werden; vgl. (2.9.8, 9). Setze das Vektorfeld, das für $r > 2M$ durch ∂_t gegeben ist[11], mittels der Kruskal-Transformation in den Bereich $0 < r \leq 2M$ fort. Zeige, daß es für $r < 2M$ raumartig, auf $r = 2M$ lichtartig wird.

   Lösung: Es ist $4M\partial_t = u\partial_v + v\partial_u$; das Viererquadrat davon ist

[11] Im Gegensatz zum Differentialsymbol dt ist das Symbol ∂_t nur eindeutig, wenn klar ist oder angedeutet wird, welches Koordinatensystem $(t, \ldots)$ benützt wird. Vgl. dazu die in der Thermodynamik übliche aufwendige Schreibweise partieller Ableitungen!

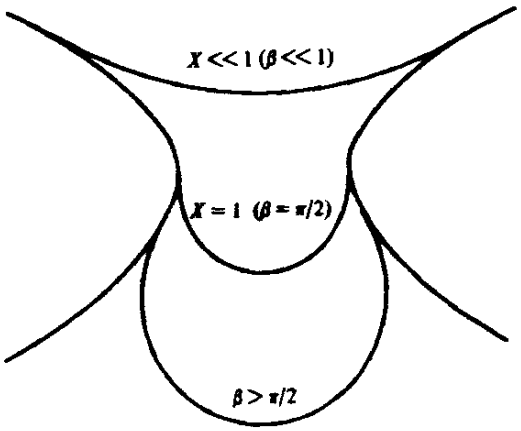

Abbildung 8.11: Volle Schwarzschild-Metrik.

$$f^2(u, v)(u^2 - v^2).$$

2. *Radiale Geodätische in der SSM.* Zeige, daß für ein radial in der SSM frei fallendes Teilchen der Zusammenhang zwischen Eigenzeit s und Radialkoordinate r durch (siehe (4.3.9))

$$s = \left(\frac{rR(R-r)}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{\frac{1}{2}} \arccos\left(\frac{2r}{R} - 1\right) \tag{8.4.19}$$

gegeben ist, wobei R der Maximalwert von r ist, der für $s = 0$ erreicht wird (Bahn mit negativer Energie, Abbildung 8.12). Überlege dazu, daß gemäß (8.4.16) r eine auf der Kruskal- Mannigfaltigkeit überall wohldefinierte Koordinate ist: nur t ist über $r = 2M$ hinweg ungeeignet! Zeige, daß die Eigenzeit vom Austritt aus der Singularität $r = 0$ bis zum Wiedereintritt endlich ist. Bei welcher Eigenzeit wird $r = 2M$ erreicht? Schätze diese Zeiten für physikalisch interessante Situationen ab. Welche Relationen gelten für Geodätische mit $R = \infty$ und für solche mit $F^2 > 1$ (siehe (4.3.9)), also positiver Gesamtenergie? Mit $1 - 2r/R = \cos\tau$ erhält man die Parameterdarstellung

$$r = \frac{R}{2}(1 - \cos\tau), \qquad s = \sqrt{R^3/8M}\,(\tau - \sin\tau - \pi) \tag{8.4.20}$$

für den radialen Fall in die Singularität. Vergleiche mit (5.7.18, 19)!

3. *Die Singularität in $r = 0$.* Um zu zeigen, daß in $r = 0$ eine echte Singularität vorliegt, die nicht auf eine ungünstige Wahl des Koordinatensystems zurückzuführen ist, berechne

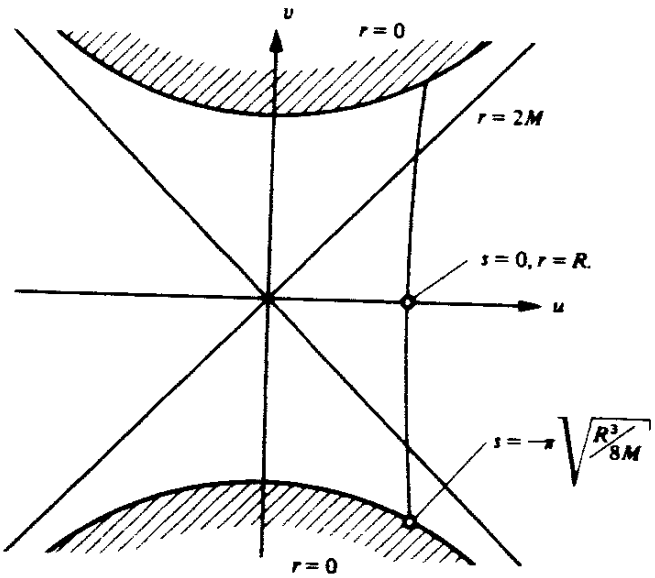

Abbildung 8.12: Radiale Geodätische und Eigenzeit.

a) den Riemann-Tensor für die SSM mit Hilfe der in Abschnitt 7.7 angegebenen Formeln.
Resultat:

$$R_{0101} = \frac{2M}{r^3} = -R_{2323}, \qquad R_{1212} = \frac{M}{r^3} = -R_{0202} \tag{8.4.21}$$

(und daraus durch Symmetrien hervorgehende Komponenten). Diese Komponenten beziehen sich auf eine orthonormale Basis, wie in Abschnitt 7.7 angegeben. Berechne daraus den Kretschmann-Skalar $R_{ijkl}R^{ijkl} \propto r^{-6}$, aus dem Effekte der Basiswahl eliminiert sind. Da er für $r = 0$ divergiert, liegt dort eine echte Singularität vor.

b) Zeige, daß (8.4.21) in der Form

$$R_{iklm} = -\frac{2M}{r^3}(\eta_{il}\,\eta_{km} - \eta_{im}\,\eta_{kl}) + \frac{3M}{r^3}(\beta_{il}\,\gamma_{km} - \beta_{kl}\,\gamma_{im} + \beta_{km}\,\gamma_{il} - \beta_{im}\,\gamma_{kl}) \tag{8.4.22}$$

geschrieben werden kann, wobei $\eta_{ik} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$, $\beta_{ik} = \mathrm{diag}\,(0, 0, -1, -1)$, $\gamma_{ik} = \mathrm{diag}\,(1, -1, 0, 0)$. Dabei gibt der zweite Term in (8.4.22) Abweichungen von der lokalen Isotropie an (vgl. (2.8.2)).

c) Die in (8.4.22) berechneten Komponenten des Krümmungstensors sind a priori nicht diejenigen, die ein frei fallender Physiker im mitfallenden Inertialsystem mißt, da das in (8.4.22) benutzte Bezugssystem für $r > 2M$ einem ruhenden Beobachter entspricht. Das mitfallende lokale Inertialsystem geht in jedem Punkt aus dem ruhenden durch eine lokale Lorentz-Transformation

in der 1-Richtung hervor. Zeige, daß dabei die Matrizen η, β, γ und damit die Krümmungskomponenten (8.4.22) invariant bleiben. (8.4.21) gibt also auch die Komponenten des Krümmungstensors im mitfallenden Bezugssystem an, unabhängig von dessen Geschwindigkeit.

d) Um die Auswirkungen des unendlichen R_{iklm} zu untersuchen, betrachten wir eine Anzahl benachbarter Teilchen, deren Weltlinien durch den Parameter v unterschieden seien, während $u = s$ die Eigenzeit entlang der Weltlinien sei. Welche Kraft F^i ist zwischen den Teilchen notwendig, damit der Abstand δx^k benachbarter Teilchen sich im Laufe der Bewegung nicht ändert (gemessen im mitfallenden Inertialsystem)? Verifiziere das Resultat am Beispiel zweier in der SSM ruhender Teilchen! (Verwende (2.7.9) für $A^i = v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$.)
Resultat: Im mitbewegten Inertialsystem ist die Kraft

$$F^i = m\, R^i{}_{0k0}\, \delta x^k \tag{8.4.23}$$

notwendig, um die Teilchen in konstantem Abstand zu halten.

Da in der Singularität $R^i{}_{0k0} \to \infty$, werden die Gezeitenkräfte (8.4.23) innerhalb beliebiger Strukturen (Festkörper, Atome, Elementarteilchen) unendlich groß, so daß diese Strukturen vernichtet werden. Daher ist auch die Kruskal-Mannigfaltigkeit nicht über die Kurve $r = 0$ hinaus fortzusetzen. (Es sei hinzugefügt, daß die Diskussion von Singularitäten beliebiger Metriken nicht in gleicher Weise geführt werden kann, da die physikalische Bedeutung solcher Metriken nicht klar ist. Man vergleiche dazu den instruktiven Dialog in R. Geroch, Ann. Phys. (N. Y.) **48**, 526 (1968), sowie den Artikel von Tipler et al. in Held (1980), Vol. II.)

4. *Die Metrik einer geladenen Masse* (Reissner- Lösung[12]). In dieser Übungsaufgabe soll schrittweise die Geometrie in der Umgebung einer geladenen Masse hergeleitet werden (Reissner- Lösung).

a) Zeige, daß der Einstein-Tensor für ein Linienelement der Form (8.4.6a) gegeben ist durch ($\psi(r) := r\Phi(r)$)

$$G^0_0 = G^1_1 = (\psi' - 1)/r^2, \quad G^2_2 = G^3_3 = \psi''/2r, \quad G^a{}_b = 0 \text{ sonst.} \tag{8.4.24}$$

b) Welche Bedingungen müssen an einen Energie-Impulstensor $T_{ik} = \mathrm{diag}\,(\rho, p_1, p_2, p_3)$ (orthonormale Komponenten) gestellt werden, damit die Lösung der Einstein-Gleichungen die Form (8.4.6a) hat?
Resultat:

[12] H. Reissner, Ann. Phys. Lpz. **50**, 106 (1916).

$$\rho + p_1 = 0, \qquad p_2 = p_3, \qquad p_1' = \frac{2}{r}(p_2 - p_1). \tag{8.4.25}$$

c) Eine wichtige Klasse von Lösungen ergibt sich für den Ansatz $p_2 = \gamma p_1$ ($\gamma = \text{const.}$):

$$\begin{aligned} \rho &= -p_1 = -\frac{p_2}{\gamma} = -\frac{p_3}{\gamma} = q\, r^{2(\gamma-1)}, \\ \Phi &= \frac{U}{r} = 1 - \frac{\kappa q}{2\gamma+1} r^{2\gamma} - \frac{2M}{r}, \end{aligned} \tag{8.4.26}$$

wobei q und M Integrationskonstante sind. Diese Lösungen umfassen:
α) Das *de Sitter-Universum;* es ergibt sich für $\gamma = 1$, $M = 0$. Dann wird $T_{ik} = q\,\eta_{ik}$, so daß der Energie-Impulstensor des Vakuums (5.5.3) resultiert, wobei $q = \Lambda/\kappa$. Das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{8.4.27}$$

ist das des de Sitter-Universums in anderen Koordinaten (vgl. Aufgabe zu Abschnitt 5.7).
β) *Das Schwarzschild-Linienelement* ($q = 0$, $M \neq 0$).
γ) *Das Schwarzschild-Linienelement* bei *Annahme einer nichtverschwindenden kosmologischen Konstante* Λ oder das de Sitter-Universum mit zusätzlicher „Punkt"masse ergibt sich für $q \neq 0$, $M \neq 0$, $\gamma = 1$. Das Linienelement ist in diesem Fall

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\Omega^2. \tag{8.4.28}$$

δ) Die *Reissner-Lösung* erhält man für $\gamma = -1$, $M \neq 0$, $q = e^2/2$. Es ist

$$T_{ik} = \frac{e^2}{2r^4}\,\mathrm{diag}\,(1, -1, 1, 1), \tag{8.4.29}$$

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa e^2}{2r^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa e^2}{2r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\Omega^2.} \tag{8.4.30}$$

Diese Lösung entspricht dem Gravitationsfeld einer geladenen Masse, da der Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes (siehe Abschnitt 9.3)

$$T_{ik} = F_{ij} F^{j}{}_{k} - \tfrac{1}{4} g_{ik} F_{mn} F^{nm} \tag{8.4.31}$$

für ein radiales elektrisches Feld $F_{01} \propto 1/r^2$ gerade die Form (8.4.29) hat. Da in Schwarzschild-Koordinaten die Kugeloberfläche durch $4\pi r^2$ gegeben ist, folgt aus der Flußerhaltung der Abfall der Feldstärke $\propto 1/r^2$ (siehe auch Aufgabe 2 zu Abschnitt 9.3). Bemerkenswert ist, daß (8.4.30) aus der SSM durch die Substitution $M \to M - \frac{\kappa e^2}{4r}$ hervorgeht. Diskutiere diese „Massenrenormierung"!

ε) Die Reisner-Lösung mit kosmologischer Konstante (= de Sitter mit geladener „Punkt"masse).

5. *Eigenschaften der Reissner-Lösung*

a) Berechne den Riemannschen Krümmungstensor für (8.4.30) mit Hilfe der Formeln des Abschnittes 7.7 und zeige, daß auch hier R_{iklm} durch die Matrizen η, β, γ der Aufgabe 2 ausgedrückt werden kann, so daß die dort unter c und d angeführten Eigenschaften auch für geladene Massen gelten.

b) Für $e^2 > M^2$ ist $\Phi(r)$ für alle Werte von r positiv, so daß r bis zu $r = 0$ eine raumartige Koordinate ist. Die Singularität in $r = 0$ ist von keinem Ereignishorizont verhüllt und läßt sich vom Außenraum her untersuchen. Sie heißt daher auch *nackte Singularität*. Entsprechen Elementarteilchen (falls wir sie als Punktteilchen nähern können) nackte Singularitäten?

c) Für $e^2 < M^2$ hat $\Phi(r)$ Nullstellen für $r_{1,2} = M \pm \sqrt{M^2 - e^2}$. Diese Nullstellen müssen durch zwei Transformationen der Form (8.4.28) eliminiert werden, wobei die Koordinaten u_1, v_1 im Bereich $\infty > r \geq r_s$ und die Koordinaten u_2, v_2 im Bereich $r_s \geq r > 0$ brauchbar sind, wobei der Stückelungsradius r_s willkürlich zwischen r_1 und r_2 gewählt werden kann. Abbildung 8.13 zeigt diese Koordinatenbereiche, wobei in der zweiten Kruskal-Ebene u zeitartig und v eine raumartige Koordinate ist, da dort das Vorzeichen von $\Phi(r)$ nicht von + nach −, sondern von − nach + wechselt.

Nach Durchqueren der Anschlußlinie ② kommt man wieder in eine Kruskal-Ebene analog zu (u_1, v_1), die jedoch einen anderen Raum $\infty > r \geq r_s$ repräsentiert, der nicht mit dem ersten identifiziert werden darf (um geschlossene zeitartige Linien zu vermeiden). Die Reissner-Metrik mit $e^2 < M^2$ hat daher nicht nur zwei „Bereiche im Unendlichen" (wie die SSM), sondern unendlich viele. Ferner kann man sich im Gebiet $r < r_1$ (also innerhalb des Ereignishorizontes) beliebig lange aufhalten, ohne notwendigerweise die Singularität $r = 0$ zu treffen. Man geht dabei dauernd in neue Kruskal-Ebenen über und kann sogar wieder in ein Gebiet $r > r_1$ gelangen, allerdings nicht in das ursprüngliche. Diese kurz gehaltenen Anhaltspunkte sollen den Leser vor allem zur Lektüre von Originalarbeiten[13] anregen.

[13] J. C. Graves, D. R. Brill, Phys. Rev. **120**, 1507 (1960); B. Carter, Phys. Letters **21**, 423 (1966); Artikel in DeWitt & DeWitt (1973).

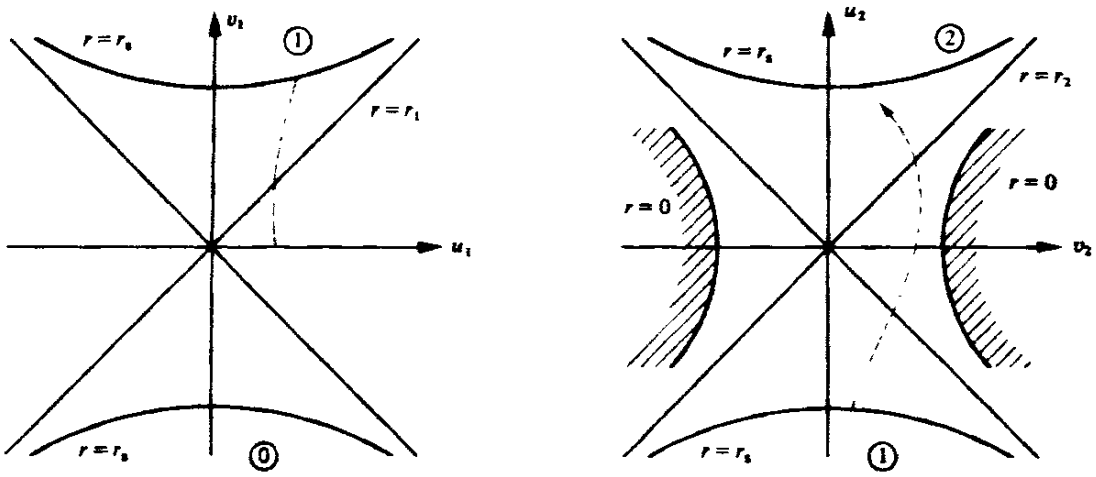

Abbildung 8.13: Zwei Kruskal-Ebenen der Reissner-Lösung. Das linke Diagramm ist für $\infty > r \geq r_s$ gültig, das rechte für $r_s \geq r > 0$. Die beiden Linien ① sind zu identifizieren, um vom einen Koordinatenbereich in den anderen zu gelangen, wie am Beispiel einer Geodätischen (strichliert) gezeigt ist.

8.5 Gravitationskollaps

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels haben wir gesehen, daß ein Stern, dessen thermonukleare Energie verbraucht ist, durch den Druck entarteter Elektronen bzw. Neutronen aufrecht erhalten wird. Dies ist allerdings nur für Sterne mit weniger als (etwa) zwei Sonnenmassen möglich. Wenn schwerere Sterne ihren Kernbrennstoff verbraucht haben und Druck und Temperatur im Sterninneren nachlassen, müssen sie daher entweder einen Teil ihrer Masse abstoßen und so auf $\mathcal{M} < 2\mathcal{M}_\odot$ kommen, oder sie erleiden einen Gravitationskollaps, der ein „schwarzes Loch" als Endzustand hat. Mit diesem Gravitationskollaps wollen wir uns hier beschäftigen, wobei wir uns vorerst der Einfachheit halber auf exakt kugelsymmetrische Situationen beschränken.

Um die physikalischen Vorgänge beim Kollaps richtig einschätzen zu können, berechnen wir zunächst die Dichte eines Sternes, dessen Radius R gleich seinem Schwarzschild-Radius $2M$ ist:

$$2M = \frac{2G\mathcal{M}}{c^2} = R = \left(\frac{3\mathcal{M}}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \tag{8.5.1}$$

oder

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi G^3\mathcal{M}^2} = 2\cdot 10^{16}\,\mathrm{g/cm^3}\left(\frac{\mathcal{M}_\odot}{\mathcal{M}}\right)^2 . \tag{8.5.2}$$

Für Sterne von einigen Sonnenmassen ergeben sich beim Kollaps sehr komplizierte Verhältnisse. In der kritischen Phase des Kollapses, wenn nämlich

der Sternradius nur mehr wenig größer als der Schwarzschild-Radius ist, erreichen diese Sterne die Dichte von Kernmaterie, wodurch große nicht-gravitative Kräfte entstehen und komplizierte hydrodynamische Vorgänge einsetzen.

Ganz einfache Verhältnisse liegen dagegen vor, wenn eine Masse von der Größenordnung einer Galaxis kollabiert. Aus (8.5.2) ergibt sich, daß die kritische Dichte dann etwa die von Luft ist ($\rho \approx 10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$). Nicht-gravitative Kräfte können demnach vernachlässigt und der Kollaps des Gebildes[14] durch einen freien Fall angenähert werden. Dies entspricht der Näherung, daß wir in der Zustandsgleichung den Druck $p = 0$ setzen, die Materie also als inkohärenten Staub betrachten. Wegen des Fehlens nichtgravitativer Kräfte folgt dann jedes Staubteilchen einer Geodätischen, so daß sich ein einfaches Modell des Kollapses ergibt, das im folgenden analysiert werden soll.

Zur Zeit $t = 0$ sei eine momentan statische Massenkonfiguration mit $X \ll 1$ ($R \gg 2M$) gegeben, die dann im Lauf der Zeit frei fallend kollabiert. Realistisch gesehen, werden bei diesem Kollaps Strahlungseffekte (Emission elektromagnetischer Strahlung bzw. von Neutrinos) auftreten, die aber in dem hier betrachteten Modell zu vernachlässigen sind. Die Masse $\mathcal{M}$ bleibt daher von außen gesehen konstant, so daß die Außenraummetrik durch die Kruskal-Metrik gegeben ist. Die Sternoberfläche, die zugleich die Grenze der Gültigkeit der Außenraummetrik bildet, ist in der Kruskal-Metrik durch eine Geodätische zu repräsentieren, die zur Zeit $t = 0$ ($u = 0$) vom ursprünglichen Radius R (entsprechend $U = \sqrt{R/2M - 1}\,\exp(R/4M)$) ausgeht und dann frei fallend zu $r = 0$ kollabiert.

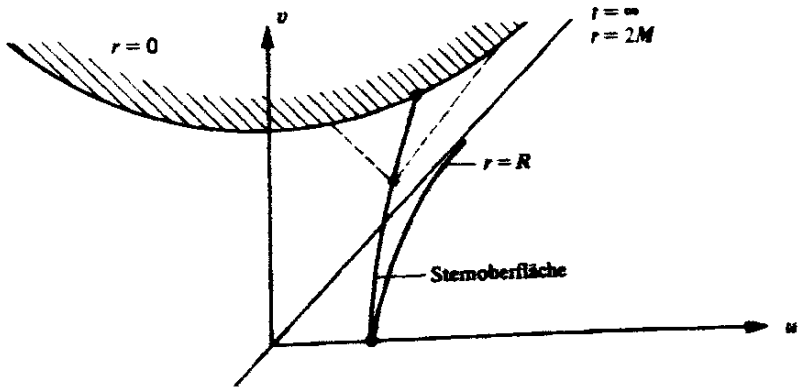

Abbildung 8.14: Kruskal-Metrik und Sternoberfläche.

Abbildung 8.14 ist eigentlich alles, was über den sphärisch-symmetrischen Kollaps wichtig ist, bereits zu entnehmen. Das Teilchen, das die Sternoberfläche repräsentiert, geht nach endlicher Eigenzeit (siehe (8.4.19)) durch den Schwarzschild-Radius $r = 2M$ hindurch und erreicht zur Eigenzeit

$$s = \pi(R^3/8M)^{1/2} \tag{8.5.3}$$

[14] Im folgenden wieder „Stern" genannt.

den Punkt $r = 0$. Vom mitfallenden Beobachter auf der Sternoberfläche gesehen, dauert der Kollaps daher nur endliche Zeit bis zur Erreichung der Singularität.

Ganz anders erscheint die Situation, wenn man sie durch die Schwarzschild-Zeitkoordinate t beschreibt. Der Durchgang durch den Schwarzschild-Radius erfolgt hier für $t = \infty$. Einen Beobachter im Außenraum, der sich an einem konstanten Wert von r, etwa $r = R$, aufhält, erreicht ein Signal, das von der Sternoberfläche im Augenblick des Durchgangs durch den Schwarzschild-Radius ausgeht, erst in $t = \infty$. Da t (bis auf einen konstanten Faktor) für diesen Beobachter die Zeitkoordinate darstellt, dauert der Kollaps bis zum Schwarzschild-Radius also für den Außenraumbeobachter unendlich lange Zeit.

Für den Außenraumbeobachter tritt daher nie der Fall ein, daß nur ein „schwarzes Loch", also eine Singularität, zurückbleibt, der kollabierende Stern sendet vielmehr zu allen Zeiten Licht aus. Allerdings ist dieses Licht zunehmend rotverschoben, wobei für radial emittierte Lichtstrahlen die Rotverschiebung exponentiell mit der Zeit zunimmt:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = e^{t/4M}. \tag{8.5.4}$$

Auch die Leuchtkraft des Sternes nimmt rapid ab, wobei sowohl die zunehmende Rotverschiebung als auch die Tatsache wichtig ist, daß in gleichen Eigenzeitintervallen von der Sternoberfläche abgehende Photonen in immer größeren Zeitintervallen beim entfernten Beobachter ankommen. Die Berechnung der Leuchtkraftabnahme erfordert auch die Berücksichtigung nichtradialer Photonen und wurde von Ames und Thorne[15] durchgeführt. Das Resultat ist

$$L \propto \exp\left(-\frac{t}{3\sqrt{3}M}\right). \tag{8.5.5}$$

Der Stern erlischt also nach außenhin sehr schnell, wobei die charakteristische Zeit durch

$$t \sim 3\sqrt{3}M \sim 2.5 \cdot 10^{-5} s \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \tag{8.5.6}$$

gegeben ist. Daher ist der Ausdruck „Schwarze Löcher" für kollabierende Sterne gerechtfertigt, wenngleich diese Objekte nie wirklich völlig schwarz werden. Interessant ist, daß in diesen Spätphasen des Kollapses die zu Abbildung 4.4 erwähnte instabile Kreisbahn von Bedeutung ist, die für Photonen in der SSM bei $r = 3M$ existiert. Eine Anzahl von Photonen wird nämlich dort zunächst gespeichert, so daß sich eine Photonenwolke bildet, deren Auflösung für die Luminosität des Sternes in der Spätphase verantwortlich ist.

[15] W. L. Ames, K. Thorne, Astrophys. J. **151**, 659 (1968).

Der Abbildung 8.14 können wir aber noch eine andere wichtige Tatsache entnehmen: Wenn das Teilchen, das in der Abbildung die Sternoberfläche repräsentiert, den Schwarzschild-Radius $r = 2M$ durchquert hat, können beliebige Druckeffekte den Kollaps zur Singularität nicht mehr aufhalten. Denn der Lichtkegel, der etwa von Punkt B der Abbildung ausgeht, erreicht beiderseits die Singularität $r = 0$. Druckeffekte können aber die Weltlinien nur innerhalb des Lichtkegels verändern, so daß der Kollaps zu $r = 0$ unausweichlich erscheint. Beliebige Kräfte, mögen sie noch so stark sein, können damit den Kollaps nur verhindern, wenn sie vor dem Erreichen von $r = 2M$ wirksam werden. Es ist dies die wichtigste Aussage der Theorie des Gravitationskollapses: sie erscheint in ihrer Unausweichlichkeit und Strenge unakzeptabel, da ein Kollaps bis zu einem „Punkt" kaum vorstellbar ist. Allerdings gilt das hier hergeleitete Resultat zunächst nur im Fall perfekter Kugelsymmetrie und ohne Berücksichtigung quantenmechanischer Tunneleffekte.

Wir haben bisher bei der Diskussion des Gravitationskollapses nur die Außenraummetrik betrachtet, die nun durch Hinzufügung einer Innenraummetrik zu ergänzen ist. Dabei müssen wir wieder von einem möglichst einfachen Modell ausgehen, um zu analytischen Lösungen zu gelangen. Das einfachste Modell, das bereits in der klassischen Untersuchung von Oppenheimer und Snyder verwendet wurde, geht von einem Stern konstanter Dichte ρ_0 aus. Für negative Zeiten $t < 0$ sei eine der in Abbildung 8.11 (volle SSM) gezeigten inkompressiblen Massenverteilungen mit Dichte ρ_0 gegeben, so daß die räumliche Metrik im Innenraum ein Raum konstanter Krümmung, diejenige im Außenraum die SSM ist. In $t = 0$ soll sich die Zustandsgleichung plötzlich verändern (dies ist unser Modell des Erlöschens der Kernreaktionen), und aus inkompressibler Materie soll schlagartig inkohärenter Staub mit der Zustandsgleichung $p = 0$ werden. Als Anfangsbedingung liegt daher für $t = 0$ eine Innenraumlösung vor, die einem momentan statischen, konstant (positiv) gekrümmten Raum entspricht, der mit Materie konstanter Dichte ρ_0, aber verschwindenden Druckes erfüllt ist. Dies ist aber genau diejenige Bedingung, die das geschlossene Friedmann-Universum (siehe 5.7.15, 18, 19) im Moment seiner maximalen Ausdehnung erfüllt[16]. Auch dort ist der dreidimensionale Raum von konstanter Krümmung, momentan statisch und von inkohärenter Materie konstanter Dichte erfüllt. Allerdings entspricht die in der Theorie des Gravitationskollapses verwendete Innenraumlösung nur einem Sektor $\alpha \leq \beta$ des Friedmann-Universums, wie Abbildung 8.10 zeigt, der glatt an eine äußere Schwarzschild-Metrik angeschlossen werden muß.

Da die Anfangsbedingungen übereinstimmen, muß auch der weitere zeitliche Verlauf des Gravitationskollapses der gleiche sein wie beim Kollaps eines Universums in der Kosmologie, wobei allerdings der Stückelung von Friedmann- und Schwarzschild-Lösung einige Aufmerksamkeit zu schenken sein wird.

[16] Andere Anfangsbedingungen erfordern die anderen Friedmann-Universen. Das flache Friedmann-Universum etwa wird in der Originalarbeit von Oppenheimer und Snyder verwendet: Phys. Rev. **56**, 455 (1939).

Fassen wir zunächst die wichtigsten Formeln (5.6.10, 7.17, 18) über das geschlossene Friedmann-Universum zusammen, wobei wir uns auf den radialen Teil des räumlichen Linienelementes beschränken:

$$ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - d\alpha^2). \tag{8.5.7}$$

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \frac{\mathcal{A}}{2}(1 - \cos\tau), \\ t &= \frac{\mathcal{A}}{2}(\tau - \sin\tau - \pi), \end{aligned} \qquad 0 \le \tau \le 2\pi. \tag{8.5.8}$$

Die Eigenschaften von (8.5.7) wurden bereits in Abschnitt 5.9 diskutiert und gehen am klarsten aus Abbildung 5.16 hervor. Die größte Ausdehnung des Universums – und damit der Augenblick der Zeitsymmetrie – wird für $\tau = \pi$ erreicht, also zur Zeit $t = 0$.[17] Die Konstante $\mathcal{A}$, die die maximale Ausdehnung des Universums angibt, hängt dabei mit der Dichte ρ_0 im Augenblick der Zeitsymmetrie durch (8.4.18), also

$$\mathcal{A} = (3/8\pi G\rho_0)^{1/2} \tag{8.5.9}$$

zusammen. Für den Gravitationskollaps ist das Linienelement (8.5.7) auf den Bereich $0 \le \alpha \le \beta$ einzuschränken, da das Friedmann-Universum bei der Geodätischen $\alpha = \beta = \text{const.}$, $\pi \le \tau \le 2\pi$ abzuschneiden ist, die den freien Fall (Kollaps) der Sternoberfläche angibt.

Die Lösung der Einstein-Gleichungen im Außenraum des kollabierenden Sternes ist durch die Kruskal-Metrik gegeben, die Abbildung 8.14 zeigt. Sie ist ebenfalls an der Sternoberfläche abzuschneiden, so daß sich Abbildung 8.15 ergibt.

Die Identifikation von Punkten (in der Abbildung als Beispiel A) erfolgt dabei dadurch, daß auf der Geodätischen, die die Sternoberfläche darstellt, in beiden Diagrammen die gleiche Eigenzeit vergangen sein muß. Setzen wir in (8.4.20) $R = \mathcal{A}\sin\beta$, $2M = 8\pi G\rho_0 R^3/3 = R^3/\mathcal{A}^2$, so folgt

$$r = \frac{\mathcal{A}}{2}(1 - \cos\tau)\sin\beta = a(\tau)\sin\beta, \quad s = \frac{\mathcal{A}}{2}(\tau - \sin\tau - \pi). \tag{8.5.10}$$

Da im Friedmann-Universum t die Eigenzeit ist, zeigt ein Vergleich von (8.5.10) mit (8.5.8), daß Punkte mit gleichen Werten von τ auf den beiden Diagrammen zu identifizieren sind[18]. Aus beiden Formeln ergibt sich übereinstimmend, daß vom Einsetzen des Kollapses bis zur Erreichung der Singularität ($r = 0$) die Eigenzeit

[17] In (8.5.8) wurde eine Verschiebung des Zeitursprungs vorgenommen, um den Beginn der kollabierenden Phase auf $t = 0$ zu legen.

[18] Allerdings ist der Wert von r dem Kruskal-Diagramm nicht direkt geometrisch zu entnehmen, sondern nur auf dem Umweg über (8.5.10).

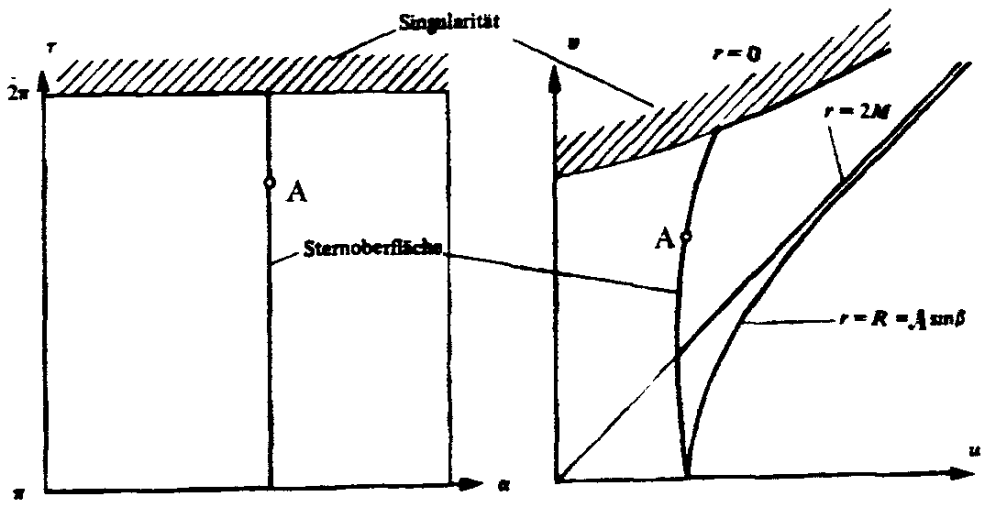

Abbildung 8.15: Innenraum und Außenraum beim Gravitationskollaps (Friedmann-Universum und Kruskal-Metrik).

$$s = \frac{\mathcal{A}\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(3/8\pi G\rho_0)^{1/2} = 2,1 \cdot 10^3 \mathrm{s} \left(\frac{\rho_0}{\mathrm{g/cm}^3}\right)^{-1/2} \tag{8.5.11}$$

für einen auf der Sternoberfläche mitfallenden Beobachter vergeht. Die so definierte Dauer des Kollapses hängt damit nur von der anfänglichen Dichte und nicht von der Größe des Sternes oder sonstigen Parametern ab. Für einen Stern von etwa der Dichte der Sonne ($\rho_0 \sim 1\,\mathrm{g\,cm}^{-3}$) ergibt sich eine Kollapszeit von rund einer Stunde.

Die Raum-Zeit-Geometrie in der Umgebung des kollabierenden Sternes kann durch verschiedene raumartige Schnitte zerlegt und anschaulich gemacht werden. In Abbildung 8.16 sind zwei Serien derartiger Schnitte angegeben. Sie zeigen, wie unterschiedlich das Bild des Kollapses bei den (durchaus gleichberechtigten) Schnittserien wird.

Die Zerlegung der vollen Raum-Zeit-Geometrie durch raumartige Schnitte ist daher beim Gravitationskollaps nicht geeignet, ein klares Bild der Vorgänge zu geben. Die zeitabhängigen Vorgänge beim Kollaps können nur durch Raum-Zeit-Diagramme (Abbildung 8.15) einigermaßen anschaulich dargestellt werden.

Abschließend wäre noch zu zeigen, daß die Stückelung von Friedmann-Universum und Kruskal-Metrik wirklich alle Anschlußbedingungen an der Sternoberfläche korrekt erfüllt. Da die Durchführung dieser ziemlich mühsamen Aufgabe keine neuen physikalischen Erkenntnisse bringt, wollen wir sie hier unterlassen und den interessierten Leser auf die Originalliteratur[19] verweisen.

[19] R. Oppenheimer, S. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939), oder Hoyle, Fowler, Burbidge and Burbidge, Ch. 3 in Robinson, Schild & Schücking (1965).

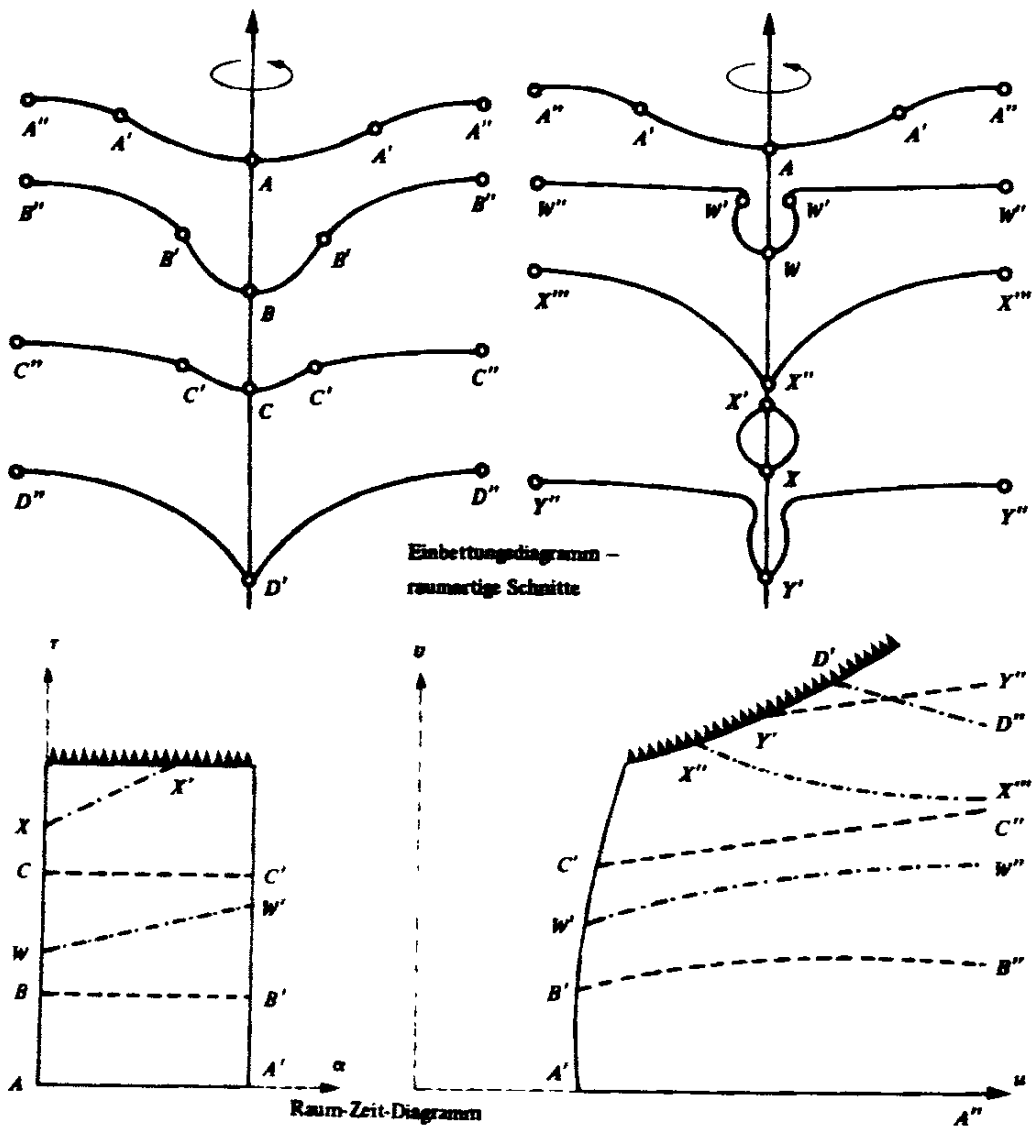

Abbildung 8.16: Veranschaulichung der Raum-Zeit-Geometrie durch verschiedene raumartige Schnitte.

8.6 Die Kerr-Metrik

Während wir zum Kollaps eines nichtrotierenden, kugelförmigen Sternes ein exakt lösbares Modell angeben und durchrechnen konnten, werden wir uns beim nichtsphärischen Kollaps auf eine kurze Diskussion der wichtigsten Resultate beschränken müssen. Zur Vorbereitung stellen wir eine im Jahre 1963 von R. P. Kerr[20] aufgefundene exakte stationäre, axialsymmetrische, im räumlich Unend-

[20] R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963). Siehe auch B. Carter, Phys. Rev. **174**, 1559 (1968) wegen der hier verwendeten Koordinaten und einer Bestimmung der Teilchenbahnen und Kruskal-artiger Erweiterungen, und Chandrasekhar (1983).

lichen flache Lösung der Einsteinschen Vakuumgleichungen vor, von der man zunächst hoffte, sie würde die Metrik in der Umgebung einer gleichförmig rotierenden Masse beschreiben. Es ist jedoch bis heute keine befriedigende Innenraumlösung wie in Abschnitt 8.2 für die SSM bekannt, und ihre physikalische Bedeutung kristallisierte sich erst später heraus (siehe folgende Abschnitte). Sie lautet (in Boyer-Lindquist-Koordinaten)

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{\Delta}{\rho^2}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2+a^2)\mathrm{d}\phi - a\,\mathrm{d}t)^2 - \\ & -\frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 - \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2, \quad \rho^2 := r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta := r^2 - 2Mr + a^2. \end{aligned}} \tag{8.6.1}$$

Für $a = 0$ geht sie in die SSM über, für $M = 0$ erhält man die flache Metrik in krummlinigen Raumkoordinaten, und durch Vergleich mit (4.5.11) zeigt man leicht, daß die Kerr-Metrik für kleine a dem Feld einer langsam rotierenden Masse $\mathcal{M} = c^2M/G$ mit Drehimpuls

$$\mathcal{J} = \mathcal{M}ca \tag{8.6.2}$$

entspricht. Statt $\mathcal{J}$ wollen wir im folgenden öfters die „geometrisierte" Größe

$$J := G\mathcal{J}/c^3 \tag{8.6.3}$$

verwenden, die die Dimension einer Fläche hat. Wie bei der SSM kann auch hier durch die Substitution $M \to M - \kappa e^2/4r$ die Geometrie in der Umgebung einer geladenen, rotierenden Masse erhalten werden (Kerr-Newman-Lösung)[21].

Stationarität und Axialsymmetrie der Metrik ist erkennbar durch die Unabhängigkeit der metrischen Koeffizienten in (8.6.1) von t und ϕ. Daher sind ∂_t und ∂_ϕ und auch jede Linearkombination mit konstanten Koeffizienten Killingvektorfelder. Für Beobachter, deren Weltlinien überall von Vektoren eines Killingfeldes berührt werden, ist die lokal registrierte Geometrie im Lauf der Zeit invariant (vgl. Abschnitt 2.10). Weltlinien der Form $t = \tau$, $\phi = \Omega\tau$, $r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ erfüllen diese Bedingung und repräsentieren daher *stationäre Beobachter* mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Symmetrieachse. *Statische Beobachter* ($\Omega = 0$) rotieren nicht gegenüber dem asymptotischen Inertialsystem: ∂_t ist asymptotisch hyperflächenorthogonal (vgl. (2.9.9)). Die Zeitartigkeit der Weltlinien stationärer Beobachter erlegt die Beschränkung

$$g(\partial_t + \Omega\partial_\phi, \partial_t + \Omega\partial_\phi) = g_{tt} + 2\Omega\, g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi} > 0$$

[21] E. T. Newman, E. Couch, R. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence, J. Math. Phys. **6**, 918 (1965). Das Viererpotential des zugehörigen elektromagnetischen Feldes ist durch $A_i\,\mathrm{d}x^i = er(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi)/\rho^2$ gegeben.

auf, aus der sich an jeder Stelle (r, θ) ein erlaubter Bereich von Winkelgeschwindigkeiten ergibt: $\Omega_-(r, \theta) < \Omega < \Omega_+(r, \theta)$. Dabei gilt asymptotisch $\Omega_\pm(r, \theta) \sim \pm(r \sin\theta)^{-1}$, und der statische Wert $\Omega = 0$ verbleibt im erlaubten Bereich, solange $g_{tt}(r, \theta) > 0$. Die Hyperfläche $g_{tt}(r, \theta) = 0$ bildet daher die Grenze des Gebiets, in dem statische Beobachter existieren und das durch Aufbau eines statischen Gerüstes erforscht werden kann.

Im Gebiet $g_{tt}(r, \theta) < 0$, der *Ergosphäre* (der Name wird später erklärt), muß ein stationärer Beobachter $\operatorname{sign}\Omega = \operatorname{sign} g_{t\phi} \equiv \operatorname{sign} a$ haben, muß also im Sinn des Drehimpulses (8.6.2) – und jeder andere Beobachter mit $u^\phi \neq 0$ – um die Symmetrieachse rotieren. (Letzteres folgt ebenfalls aus $u^2 = 1$, $g_{tt} < 0$). Für Rotverschiebungsexperimente mit statischen Sendern und Empfängern ist die Statizitätsgrenze auch eine Fläche unendlicher Rotverschiebung (siehe Aufgabe 3). Entgegen dem ersten Anschein ist sie jedoch keine Singularität des verwendeten Koordinatensystems, d. h., sowohl die holonomen g_{ik} wie die g^{ik} bleiben auf ihr endlich.

Für $|a| > M$ bleibt die Metrik von $r = \infty$ bis zu der in $r = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ befindlichen ringförmigen (siehe Aufgabe 1), für $M \neq 0$ *echten* (siehe Aufgabe 2) *Singularität* frei von Koordinatensingularitäten, da dann im ganzen Bereich $\Delta > 0$ bleibt und man mit etwas Rechnung

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= -\sin^2\theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2\theta}{\rho^2} \right) \\ g_{tt} g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 &= -\sin^2\theta \Delta \end{aligned} \tag{8.6.4}$$

findet. Bis zu ihr bleiben die Flächen $r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ zeitartig (siehe Aufgabe 4), man kann von einer *zeitartigen Singularität* sprechen. Man kann sich überzeugen (siehe Aufgabe 1 zu Abschnitt 8.8), daß es zu jedem Punkt mit $r > 0$ sowohl lichtartige Geodätische gibt, die die Singularität in der Zukunft erreichen, wie auch solche, die das in der Vergangenheit tun. Da diese Linien zur Gänze in ein und demselben Koordinatensystem (t, ϕ, r, θ) beschreibbar sind, in dem auch die Singularität ein zusammenhängendes Gebilde darstellt, handelt es sich hier also um eine *nackte Singularität*, die aus dem Unendlichen beobachtet werden kann. [Dabei ist ein Unterschied zu der Singularität $v = -\sqrt{1 + u^2}$ im Sektor IV des Kruskaldiagramms zu betonen, die wohl ebenfalls aus dem Unendlichen beobachtbar, aber *raumartig* ist, so daß sie eindeutig als *vergangene Singularität* bezeichnet werden kann wie auch die Anfangssingularität der kosmologischen Modelle (vgl. Abbildung 5.16). Sie ist von der Singularität $v = +\sqrt{1 + u^2}$ des Sektors II, dem schwarzen Loch, getrennt, von außen unerreichbar („Vergangenheitshorizont") und tritt in echten Kollapssituationen nicht auf, weil dort die materiebestimmte Innenraumgeometrie gilt. Gelegentlich wird Sektor IV des Kruskaldiagramms als *Weißes Loch* bezeichnet und ist die exakte Zeitspiegelung des schwarzen Lochs.]

Wesentlich anders ist die Situation im Fall $|a| \leq M$. Zunächst sehen wir, daß längs $\Delta(r) = 0$ eine Singularität auftritt. Es handelt sich zwar wieder nur

um eine Koordinatensingularität, wie man etwa aus der Transformation auf Kerrs ursprüngliche Koordinaten mit den Differentialen $dt + (r^2 + a^2)dr/\Delta$, $d\phi + a\,dr/\Delta$, dr, $d\theta$ sehen würde; doch ist von den beiden durch $\Delta(r) = 0$ gegebenen Hyperflächen $r = r_\pm$, wo

$$r_\pm := M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \tag{8.6.5}$$

die äußere, $r = r_+$, für das Weitere von fundamentaler Bedeutung. Es handelt sich um eine räumlich geschlossene, lichtartige Hyperfläche: dr ist auf ihr ein lichtartiger Kovektor ($g^{rr}(r_+) = 0$), sie wird also vom Lichtkegel jedes ihrer Punkte berührt, wobei die Zukunftslichtkegel ins Innengebiet $r < r_+$ weisen, falls man in Zukunftsrichtung an $r = r_+$ herangeht, und ins Außengebiet, falls man in Vergangenheitsrichtung an $r = r_+$ herangeht. Dies trifft nämlich für $a = 0$ zu (Abbildung 8.5) und kann sich bei stetig variierendem a nur stetig, d.i. gar nicht ändern, solange r_+ überhaupt reell bleibt. Das zeigt, daß (der für Außenbeobachter zukünftige Teil) $r = r_+$ völlig analog zum Fall der SSM einen *Ereignishorizont* für Außenraumbeobachter darstellt. Aus seinem Innenraum, der auch die (zukünftige) echte Singularität $r = 0$, $\theta = \pi/2$ enthält, gibt es aus Kausalitätsgründen kein Entweichen. Wir haben somit ein *schwarzes Loch* vor uns. (Da wir eigentlich Endstadien eines Kollapses im Sinn haben, betrachten wir hier und von nun an nur mehr die Zukunft des Außengebietes $r > r_+$.) Wir wollen daher auf die Untersuchung des Innenraums, der ähnlich wie in Abbildung 8.13 fortgesetzt werden kann, verzichten und verweisen diesbezüglich auf die Literatur[22]. Abbildung 8.17 zeigt schematisch Ergosphäre und Horizont für die Fälle $|a| > M \neq 0$ und $M \geq |a|$.

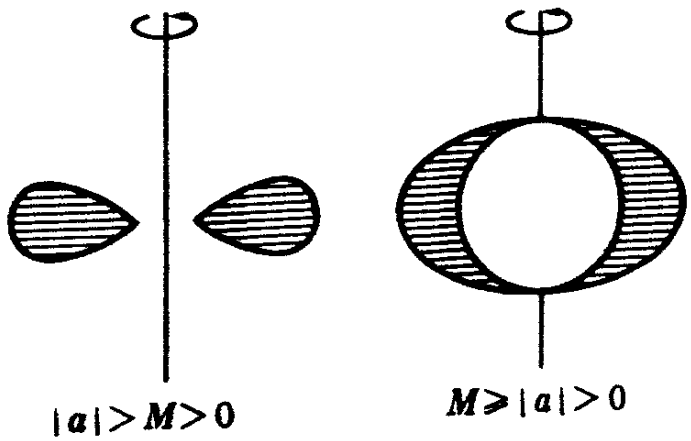

Abbildung 8.17: Ergosphäre und Horizont.

Von größter Bedeutung für die späteren Abschnitte sind noch zwei geometrische Details des Horizonts, die wir hier herleiten. Das eine betrifft seine

[22] B. Carter, in DeWitt & DeWitt (1973).

lichtartigen Normalen, die gleichzeitig auch seine lichtartigen Tangenten sind: Vierervektoren orthogonal zu einem lichtartigen Vierervektor sind ja entweder parallel zu ihm oder raumartig. Wir können sie nicht gemäß $r_{,i}g^{ik}\partial_k|_{r_+} = g^{rr}(r_+)\partial_r$ bestimmen, da $g^{rr}(r_+) = 0$, sondern setzen sie als Linearkombinationen $k = \partial_t + \alpha\partial_\phi + \beta\partial_\theta$ an. Zur Auswertung von $k^2(r_+) = 0$ benutzen wir die Umformung

$$k^2 = g_{tt} + 2\alpha g_{t\phi} + \alpha^2 g_{\phi\phi} + \beta^2 g_{\theta\theta} \equiv \beta^2 g_{\theta\theta} + g_{\phi\phi}^{-1}(g_{t\phi} + \alpha g_{\phi\phi})^2 + \frac{g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2}{g_{\phi\phi}}.$$

Für $r = r_+$ verschwindet nach (8.6.4) der letzte Term, während $g_{\theta\theta}(r_+) < 0$, $g_{\phi\phi}(r_+) < 0$, so daß $k^2(r_+) = 0$ nur durch $\beta = 0$, $\alpha = -g_{t\phi}(r_+)/g_{\phi\phi}(r_+)$ erreicht werden kann. Eine kurze Rechnung ergibt daher

$$k = \partial_t + \Omega_{\text{S.L.}}\partial_\phi \quad \text{mit} \quad \boxed{\Omega_{\text{S.L.}} := \frac{a}{2Mr_+}.} \tag{8.6.6}$$

Diese Rechnung zeigt auch, daß sich der Bereich erlaubter Winkelgeschwindigkeiten stationärer Beobachter, $\Omega_-(r,\theta) < \Omega < \Omega_+(r,\theta)$, bei Annäherung an den Horizont auf den einzigen Wert $\Omega_{\text{S.L.}}$ zusammenzieht, der zudem noch von θ unabhängig ist und daher als *Winkelgeschwindigkeit des Schwarzen Loches* interpretierbar ist. Innerhalb des Horizonts gibt es also auch kein zeitartiges Killingfeld und keine stationären Beobachter mehr *(Killinghorizont)*. Die Konstanz von $\Omega_{S.L.}$ bewirkt, daß k im ganzen Raum ein Killingfeld ist. Ferner ist es auf dem Horizont *zukunftsgerichtet*, weil z. B. die beiden stetigen, lichtartigen Vektorfelder $\partial_t + \Omega_\pm(r,\theta)\partial_\phi$ zwischen $k(r_+)$ und $\partial_t|_{r\to\infty}$ interpolieren und letzteres die Zeitorientierung des asymptotischen Inertialsystems hat.

Als zweites benötigen wir den Flächeninhalt der geschlossenen raumartigen Querschnitte des Horizonts. Um das Oberflächenelement zu finden, bilden wir (vgl. Abschnitt 7.8) die auf den Hyperflächen $r = \text{const.}$ induzierte Metrik, (8.6.1) mit $\mathrm{d}r = 0$, und gehen dann auf den Horizont $r = r_+$ über, wo die induzierte Metrik wie auf jeder lichtartigen Hyperfläche entartet ist:

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}s^2(r = \text{const.} \to r_+) &= \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho_+^2}\left(\mathrm{d}t - \frac{2Mr_+}{a}\mathrm{d}\phi\right)^2 + \rho_+^2\,\mathrm{d}\theta^2 \\ &= \rho_+^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \left(\frac{2Mr_+}{\rho_+}\right)^2\sin^2\theta\left(\mathrm{d}\phi - \frac{a}{2Mr_+}\mathrm{d}t\right)^2, \end{aligned}$$

wobei $\rho_+ := \rho(r_+)$. Daraus folgt für jeden Querschnitt mit der Gleichung $t = f(\phi,\theta)$ (wo f in ϕ die Periode 2π hat) das Oberflächenelement (vgl. (7.8.11))

$$\eta_2 = \rho_+ \, \mathrm{d}\theta \wedge \frac{2Mr_+}{\rho_+} \sin\theta \left[\mathrm{d}\phi - \frac{a}{2Mr_+} (f_{,\phi} \, \mathrm{d}\phi + f_{,\theta} \, \mathrm{d}\theta) \right]$$
$$= 2Mr_+ \sin\theta \left(1 - \frac{a}{2Mr_+} f_{,\theta} \right) \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi$$

und die *Oberfläche* $\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \eta_2$ zu

$$\boxed{A := 8\pi M r_+ = 8\pi \left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right).} \tag{8.6.7}$$

die völlig unabhängig vom gewählten Querschnitt und somit eine charakteristische Größe des Loches ist, die in der Zeit weder expandiert noch kontrahiert. Aus diesem Grund ist der Horizont hier auch die Grenze des Gebiets, das sogenannte gefangene Flächen (siehe nächster Abschnitt) enthält.

Aufgaben

1. Zeige, daß die flache Metrik $\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$ durch die Transformation

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \cos\phi, \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

in (8.6.1) mit $M = 0$ übergeht und für $t = \text{const.}$ die Flächen $r = \text{const.}$ bzw. $\theta = \text{const.}$ konfokale Systeme abgeplatteter Drehellipsoide bzw. einschaliger Drehhyperboloide bilden. Diskutiere die Koordinatensingularitäten, insbesondere jene bei $r = 0$, $\theta = \pi/2$.

2. Berechne den Riemanntensor zu (8.6.1), zeige $R_{ik} = 0$, sowie $R_{ijkm} = 0$ für $M = 0$, und untersuche die Echtheit der Singularitäten bei $(r = 0, \theta = \pi/2)$ und bei $r = r_+$ im Fall $|a| \leq M$ (Langwierig!)
Lösung: In der Bezeichnungsweise von Aufgabe 5 zu Abschnitt 7.6. bezogen auf die durch (8.6.1) nahegelegte orthonormale Kobasis $\omega^0, \omega^3, \omega^1, \omega^2$ ist das Ergebnis sogar für die Kerr-Newman-Lösung kaum komplizierter als jenes für die SSM:

$$R^{(\mu)}{}_{(\nu)} = \mathrm{diag}\,(-2I, I, I), \qquad R^{(\mu)}{}_{(\bar{\nu})} = \mathrm{diag}\,(K, 0, 0), \qquad \text{wobei}$$

$$I := \left(M - \frac{\kappa e^2}{4(r + ia\cos\theta)} \right) (r - ia\cos\theta)^{-3}$$

$$K := \frac{\kappa e^2}{4} |r - ia\cos\theta|^{-4}.$$

Daraus sind alle Krümmungskomponenten zu entnehmen, insbesondere das Verschwinden des Ricci-Tensors für $e = 0$.

3. Berechne die Rotverschiebung bei Experimenten mit statischen Beobachtern.

4. Entscheide die Raum- oder Zeitartigkeit der Flächen $r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ für $|a| > M$ und $|a| \leq M$. (*Hinweis:* Verifiziere und benutze (8.6.4)).

5. Zeige, daß das durch (8.6.6) definierte Killingfeld unmittelbar außerhalb des Horizonts zeitartig ist, falls $M > |a|$, hingegen raumartig für $M = |a|$. (Dieses unstetige Verhalten wird ausgeglättet, wenn die volle Familie der erwähnten Kerr-Newman-Metriken herangezogen wird.)

8.7 Allgemeines über Kollaps und Schwarze Löcher

Im sphärisch-symmetrischen Fall konnten wir aufgrund der expliziten Kenntnis der Außenraummetrik den Eintritt des katastrophalen Kollapses bis zur Singularität allgemein (das heißt bei beliebigen Druckeffekten) vorhersagen, wenn nur ein gewisses Kollapsstadium erreicht war. Man kann dieses Stadium nach R. Penrose aber unabhängig von Symmetrieannahmen durch die Existenz von sogenannten *gefangenen Flächen* charakterisieren. Zur Erläuterung der Idee gehen wir zunächst wieder aufs Kruskal-Diagramm zurück. Aus der Form der Hyperflächen $r = \text{const.}$ (Abbildung 8.5, 8.8) und der radialen Nullgeodätischen (Abbildung 8.9) in der Kruskal-Mannigfaltigkeit entnehmen wir folgende Tatsache (man beachte, daß Punkte (u, v) des Diagramms eigentlich Kugeln der Oberfläche $4\pi r^2(u, v)$, und „Lichtkegel" $u \mp v = u_0 \mp v_0$ des Diagramms die Zeitentwicklung aus/einlaufender sphärischer Lichtwellenfronten mit der Anfangslage (u_0, v_0) repräsentieren): Wenn (u_0, v_0) in der katastrophalen Region II liegt, hat die zugehörige (Kugel-) Fläche F_0 die Eigenschaft, daß nicht nur die einlaufende, sondern auch die auslaufende Lichtwellenfront mit F_0 als Anfangslage in Zukunft flächenmäßig *abnimmt*. Vergißt man in dieser Charakterisierung von F_0 die sphärische Symmetrie und behält nur ihre Topologie (und Raumartigkeit), erhält man eine Definition gefangener Flächen, die einerseits genügend allgemein ist und andererseits bereits zu beweisen gestattet, daß der Kollaps nun notwendigerweise bis zu einer Raumzeit-Singularität fortschreiten muß. In dieses Theorem gehen neben der uneingeschränkten Gültigkeit der Einsteinschen Theorie (metrische Beschreibung der Gravitation, $G_{ik} = -\kappa T_{ik}$) im übrigen nur einige allgemeine, plausible Annahmen rein qualitativer Natur ein; es wird aber über die detaillierte Natur der Singularität nichts ausgesagt. Die uns bekannte Singularität der Kruskal-Mannigfaltigkeit bei $r = 0$ ist also zwar im Detail, aber nicht in ihrer Existenz durch die hohe Symmetrie bedingt. Beim Kollaps isolierter Systeme ergibt sich dabei die Alternative, daß die entstandene Singularität im asymptotischen Bereich beobachtbar ist (nackte Singularität) oder durch einen Ereignishorizont abgeschirmt bleibt (schwarze Löcher). Solange die Außenraummetrik noch dynamisch ist, entweicht Gravitationsstrahlung

ins Unendliche; da der Energievorrat etwa durch die Gesamtmasse vor Kollapsbeginn begrenzt ist, sollte ein stationärer Endzustand erreicht werden. (Details dazu, etwa Zeitskalen, sind noch wenig bekannt, wenn man von Störungsrechnungen um stationäre Endzustände herum absieht.)

Überraschenderweise stellte sich 1967/68 heraus, daß das Gravitationsfeld *statischer* schwarzer Löcher auch ohne weitere Symmetrieannahmen bereits durch eine SSM gegeben ist, bzw. durch die Reissner-Metrik (8.4.30), wenn im Außenraum noch mögliche elektromagnetische Felder in Betracht gezogen werden. (Von anderen langreichweitigen Feldern nichtklassischer Art, die in der Teilchenphysik auftreten, sei hier abgesehen.) Es ergab sich die Vermutung, daß für *stationäre* Schwarze Löcher im Außenraum nur eine Kerr-Newman-Geometrie in Frage kommt; dies wurde 1975 für den Fall ohne elektromagnetisches Feld auch bewiesen, während im elektromagnetischen Fall der Beweis erst 1983 (P. Mazur, J. Phys. **A15**, 3173) gelang. Diese Tatsache wird gewöhnlich als „Haarlosigkeit" schwarzer Löcher bezeichnet.

Das allgemeine stationäre Schwarze Loch wird daher durch nur drei Parameter – Masse, Drehimpuls, elektrische Ladung – bestimmt. Die Erklärung dafür, die durch Störungsrechnung um den stationären Endzustand des Kollapses erhärtet wurde, ist, daß alle anderen Charakteristika der ursprünglichen Massenverteilung – etwa gravische, elektrische und magnetische Multipolmomente – während der dynamischen Phase des Kollapses abgestrahlt werden. Für die drei genannten Parameter ist dies aufgrund der Erhaltungssätze nicht möglich.

Schwarze Löcher erscheinen damit als eine sehr eingeschränkte Menge für mögliche Endzustände des katastrophal verlaufenden Gravitationskollapses, und über die erwähnten Störungsrechnungen hinaus hat man noch wenige verläßliche Argumente, die zeigen würden, daß Schwarze Löcher die einzig möglichen Endzustände sind. Die Alternative, das Zustandekommen von nackten zeitartigen Singularitäten (ohne Horizont gegenüber einem asymptotischen Bereich) wäre allerdings für eine Theorie, die Vorhersagbarkeit anstrebt, äußerst peinlich. Die tatsächliche Form der physikalischen Gesetze nahe einer Singularität der klassischen Theorie ist nämlich völlig unbekannt, und dadurch ist das Geschehen in Gebieten, deren kausale Vergangenheit eine Singularität enthält, zunächst völlig unvorhersagbar. Bei zeitartigen Singularitäten ist es aber – im Gegensatz zur Situation beim Urknall oder bei weißen Löchern, die raumartige, vergangene Singularitäten darstellen – keinem Beobachter in der kausalen Zukunft der Singularität möglich, als Provisorium (bis zum Verständnis der Singularitäten) zwischen sich und die Singularität eine raumartige Hyperfläche zu legen, auf der er reguläre Anfangsbedingungen als „experimentell" gegeben annimmt, so daß das Geschehen von hier an wohldeterminiert und vor weiteren Überraschungen sicher wäre – es sei denn, die Singularität verginge wieder. Entsteht eine solche Singularität beim Kollaps, wobei Außenraumbeobachter durch keinerlei Horizont abgeschirmt sind, bricht die Vorhersagbarkeit für den Außenraum zusammen. Die (geeignet präzisierte) Hypothese, daß

vernünftige Anfangsbedingungen nie zu nackten Singularitäten führen, ist als „Hypothese der kosmischen Zensur" (cosmic censorship) bekannt. Unbekannt ist dagegen, ob oder in welchem Sinn sie in der ART erfüllt ist oder nicht – eines der großen ungelösten Probleme der Theorie.

Wir wollen uns im folgenden weiter mit dem stationären Endzustand des Kollapses beschäftigen, von dem wir akzeptieren, daß das Außenraumfeld stets durch die Kerr-Metrik gegeben ist.

Wegen weiterer Details möge der Leser Hawking & Ellis (1973) und die einschlägigen Überblicksartikel in folgenden Werken zurate ziehen: DeWitt & Wheeler (1968); Hawking & Ellis (1973); DeWitt & DeWitt (1973); Ruffini (1977); Esposito & Witten (1977); Lebovitz (1978); Hawking & Israel (1979); Perlmutter & Scott (1979); Held (1980); Ruffini (1982), Janis & Porter (1992).

8.8 Penrose-Prozesse und Oberflächensatz

Die Bewegung freier Teilchen in der Kerr-Metrik zeigt viele interessante Eigenschaften. So sind etwa stabile Kreisbahnen mit sehr großer Bindungsenergie möglich. Während im Fall der SSM die Bindungsenergie auf einer stabilen Kreisbahn ca. 5.5% erreicht, ist im Grenzfall der *extremen Kerr-Metrik* ($|a| \to M$) eine Bindungsenergie von 42% der Ruhmasse möglich (für Teilchen, die auf einer äquatorialen Bahn im Drehsinn der Kerr-Metrik rotieren; siehe Aufgabe 1). Diese große Bindungsenergie, die gegebenenfalls in Form von Gravitationswellen ausgesendet werden könnte, wurde versuchsweise zur Deutung der Weberschen Experimente benutzt.

Wie B. Carter 1968 zeigte[23], lassen sich die Geodätengleichungen in der Kerr-Metrik (sowie die Bewegungsgleichungen geladener Teilchen in der Kerr-Newman-Metrik) vollständig integrieren.

1969 wies R. Penrose auf eine interessante Eigenschaft der Ergosphäre hin, die wir kurz beschreiben wollen. Nach Aufgabe 2 von Abschnitt 2.9 ist der Ausdruck $\xi_i u^i$ längs Geodäten konstant, wenn u^i der Tangentenvektor und ξ_i ein Killingfeld ist. Für $\xi = \partial_t$ in der Kerr-Metrik entspricht $F = mg(\partial_t, u)$ dem Energieintegral, doch ist zu beachten, daß ∂_t nur außerhalb der Ergosphäre zeitartig ist. Da u für physikalische Teilchen stets nicht-raumartig und zukunftsgerichtet ist, folgt $F > 0$ für Teilchen, die je ins Gebiet außerhalb der Ergosphäre gelangen. Das Produkt zweier zeitartiger, zukunftsgerichteter Vierervektoren ist nämlich stets positiv; ist aber einer der Faktoren raumartig, muß dies nicht mehr der Fall sein. Für Teilchen, die in der Ergosphäre freigesetzt werden, braucht $F > 0$ also nicht mehr zu gelten! Wenn nun ein Teilchen I von außen in die Ergosphäre fällt, gilt $F_I = g(\partial_t, m_I u_I) > 0$. Angenommen, es erleidet dort einen Zerfall, dann gilt für die Bruchstücke II, III nach Verlassen der (kleinen) Wechselwirkungsregion die lokale Energie- Impulserhaltung $m_I u_I = m_{II} u_{II} + m_{III} u_{III}$, also auch $F_I = F_{II} + F_{III}$. Da Teilchen II und

[23] B. Carter, loc. cit.

III erst in der Ergosphäre freigesetzt wurden, kann z. B. $F_{III} < 0$ und damit $F_{II} > F_I > 0$ werden. Es ist dabei kinematisch möglich[24], daß Teilchen II die Ergosphäre verläßt und wieder in den Außenraum gelangt. Die Ergosphäre kann daher als Mechanismus zur Beschleunigung von Teilchen dienen. Physikalisch ist klar (wenn auch in der Probeteilchennäherung nicht mathematisch manifest), daß die dazu nötige Energie der Rotationsenergie des schwarzen Loches entnommen wird, indem das Loch Teilchen III mit $F_{III} < 0$ absorbiert. Die Möglichkeit dieses Prozesses[25] hat zu dem Namen Ergosphäre geführt.

Ein wellentheoretisches Analogon zu diesem *Penrose-Prozeß* existiert ebenfalls: unter geeigneten Bedingungen werden an der Kerr-Metrik gestreute Wellen verstärkt *(Superradianz)*.[26]

Einerseits kann also ein schwarzes Loch Teilchen mit $F > 0$ einfangen und dabei Masse und Drehimpuls erhöhen. Wir werden sehen, daß diese Steigerung bis zur extremen Kerr-Metrik ($|a| = M$) führen, eine nackte Singularität ($|a| > M$) aber auf diesem Weg nicht entstehen kann – vgl. die Cosmic Censorship Hypothese! Andererseits kann durch Penrose-Prozesse die Masse erniedrigt werden – aber auch hier ergibt sich eine untere Grenze, die irreduzible Masse des Loches. Zur Herleitung betrachten wir den am Horizont lichtartigen Killingvektor $k = \partial_t + \Omega_{\mathrm{S.L.}}\partial_\phi$, Gl. (8.6.7), und die damit verbundene Erhaltungsgröße $mk_i u^i = F - \Omega_{\mathrm{S.L.}}\ell$, wo $\ell := -g(\partial_\phi, mu)$ die erhaltene Drehimpulsprojektion des Teilchens auf die Drehachse ist. Während nun, wie oben bemerkt, über das Vorzeichen von F innerhalb der Ergosphäre nichts ausgesagt werden kann, gilt jedoch $F - \Omega_{S.L.}\ell > 0$ für alle freien Teilchen, die je den Horizont erreichen. Das Produkt eines zeit- und eines lichtartigen Vektors – beide zukunftsgerichtet – ist nämlich stets positiv und strebt nur gegen Null, wenn der zeitartige gegen den lichtartigen Vektor strebt. $g(k, u)$ verschwindet also nur für masselose Teilchen mit u^r, $u^\theta \to 0$, $u^\phi/u^t \to \Omega_{S.L.}$, also mit Umkehrpunkt am Horizont. Teilchen mit $F - \Omega_{S.L.}\ell < 0$ werden vom Horizont abgestoßen. Wenn nun ein Teilchen vom Loch absorbiert wird, bewirkt es für das Loch die Massen- und Drehimpulsänderungen $\mathrm{d}M = F$, $\mathrm{d}J = \ell$ (die wegen der Probeteilchennäherung infinitesimal anzusetzen sind), wobei aber $\mathrm{d}M - \Omega_{S.L.}\mathrm{d}J > 0$. Diese Differentialform – und interessanterweise auch ihr Analogon im geladenen Fall, wo 3 Variable M, J, e auftreten! – hat einen integrierenden Faktor: aus (8.6.7) folgert man leicht

$$\mathrm{d}\frac{A}{8\pi} \equiv \frac{2Mr_+}{\sqrt{M^2 - a^2}}\,(\mathrm{d}M - \Omega_{S.L.}\,\mathrm{d}J): \tag{8.8.1}$$

[24] R. Penrose, Rivista Nuovo Cim., Serie I, 1, Num. Spec. 252 (1969). R. Penrose, M. Floyd, Nature **229**, 177 (1971); Ruffini & Wheeler, Relativistic Cosmology and Space Platforms, in Moore & Hardy (1970).

[25] Mögliche astrophysikalische Anwendungen diskutieren etwa M. Kafatos, Astrophys. J. **236**, 99 (1980); D. Leiter, Astron. & Astrophys. **89**, 370 (1980).

[26] Siehe etwa W. Press, S. Teukolsky, Nature **238**, 211 (1972); J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7**, 949 (1973).

bei allen derartigen Einfangprozessen kann also die Oberfläche des Horizonts nur wachsen! Analoges konnte auch für den Einfang geladener, spinnender Probeteilchen gezeigt werden, für die (4.1.13) erfüllt ist[27]: der Kehrwert des integrierenden Faktors ist der Betrag der Beschleunigung von knapp am Horizont befindlichen stationären Beobachtern mit $\Omega = \Omega_{S.L.}$ (siehe Aufgabe 3).

Tatsächlich gilt eine weitreichende Verallgemeinerung dieser Bemerkung, nämlich der *Oberflächensatz* von S. Hawking für nicht notwendig stationäre Situationen mit eventuell mehreren schwarzen Löchern: Schwarze Löcher können nur entstehen oder verschmelzen, nicht vergehen oder sich verzweigen, und ihre Oberflächen, bzw. bei Verschmelzungen deren Summe, können nur anwachsen. Die genauen Voraussetzungen[28] sind dabei wieder allgemeiner, qualitativer Natur; wichtig zu erwähnen ist allerdings eine Version der Kosmischen Zensur, wie sie in obiger Herleitung von $\mathrm{d}A > 0$ nicht eingeht.

Beginnend mit Anfangswerten M_0, J_0 können wir also im M, J-Raum, dem *Zustandsraum* des Loches, nur Stellen mit $A(M, J) > A(M_0, J_0) =: A_0$ erreichen. Man rechnet leicht nach (siehe Aufgabe 4), daß dieses Gebiet die untere Grenzmasse M_{irred} hat, wobei $J = 0$ und

$$2M_{\text{irred}}^2 = \frac{1}{8\pi} A\,(M_{\text{irred}}, 0) = \frac{A_0}{8\pi} = M_0^2 + \sqrt{M_0^4 - J_0^2}; \tag{8.8.2}$$

ferner hat es mit dem Gebiet $|J| > M^2$ nackter Kerr- Singularitäten nur die zwei Randpunkte mit $M^2 = 2M_{\text{irred}}^2$ gemeinsam (Abbildung 8.18).

Die Energieextraktionsprozesse vermindern also auch den Drehimpuls, und zwar so lange, bis eine SSM der Masse M_{irred} vorliegt, die Ergosphäre also verschwunden ist. Umgekehrt bewirkt die Vermehrung des Drehimpulses auch ein Mindestmaß an Energieerhöhung.

Die Anwendung des allgemeinen Oberflächensatzes befreit uns bei diesen Überlegungen von der Beschränkung auf Einfangprozesse mit freien Probeteilchen (vorausgesetzt, der Ausgangspunkt hat $M \neq |a|$, vgl. (8.8.1)) und gibt uns eine erste physikalische Deutung von A_0 ($= 16\pi M_{\text{irred}}^2$). Er gestattet aber noch viel weitergehende Anwendungen, etwa die Bestimmung oberer Schranken für die Gravitationsenergie, die beim Kollidieren und Verschmelzen zweier Löcher zu einem einzigen abgestrahlt wird (Aufgabe 5). Lediglich die Frage, ob man bei *beliebigen* Prozessen nie ins Gebiet nackter Singularitäten gelangt, bleibt durch ihn unbeantwortet, weil, wie erwähnt, die kosmische Zensur in seine Voraussetzungen eingeht.

Wann ist ein Einfangprozeß reversibel? Zunächst ist zu beachten, daß sich Reversibilität wegen der „Haarlosigkeit" nur auf die Wiederherstellung der ursprünglichen Werte M_0, J_0 beziehen kann – andere Charakteristika besitzt ein neutrales Loch nicht. (Der Einfachheit halber betrachten wir auch weiterhin den ungeladenen Fall, für den geladenen gelten aber analoge Resultate.) So

[27] T. Needham, Phys. Rev. **D22**, 791 (1980).

[28] Siehe dazu Hawking & Ellis (1973) oder Hawkings Artikel in DeWitt & DeWitt (1973).

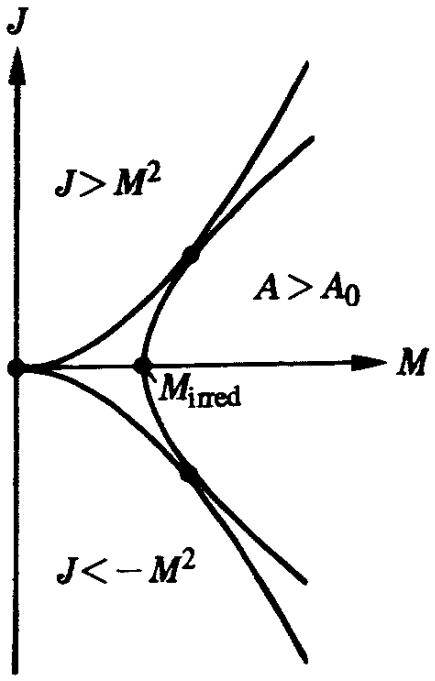

Abbildung 8.18: Die Gebiete $A > A_0$ und $|J| > M^2$.

ist etwa die Baryonenzahl des hineinfallenden Objekts für den Außenraum unwiederbringlich verloren wie alle Quantenzahlen, die zu kurzreichweitigen Feldern gehören, aber auch gravische (und elektromagnetische) Multipolmomente: dies, so raffiniert auch alle Wiedergewinnungsversuche ersonnen sein mögen. Um nun die Änderungen $\mathrm{d}M = F$, $\mathrm{d}J = \ell$ zu kompensieren, ist der Einfang eines Teilchens mit $F' = -F$, $\ell' = -\ell$ erforderlich (für $F > 0$ à la Penrose), aber auch für dieses Teilchen muß $F' - \Omega_{\mathrm{S.L.}}\ell' > 0$ gelten, was zusammen mit $F - \Omega_{S.L.}\ell > 0$ nur näherungsweise geht, indem beide Größen gegen 0 streben. Das bedeutet: reversible Einfangprozesse sind idealisierte Grenzfälle, die durch die Bedingung $\mathrm{d}A = 0$ charakterisiert sind. Auch dieses Resultat gilt allgemein, nicht nur für den Einfang von Probeteilchen.

Aufgaben

1. Finde ein effektives Potential für die geodätische Bewegung in der Äquatorebene $\theta = \pi/2$ der Kerr-Metrik. Zeige die Existenz von Nullgeodätischen, die die Singularität erreichen, sowohl in Zukunfts- wie in Vergangenheitsrichtung. (Vgl. (4.3.9)).
   Resultat:

$$\dot{r}^2 + V(r) = F^2 - K, \tag{8.8.3}$$

   wobei

$$V(r) = -\frac{2MK}{r} + \frac{l^2 + a^2(K - F^2)}{r^2} - \frac{2M}{r^3}(l - Fa)^2. \tag{8.8.4}$$

Das Potential unterscheidet sich daher nur in den Konstanten von demjenigen in der Schwarzschild-Metrik, hängt aber von F ab .

2. Berechne den Radius und die Bindungsenergie der innersten stabilen Kreisbahn in der Kerr-Metrik als Funktion von a.
Anleitung: Das Potential (8.8.4) hat für $K = 1$ in

$$r = \frac{1}{2M}\left\{l^2 + a^2(1 - F^2) \pm \sqrt{[l^2 + a^2(l - F^2)]^2 - 12M^2(l - aF)^2}\right\} \tag{8.8.5}$$

ein Minimum bzw. Maximum (siehe Abbildung 4.3). Die innerste stabile Kreisbahn ergibt sich, wenn Minimum und Maximum zu einem Wendepunkt zusammenfallen, so daß die Wurzel in (8.8.5) verschwindet. Elimination von l, F mittels (8.8.3) (wo $\dot{r} = 0$) und (8.8.5) führt dann auf

$$r^4 - 12Mr^3 + 6r^2(6M^2 - a^2) - 28a^2Mr + 9a^4 = 0. \tag{8.8.6}$$

was zur qualitativen Diskussion vorteilhafter nach a aufgelöst wird:

$$\left(\frac{a}{M}\right)^2 = \frac{1}{9}\frac{r}{M}\left[14 + 3\frac{r}{M} - 8\sqrt{3\frac{r}{M} - 2}\right]. \tag{8.8.7}$$

(Das andere Wurzelvorzeichen bewirkt stets $a^2 > M^2$.)

Die Gesamtenergie eines Teilchens (Masse m), das sich auf der Kreisbahn bewegt, folgt aus der Rechnung zu

$$E = mF = m\sqrt{1 - \frac{2M}{3r}}. \tag{8.8.8}$$

Zeige, daß die Bahnen mit $6M \leq r \leq 9M$ für Teilchen, die entgegen dem Drehsinn der Kerr-Metrik rotieren, möglich sind, diejenigen mit $M \leq r \leq 6M$ für mitrotierende Teilchen. In Abbildung 8.19 sind die Relationen (8.8.7, 8) graphisch dargestellt.

3. Zeige, daß das Vektorfeld k, (8.6.6), nahe dem Horizont in der Ergosphäre zeitartig ist, also dort stationäre, mit dem Loch starr mitrotierende Beobachter $t = \tau$, $\phi = \Omega_{\mathrm{S.L.}}\tau$, $r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ möglich sind. Bestimme den Betrag $\sqrt{-b^2}$ der bezüglich τ gemessenen Viererbeschleunigung $b = \mathrm{D}u/\mathrm{D}\tau$ dieser Beobachter im Limes $r \to r_+$ und zeige, daß er mit dem Reziprokwert

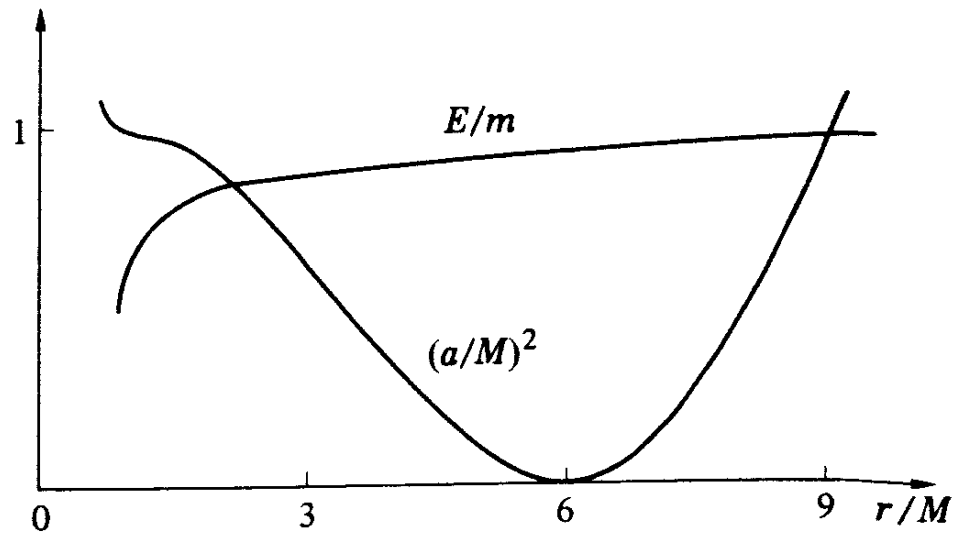

Abbildung 8.19: Radius und Bindungsenergie der innersten stabilen Kreisbahn für die geodätische Bewegung in der Kerr-Metrik.

des integrierenden Faktors in (8.8.1) übereinstimmt, also insbesondere von θ *unabhängig* ist.
Anleitung: Es ist $\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial\tau}} \frac{k}{\sqrt{k^2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2}} \mathrm{D}_k k$. Bei der Auswertung kann man durch Benutzung der Killinggleichung (2.9.5) für k die Berechnung von Christoffelsymbolen sparen: $k_{i;l}k^l = -k_{l;i}k^l = -\frac{1}{2}(k^2)_{,i}$. Zur bequemeren Ausführung des Grenzübergangs $r \to r_+$ beachte man, daß aus den Umformungen bei der Herleitung von (8.6.6) folgt:

$$k^2 = -\frac{(r_+ - r_-)\sin^2\theta}{g_{\phi\phi}(r_+)}(r - r_+) + O((r - r_+)^2).$$

4. Zeige, daß in Abbildung 8.18 die Kurve $|J| = M^2$ die Einhüllende aller Kurven $A(M, J) = \text{const.}$ ist und M_{irred} für $J = 0$ erreicht wird.

5. Mittels des Oberflächensatzes bestimme man eine obere Schranke für die abgestrahlte Energie, wenn zwei Schwarzschild-Löcher kollidieren und zu einem Schwarzschild-Loch verschmelzen.

8.9 „Thermodynamik" schwarzer Löcher

An den letzten Ausführungen fallen einige offenkundige Analogien zur Gleichgewichtsthermodynamik auf, die wir nachstehend zusammenstellen und dann noch weiterführen wollen. Die angegebene Form des ersten Hauptsatzes enthält einen Term, der sich auf gleichförmig rotierende Systeme bezieht und für den wir auf das Lehrbuch Landau-Lifschitz, Bd. V verweisen.

Tabelle 8.1: Thermodynamische Analogien.

Thermodynamisches System im Gleichgewicht	*Stationäres schwarzes Loch*
Makroskopische Variable = thermodyn. Zustandsvariable	Außenraum-Kenngrößen
(U, V, S, ... extensiv: P, ... intensiv)	(M, J, A, ...: Ω, ...)
$T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + P\,\mathrm{d}V - \Omega\,\mathrm{d}J$	(8.8.1)
$S = S(U, V)$, enthält die vollständige thermodynamische Information über das System	(8.7.6)
$\mathrm{d}S \geq 0$, $\mathrm{d}_{\mathrm{rev}}S = 0$	$\mathrm{d}A \geq 0$, $\mathrm{d}_{\mathrm{rev}}A = 0$
Mikrozustände	Anfangszustände, die nach Kollaps zu Löchern gleicher Außenraummetrik führen
3. Hauptsatz	$J = M^2$ physikalisch unerreichbarer Limes

Daß zwischen dem 3. Hauptsatz und der Unzerstörbarkeit des Horizonts eine Entsprechung besteht, sieht man daran, daß $1/T$ der integrierende Faktor im 1. Hauptsatz und $2Mr_+(M^2 - a^2)^{-1/2}$ der integrierende Faktor in (8.8.1) ist: $T = 0$ und $M = |a| = |J|/M$ entsprechen einander.

Diese Analogie läßt sich formal noch viel weiter ausbauen[29], als wir dies hier mit Hilfe von Einfangprozessen illustrieren konnten. So entsteht die Frage: in welchem physikalischen Sinn ist A – besser $f \cdot A/8\pi$, wo f ein geeigneter Proportionalitätsfaktor ist – als Entropie des schwarzen Loches anzusehen und $2fMr_+(M^2 - a^2)^{-1/2}$ als seine reziproke Temperatur? Mit anderen Worten: kann A so wie die übliche Entropie thermodynamischer Systeme in der Boltzmannschen Weise mikroskopisch – informationstheoretisch gedeutet werden, und ist ein schwarzes Loch in irgendeinem Sinn ähnlich einem warmen, i. e. strahlenden Körper? Schwarze Löcher sind doch durch die Eigenschaft charak-

[29] B. Carter, in DeWitt & DeWitt (1973).

terisiert, daß aus dem Innenraum nichts durch den Horizont an die Außenwelt dringt danach müßte ihre Temperatur verschwinden und ein Gleichgewicht mit Systemen endlicher Temperatur unmöglich sein!

Ein Indiz für die Klärung dieser Frage ist, daß in der klassischen statistischen Physik die Entropie S nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, A jedoch einen durch $M = 0$, $J = 0$ (flacher Raum) gegebenen natürlichen Nullpunkt hat. Erst die Quantentheorie liefert bekanntlich den Absolutwert der Entropie – also wird die Lösung des Problems Quanteneffekte berücksichtigen müssen Dies zeigt sich auch schon bei der folgenden Dimensionsbetrachtung zur Bestimmung des Faktors f (k_B ist die Boltzmannkonstante) und der Temperatur:

$$\frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2Mr_+}\,\mathrm{d}\frac{A}{8\pi} = \mathrm{d}M - \Omega_{S.L.}\mathrm{d}J = \frac{G}{c^4} \times \text{Energie} = \frac{G}{c^4}k_B T \cdot \mathrm{d}\frac{S}{k_B}. \tag{8.9.1}$$

S/k_B ist dimensionslos, also sollte fA/k_B dimensionslos sein, k_B/f = Längenquadrat. Aus den Naturkonstanten G, c der klassischen Gravitationstheorie läßt sich keine Länge bilden. Nimmt man aber das Wirkungsquantum $\hbar$ hinzu, erhält man die *Planck-Länge*

$$\boxed{l_P := \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-33}\,\mathrm{cm}} \tag{8.9.2}$$

als fundamentale Länge für Quanteneffekte der Gravitation. (Wegen einer Deutung siehe Aufgabe). Die (noch immer formale) Entropie des schwarzen Loches ist dann bis auf einen numerischen Faktor

$$S_{\mathrm{S.L.}} \sim k_B A l_P^{-2} = \frac{k_B c^3}{G\hbar} A, \tag{8.9.3}$$

also insbesondere für ein sphärisch symmetrisches Loch[30] ($J = 0$):

$$S_{\mathrm{SSL}} \sim \frac{k_B c^3}{G\hbar} M^2 = k_B \left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_P}\right)^2 \approx k_B \cdot 10^{76} \left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\odot}\right)^2. \tag{8.9.4}$$

bei

$$\boxed{\mathcal{M}_P := \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{-5}\,\mathrm{g}} \tag{8.9.5}$$

die *Planck-Masse* ist (das ist jene Masse, für die (Comptonwellenlänge = Schwarzschildradius). Die entsprechende Temperatur ist bis auf einen Zahlfaktor

[30] Für $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\odot$ ist dies das 10^{20}-fache der thermischen Entropie der Sonne!

$$T_{S.L.} \sim \frac{c^4}{k_B G} l_P^2 \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2Mr_+}, \tag{8.9.6}$$

also für ein sphärisches Loch

$$T_{\mathrm{SSL}} \sim \frac{\hbar c}{k_B} \cdot \frac{1}{M} = \frac{1}{k_B} \left(\frac{\mathcal{M}_P}{\mathcal{M}}\right)^2 \mathcal{M}c^2 \approx 10^{-6} \left(\frac{\mathcal{M}_\odot}{\mathcal{M}}\right) \text{Kelvin}. \tag{8.9.7}$$

Es gibt eine Reihe von Gedankenexperimenten, die zeigen, daß die formal eingeführten Größen $T_{S.L.}$, $S_{S.L.}$ thermodynamische Bedeutung haben. Als instruktives Beispiel greifen wir die Bekensteinsche Lösung eines von R. Geroch aufgestellten Paradoxons heraus[31]. Von einer weit von einem Loch (SSM der Einfachheit halber) entfernten Raumstation ($r = \text{const.} \to \infty$) werde ein mit schwarzer Strahlung der Temperatur T ($\gg T_{S.L.}$) gefüllter Kasten der Masse m an einem Seil langsam zum Horizont hinabgelassen; die Seilwinde treibe einen Generator, der eine Akkumulatorbatterie auflade. Die Energie des Kastens an der Stelle r ist (vgl. Aufgabe 1 zu Abschnitt 4.3) wegen der vorausgesetzten (unendlich) langsamen Bewegung $m\sqrt{1 - 2M/r}$, der Energiegewinn beim Herablassen bis zum Horizont daher m (wir setzen im folgenden wieder $c = 1$). Am Horizont wird der Kasten kurz so geöffnet, daß ein Teil der Strahlung (Ruhmasse δm) ins schwarze Loch entweicht. Danach wird der Kasten wieder aufgeseilt, wobei die Energie $m - \delta m$ aufzuwenden ist. Es verbleibt die Energie δm in der Batterie, das heißt, die thermische Energie δm wurde mit Wirkungsgrad $\eta = 1$ in elektrische (und daher auch mechanische) umgewandelt, im Widerspruch zu einer der Versionen des 2. Hauptsatzes. Bekensteins Auflösung beruht auf der Bemerkung, daß aufgrund der Quantentheorie des Strahlungsgases sinnvollerweise von einem Photonengas der Temperatur T nur gesprochen werden kann, wenn der Kasten zumindest eine Linearabmessung der Größenordnung $\lambda_{\max} \sim \frac{\hbar c}{k_B T}$ aufweist, wie sie im Wienschen Gesetz auftritt. Die Kastenmitte kommt dann aber an den Horizont nur bis auf eine Koordinatendistanz δr heran, die mit der Eigenlänge $\lambda_{\max}$ gemäß $\mathrm{d}s^2_{\mathrm{SSM}}$ durch

$$\int_{2M}^{2M+\delta r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \approx \lambda_{\max}$$

zusammenhängt und in niedrigster Näherung ($T \gg T_{S.L.}$, $\lambda_{\max} \ll M$) $\delta r \simeq \lambda^2_{\max}/8M$ beträgt. Die Energie des Kastens an dieser Stelle ist daher $m\sqrt{1 - 2M/(2M + \delta r)} \simeq m(\delta r/2M)^{1/2} \sim m T_{\mathrm{S.L.}}/T$ vor der Entleerung und $(m - \delta m) T_{\mathrm{S.L.}}/T$ danach. Daraus ergibt sich der thermische Wirkungsgrad $\eta \simeq 1 - T_{\mathrm{S.L.}}/T < 1$, gemäß welchem man durch Vergleich mit der Carnotschen

[31] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7**, 2333 (1973).

Formel dem schwarzen Loch die Funktion eines Reservoirs der Temperatur $T_{S.L.}$ zuordnen würde.

Historisch ist an diesem Gedankenexperiment bemerkenswert[32], daß es logisch unabhängig von Untersuchungen an der Kerr-Metrik zur Temperatur $T_{S.L.}$ der SSM führt, die dabei auch weniger formal auftritt als in den vorhergehenden Untersuchungen; dennoch wurde es erst nach den Untersuchungen an der Kerr-Metrik angestellt bzw. von diesen angeregt! Natürlich erklärt es nicht, warum die Temperatur $T_{S.L.}$ nicht auch anderweitig in Erscheinung treten soll.

Wie sieht es nun in obigem Experiment mit der Entropie-Version des zweiten Hauptsatzes aus? Da die Wärmemenge δm abgegeben wurde, tritt im äußeren System (Kasten + Generator/Motor + Batterie) ein Entropieverlust $\delta S = -\delta m/T$ auf. Dies kann mit dem 2. Hauptsatz nur in Einklang gebracht werden, indem man zum Gesamtsystem = (Schwarzes Loch + äußeres System) übergeht, ähnlich wie bei der Lösung des Paradoxons vom Maxwellschen Dämon, wo die Photonen zu berücksichtigen sind, die der Dämon benötigt, um seine Informationen zu erhalten[33]. In unserem Fall müßte also dem Loch eine Entropie zugeordnet werden, die bei unserem Experiment den Betrag $\delta S = -\delta m/T$ überkompensierend zunimmt. Für die formale Entropie $S_{S.L.}$ ist dies tatsächlich so: mit $\delta M = G\delta m$ erhalten wir

$$\delta S_{S.L.} = \frac{\delta m}{T_{S.L.}} = \frac{\delta m}{T} \cdot \frac{T}{T_{S.L.}} \gg |\delta S|.$$

Umgekehrt würden wir, die Temperatur $T_{S.L.}$ des Schwarzschild-Loches dem Carnot-Argument entnehmend und für das Loch eine Entropie $S_{S.L.}$ postulierend, aus $\delta S_{S.L.} = \delta m/T_{S.L.} = \delta M/(GT_{S.L.})$ durch Integration bis auf eine Konstante wieder (8.9.4) erhalten. Dabei liegt es nahe, die Konstante gleich 0 zu wählen, da für $M = 0$ der ganze Effekt verschwindet. (In obigen Näherungsrechnungen kann allerdings $M \to 0$ nicht vollzogen werden.)

Bekenstein ging noch viel weiter, indem er informationstheoretische Argumente für (8.9.3) gab: Entropie als Maß für die einem Außenraumbeobachter in später Zukunft zugängliche Information darüber, aus welchem Anfangszustand das Loch durch Kollaps entstand. Dabei wird $S_{S.L.}$ als eine Funktion von A vorausgesetzt und eine Differentialgleichung für diese Funktion aufgestellt, indem der Zuwachs von A bei einem Einfangprozeß mit aufgrund quantentheoretischer Heuristik minimalem Informationsverlust für den Außenraum berechnet wird. Wir empfehlen dem Leser Bekensteins klare, lesenswerte Abhandlung. Der sich dabei ergebende, uns noch fehlende Zahlfaktor in (8.9.3, 4) muß allerdings durch den im folgenden Abschnitt angegebenen ersetzt werden. Eine direkte quantenfeldtheoretische Berechnung der Entropie mit dem richtigen Zahlfaktor wurde später von Hawking[34] angegeben, hinter der jedoch im Grunde die heute noch

[32] P. C. Aichelburg, Lehrerfortbildungsvortrag Innsbruck, 28. September 1978.

[33] L. Brillouin (1956).

[34] Vgl. die Artikel von Hawking und DeWitt in Deser & Lévy (1979), Hawkingl & Israel (1979).

weitgehend ungeklärte Problematik der Quantentheorie des Gravitationsfeldes steht. Auch ist zu bemerken, daß obige Diskussion aufgrund des nachfolgend beschriebenen Hawking-Effekts zu modifizieren ist.[35]

Aufgabe

Zeige, daß die zur Auflösung einer Länge l_P nötigen Photonen ein Strahlungsfeld mit so großer Energiedichte bilden, daß die gemäß den Einsteinschen Feldgleichungen entstehende Raumkrümmung einem lokalen Krümmungsradius der Größenordnung l_P entspricht. Durch diese Veränderung der Geometrie entsteht also bei Messung von l_P eine Ungenauigkeit der gleichen Größenordnung. (Daß l_P eine für die Quantentheorie der Gravitation charakteristische Länge ist, ergibt sich, indem man die Wirkung (3.4.1) (eigentlich mit $G =$ (3.4.5) statt R) in das sogenannte Feynmansche Wegintegral (siehe z. B. Nash (1978)) einsetzt und roh abschätzt, innerhalb welcher Lineardimension danach eine Schwankung der Koeffizienten der flachen Metrik um die eigene Größenordnung eine merkliche Wahrscheinlichkeit erhält: vgl. J. A. Wheeler, Ann. Phys. (N. Y.) **2**, 604 (1957). l_P tritt auch bei einer Bohr-Rosenfeld-artigen Analyse der Beschränkung der Meßbarkeit im Bereich der Quantengravitation auf: vgl. B. S. DeWitt, in Witten (1962)).

8.10 Der Hawking-Effekt

1974 gelang es S. W. Hawking, die physikalische Bedeutung der formalen Temperatur (8.9.6, 7) zu klären. Er untersuchte das quantentheoretische Verhalten von „Testfeldern", die vom Gravitationsfeld eines zu einem schwarzen Loch kollabierenden Körpers beeinflußt werden. Er fand, daß das Loch Teilchen (Quanten des Testfelds) in den Außenraum emittiert, wobei im Falle der SSM die Emission in der stationären Spätphase der Strahlung eines schwarzen Körpers der Temperatur

$$\boxed{T_{\text{S.L.}} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B} \cdot \frac{1}{\mathcal{M}} \sim 10^{-6} \frac{\mathcal{M}_\odot}{\mathcal{M}} \text{ Kelvin}} \tag{8.10.1}$$

entspricht (Merkregel: $\lambda_{\max} \sim M$, wo $\lambda_{\max}$ die Wellenlänge des Gipfels der Planckverteilung ist). Daraus ergibt sich der korrekte numerische Faktor bei der Entropie: $S_{\text{S.L.}}/k_B = A/4l_P^2$, oder für die SSM

$$S_{\text{S.L.}} = k_B \cdot 4\pi \left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_P}\right)^2 . \tag{8.10.2}$$

[35] W. G. Unruh, R. M. Wald, Phys. Rev. **D25**, 942 (1982).

Mit der Existenz dieser Strahlung besteht nunmehr die Möglichkeit für das Gleichgewicht des Lochs mit einem Wärmebad der Temperatur $T_{S.L.}$. Zur Stabilität ist allerdings zu bemerken, daß $T_{S.L.}$ zu $\mathcal{M}$ verkehrt proportional ist, also während des Abstrahlungsvorgangs zunimmt, während $S_{S.L.}$ abnimmt, was erst durch die Entropie des entstehenden Strahlungsgases kompensiert wird. (Wir kommen noch darauf zu sprechen, weshalb der Oberflächensatz nicht verletzt wird.) Bei Abstrahlung in den freien Raum wirkt sich diese negative spezifische Wärme ($\partial\mathcal{M}/\partial T_{S.L.} < 0$) in einem schließlich explosionsartigen Zerstrahlen des Lochs aus, wie man folgendermaßen abschätzen kann. Die Energiedichte des Strahlungsgases ist nach Stefan-Boltzmann $\epsilon \sim \hbar\nu_{max}/\lambda^3_{max} \sim (k_B T)^4 \hbar^{-3} c^{-3}$ (Merkregel: 1 Strahlungsquant pro Wellenlängenkubus), die Energieflußdichte ist $c\epsilon$, und die relevante Fläche die Oberfläche $A \sim M^2$ des Horizonts. Damit ergibt sich die Bilanz

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}c^2}{\mathrm{d}t} \sim -c \cdot \frac{\hbar c/M}{M^3} \cdot M^2$$

ler

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathrm{d}t} \sim \frac{\hbar c^4}{G^2} \cdot \frac{\alpha}{\mathcal{M}^2},$$

wo α ein von den genaueren Details abhängiger numerischer Faktor ist. Durch Integration folgt eine Lebensdauer ($t_P = l_P/c =$ Planck-Zeit $= 10^{-44}$ sec)

$$\tau \sim \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathcal{M}(0)}{\mathcal{M}_P}\right)^3 t_P \sim 10^{66}\left(\frac{\mathcal{M}(0)}{\mathcal{M}_\odot}\right)^3 \text{ Jahre.} \tag{8.10.3}$$

bis $\mathcal{M}(0)$ auf 0 abgesunken ist, wobei $\mathrm{d}\mathcal{M}/\mathrm{d}t$ am Schluß gegen ∞ geht. Allerdings übertrifft (8.10.3) ab $\mathcal{M}(0) \gtrsim 10^{15}$ g das Hubble-Alter $H_0^{-1} \sim 10^{10}$ Jahre, so daß der Effekt für Löcher, die durch Kollaps normaler astrophysikalischer Objekte entstehen, derzeit nicht von Bedeutung ist. Anders verhält es sich für sogenannte „Mini-Löcher" der Masse $\simeq 10^{15}$ g, die möglicherweise während des Urknalls entstanden und für $\mathcal{M}(0) \sim 10^{15}$ g gegenwärtig zerstrahlen sollten. Aus den Daten über die γ- Strahlung kann man obere Schranken für die Dichte solcher Mini- Löcher in unserer Umgebung erhalten: ein typischer Wert ist etwa 1 Explosion pro Kubikparsec in 2 Jahren.

Bei schwarzen Löchern in einem Wärmebad einer Temperatur $> T_{S.L.}$ überwiegen hingegen die Absorptions- (Einfang-) Prozesse gegenüber der Emission. Dies ist z. B. für Löcher der Masse $\mathcal{M} > 10^{27}$ g der Fall, für die die 3K-kosmische Hintergrundstrahlung als Wärmebad fungiert; hierunter fallen alle durch katastrophalen Kollaps entstandenen Objekte ($\mathcal{M} >$ einige $\mathcal{M}_\odot$).

Bei der Strahlung von Kerr-Löchern ist die thermische Strahlung (die Temperatur (8.10.1) ist hier noch mit $2\sqrt{M^2 - a^2}/r_+$ zu multiplizieren) noch durch eine zweite Art von Abstrahlung modifiziert: der in Abschnitt 8.8 erwähnten Superradianz entspricht quantentheoretisch ein induzierter (oder stimulierter)

Emissionsvorgang, dem wiederum ein spontaner Emissionsvorgang entspricht. Diese Beiträge sind für kleine $T_{S.L.}$ wesentlich. (Es sei bemerkt, daß die bekannte Proportionalität der Wahrscheinlichkeiten von spontaner und induzierter Emission zunächst ein Ergebnis für Photonen mit Dirac-Teilchen als Quellen in niedrigster Ordnung Störungstheorie ist; daß die beiden Emissionsarten einander bedingen, gilt aber viel allgemeiner. Siehe R. Wald, Phys. Rev. **D13**, 3176 (1976); J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D15**, 2775 (1977)).

Die quantentheoretische Durchrechnung des Effekts[36], auf die wir in diesem Rahmen verzichten müssen, läßt folgende heuristische Deutung zu. Das Gravitationsfeld beeinflußt (durch seine Gezeitenkräfte - doch das wird durch die derzeitigen Rechnungen nicht explizit) die Vakuumschwankungen des betrachteten Testfelds. Während virtuelle Paare des freien Testfelds nur eine durch die Energie-Zeit-Unschärferelation beschränkte kleine Lebensdauer haben, können unter dem Einfluß des Gravitationsfeldes (wie auch unter dem Einfluß anderer ans Testfeld koppelnder äußerer Felder) Paare reell werden, wobei der Energiepreis auf verschiedene Weise bezahlt werden kann. Eine Möglichkeit dafür besteht in der Nichtstationarität des äußeren Felds, das dadurch Energie ins Testfeld pumpen kann. Beim Kollaps astrophysikalischer Objekte ist dieser Beitrag jedoch klein und in der stationären Endphase zu vernachlässigen. Eine andere Möglichkeit bietet sich bei solchen stationären äußeren Feldern, in denen der Wert der erhaltenen Teilchenenergie in gewissen Raumbereichen negativ sein kann. Hier können virtuelle Paare durch „Vakuumtunneln" reell werden. Bei schwarzen Löchern etwa kann ein Partner eines virtuellen Paares, das nahe dem Horizont entsteht, durch den Horizont tunneln und so in eine Region gelangen, in der Zustände negativer Energie (negativ gegenüber der asymptotischen Region) möglich sind. Dadurch kann der Energiepreis für die Paarerzeugung bezahlt werden, und der andere Partner kann, das effektive Potential der SSM mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit[37] überwindend, in die asymptotische Region entweichen. Der Fluß negativer Energie durch den Horizont vermindert dabei die Masse des Lochs. Da Beobachtern im Unendlichen die Information über die ins Loch fallenden Teilchen prinzipiell fehlt, ist der von ihnen beobachtete Zustand ein gemischter, zu beschreiben durch eine Dichtematrix, die durch Summation über die möglichen Zustände der unbeobachtbaren Teilchen entsteht. Diese Dichtematrix ist vollständig thermisch, mit der Temperatur (8.10.1); alle Teilchenkonfigurationen einer gegebenen Energie werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit emittiert. (Bei rotierenden Löchern tritt noch die erwähnte Modifikation hinzu; es sei aber bemerkt, daß auch zu

[36] Eine besonders einfache Darstellung gibt P. Hajicek, Acta Phys. Austriaca, Suppl. **XVIII**, 835 (1977). Im übrigen siehe die einschlägigen Artikel in Isham, Penrose & Sciama (1975), Esposito & Witten (1977), Hawking & Israel (1979) und die dort zitierte Originalliteratur, sowie Wald (1994).

[37] Da diese energie- und drehimpulsabhändge Wahrscheinlichkeit < 1 ist, erhält man im Unendlichen eigentlich nur ein gefiltertes, also nur approximativ thermisches Spektrum, entsprechend einem „grauen Körper".

dem spontanen „thermischen" Emissionsprozeß ein induzierter gehört, dessen Auslösung allerdings absurd hohe Energie und Zeitgenauigkeit verlangt. Siehe R. Wald, loc. cit.)

Bei den Rechnungen, die zu diesen Ergebnissen führen, wird die Rückwirkung des Testfeldes auf das äußere Gravitationsfeld vernachlässigt. In Analogie zur Behandlung von Molekülen in der Quantenmechanik nach der „adiabatischen" oder Born-Oppenheimer-Approximation kann man versuchen, die Rückwirkung nach einer „effektiven Feldgleichung" der Form $G_{ik} = -\kappa\langle T_{ik}\rangle$ zu berechnen, wo rechts ein geeigneter Erwartungswert des Energie-Impuls-Spannungstensors des Testfeldes steht, der im allgemeinen nicht nur reelle Erzeugungsprozesse, sondern auch andere, davon in nicht offensichtlicher Weise zu trennende Effekte der Vakuumpolarisation enthält. Die Berücksichtigung der Rückwirkung in dieser Form klärt die oben erwähnte Frage, wieso die Strahlung schwarzer Löcher nicht im Widerspruch zum Oberflächensatz steht: Zu den „plausiblen qualitativen Annahmen", unter denen dieser Satz gilt, gehört auch eine Positivitätsbedingung an T_{ik}, die aber bei der zur Auswertung von $\langle T_{ik}\rangle$ für quantisierte Testfelder erforderlichen Regularisierung verlorengeht. (Bezüglich einer Diskussion der beiden Grundprobleme der Quantentheorie des Testfeldes auf einem gekrümmten Hintergrund – der Mehrdeutigkeit der Definition von Teilchen- und Antiteilchenzuständen und der Regularisierung des zunächst divergenten Ausdrucks $\langle T_{ik}\rangle$ – sei auf die Überblicksartikel von Gibbons und Davies verwiesen[38].) In diesem Sinn ist wenigstens an zweidimensionalen Modellen gezeigt worden, daß bei der Strahlung schwarzer Löcher negative Energie über den Horizont strömt. Die Güte dieser adiabatischen Approximation kann eigentlich erst nach Konstruktion einer vollen Quantentheorie des Gravitationsfelds diskutiert werden, doch ist anzunehmen, daß sie für explosionsartig zerstrahlende Mini-Löcher schlecht, im anderen Extremfall gut ist.

Wie wird aber, da der Oberflächensatz nun nicht mehr gilt, der Entropiesatz aufrechterhalten? Wieder hat man zum Gesamtsystem, Schwarzes Loch + Strahlungsgas, überzugehen, wobei sich zeigen läßt, daß die Entropie der entstehenden Strahlung die Entropieabnahme des Loches überkompensiert.[39]

Die zahlreichen Ansätze und Spekulationen zur Quantentheorie des Gravitationsfeldes haben in den letzten Jahren durch die Quanteneffekte bei schwarzen Löchern eine starke Belebung erfahren, da hier erstmals Verbindungen zu einer interessanten, weitgehend verständlichen konkreten Situation hergestellt werden konnten. Wir verweisen auch hier auf die Überblicksartikel in Hawking-Israel (1979) und erwähnen nur noch den merkwürdigen historischen Zufall, daß gerade jene Problemkreise, die in der Theorie der schwarzen Löcher unmittelbar miteinander verquickt[40] sind – Raum-Zeitstruktur, Thermodynamik,

[38] In Hawking & Israel (1979) bzw. Held (1980); siehe auch L. Parker, in Deser & Levy (1979) und Perlmutter & Scott (1979).

[39] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D12**, 3077 (1975).

[40] Dies ist weiter diskutiert in de Sabbata & Zhang (1992).

Quanten(feld)theorie –, es auch waren, denen Einstein 1905 seine berühmten drei Arbeiten widmete und danach wohl einen Großteil seines Schaffens.

8.11 Die Suche nach Schwarzen Löchern

Seit etwa 1970 wurden zahlreiche Versuche unternommen, astrophysikalische Evidenz für schwarze Löcher zu finden. Dabei wurden drei Methoden zur Entdeckung schwarzer Löcher vorgeschlagen:

a) Einzelne schwarze Löcher im interstellaren Medium senden elektromagnetische Strahlung aus, wenn das umgebende Gas in das Loch hineinfällt und sich dabei aufheizt.

b) Wenn ein schwarzes Loch Teil eines Doppelsternsystems ist, dann zeigt der Hauptstern eine scheinbar unbegründete periodische Dopplerverschiebung, die auf einen unsichtbaren Begleiter schließen läßt. Falls aus der Dynamik des Doppelsternsystems auf eine Masse $M > 3M_\odot$ des Begleiters geschlossen werden muß, so kann es sich bei diesem Begleiter nicht um einen Weißen Zwerg oder Neutronenstern handeln.

c) Ist das schwarze Loch Teil eines engen Doppelsternsystems (bei dem der Abstand der beiden Sterne mit dem Radius des Hauptsterns vergleichbar ist), so strömt Materie vom Stern auf das schwarze Loch über. Diese Materie heizt sich dabei so stark auf, daß Röntgenstrahlen emittiert werden.

Während die ersten beiden der erwähnten Methoden bisher noch nicht zum Erfolg geführt haben, wurden Röntgenquellen mit den gesuchten Eigenschaften 1972 entdeckt, und im Laufe des Jahres 1973 wurde es immer wahrscheinlicher, daß mit *Cygnus X1* tatsächlich das erste schwarze Loch mit einer Masse von $\mathcal{M} \approx 14\mathcal{M}_\odot$, entdeckt war.

Bevor wir auf Details dieser Entdeckung eingehen, soll kurz die Begründung für das Versagen der ersten der erwähnten beiden Methoden gegeben werden Die detaillierte Analyse der von einem einzelnen schwarzen Loch zu erwartenden Strahlung zeigt nämlich, daß Intensität und Spektralcharakteristik derjenigen eines weißen Zwergsterns (genauer eines DC-Zwerges) so stark ähneln, daß eine Unterscheidung wahrscheinlich nicht möglich ist. Es könnte aber sein, daß es sich bei einigen bisher als weiße Zwerge klassifizierten Objekten tatsächlich um schwarze Löcher handelt.

Auch die Versuche, unsichtbare, aber schwere Partner von Doppelsternsystemen zu finden, haben trotz umfangreicher Listen[41] möglicher Kandidaten

[41] Eine Liste wurde von V. Trimble, K. S. Thorne, Astrophys. J. **156**, 1013 (1969) zusammengestellt. Siehe auch G. W. Gibbons, S. W. Hawking, Nature **232**, 465 (1971), R. Gott, Nature **234**, 342 (1971), A. G. W. Cameron, Nature **234**, (1971); A. M. Wolfe, G. R. Burbidge, Astrophys. J. **161**, 419 (1970), D. Lynden-Bell, Nature **223**, 690 (1969), A. A. Wyller, Astrophys. J. **160**, 443 (1970).

noch nicht zum Erfolg geführt. Als Beispiel für die Gründe der hier auftretenden Uneindeutigkeiten mag das beststudierte System dieser Art, ϵ Aurigae, dienen. ϵ Aurigae ist ein Doppelsternsystem, das periodische Verfinsterungen zeigt, wobei aber der zweite Stern des Systems optisch nicht entdeckt werden kann. Aus der Dynamik des Systems (also aus Periodendauer und der Dopplergeschwindigkeit des sichtbaren Partners) schließt man auf eine Masse von $\mathcal{M} \approx 25\mathcal{M}_\odot$ des Primärsterns, während für den Sekundärstern, also das mögliche schwarze Loch, $\mathcal{M} \approx 18\mathcal{M}_\odot$ resultiert. Ein derartiger Massenunterschied könnte aber zu so großen Helligkeitsunterschieden führen, daß der Primärstern seinen Partner völlig überstrahlt. Bei dem unsichtbaren Stern muß es sich daher nicht unbedingt um ein schwarzes Loch handeln. Ähnliche Probleme sind auch bei den anderen Doppelsternsystemen dieser Art aufgetreten.

Während die klassischen Methoden keine eindeutigen Aussagen über die Existenz schwarzer Löcher lieferten, hat sich die Röntgenastronomie als überraschend erfolgreich erwiesen. Vor allem der Röntgensatellit Uhuru, der 1972 von Kenia aus gestartet wurde, hat eine Fülle von Röntgenquellen entdeckt, deren periodisches Verhalten erlaubte, sie zum Teil als Partner von Doppelsternsystemen zu identifizieren. Mit der steigenden Präzision der Positionsmessungen wurde es auch erstmals möglich, die optischen Partner dieser Sternsysteme zu identifizieren und so die notwendigen dynamischen Daten zu gewinnen, die eine Massenbestimmung ermöglichen.

Abbildung 8.20 zeigt die Röntgensignale, die von den zwei beststudierten Quellen, Cygnus X1 und Hercules X1, ausgehen. Während die Quelle in Cygnus keinerlei Periodizität erkennen läßt und ein unregelmäßig fluktuierendes Röntgensignal aussendet, ist die Hercules-Quelle periodisch mit einer Periode $\tau = 1.23\,\mathrm{s}$. Diese Periode ist aber gerade für Pulsare charakteristisch. Tatsächlich führt die Massenbestimmung auf $\mathcal{M} = (0.9 \pm 0.4)\mathcal{M}_\odot$ für den nur im Röntgenbereich sichtbaren Partner dieses Systems. Periodizität der Strahlung und Masse weisen somit eindeutig auf einen Neutronenstern hin. Hercules X1 ist damit der erste Neutronenstern, für den eine Massenbestimmung möglich wurde.

Im Falle von Cygnus X1 läßt sich die rasche Fluktuation und auch die Spektralverteilung der Strahlung sehr gut durch Materie erklären, die in ein schwarzes Loch hineinfällt und dabei bis auf Millionen Grade aufgeheizt wird. Auch hier läßt sich aus der Dynamik des Systems die Masse der Röntgenquelle ermitteln, wobei als Untergrenze $\mathcal{M} = 6\mathcal{M}_\odot$, und als wahrscheinlichster Wert $\mathcal{M} = 14\mathcal{M}_\odot$ für Cygnus X1 folgt. Sowohl die Masse, als auch die Spektralcharakteristik weisen daher bei *Cygnus X1 auf ein schwarzes Loch hin.* Etwa 10 Jahre lang blieb Cygnus X1 der einzige gute Kandidat für ein schwarzes Loch; seit den frühen Achtzigerjahren jedoch wurden weitere Objekte dieser Art entdeckt (siehe Stella in Gleiser (1993)), und die Zahl der Kandidaten wächst stetig an. Somit ist es sehr wahrscheinlich, daß auch diese Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie ihre experimentelle Bestätigung gefunden hat.

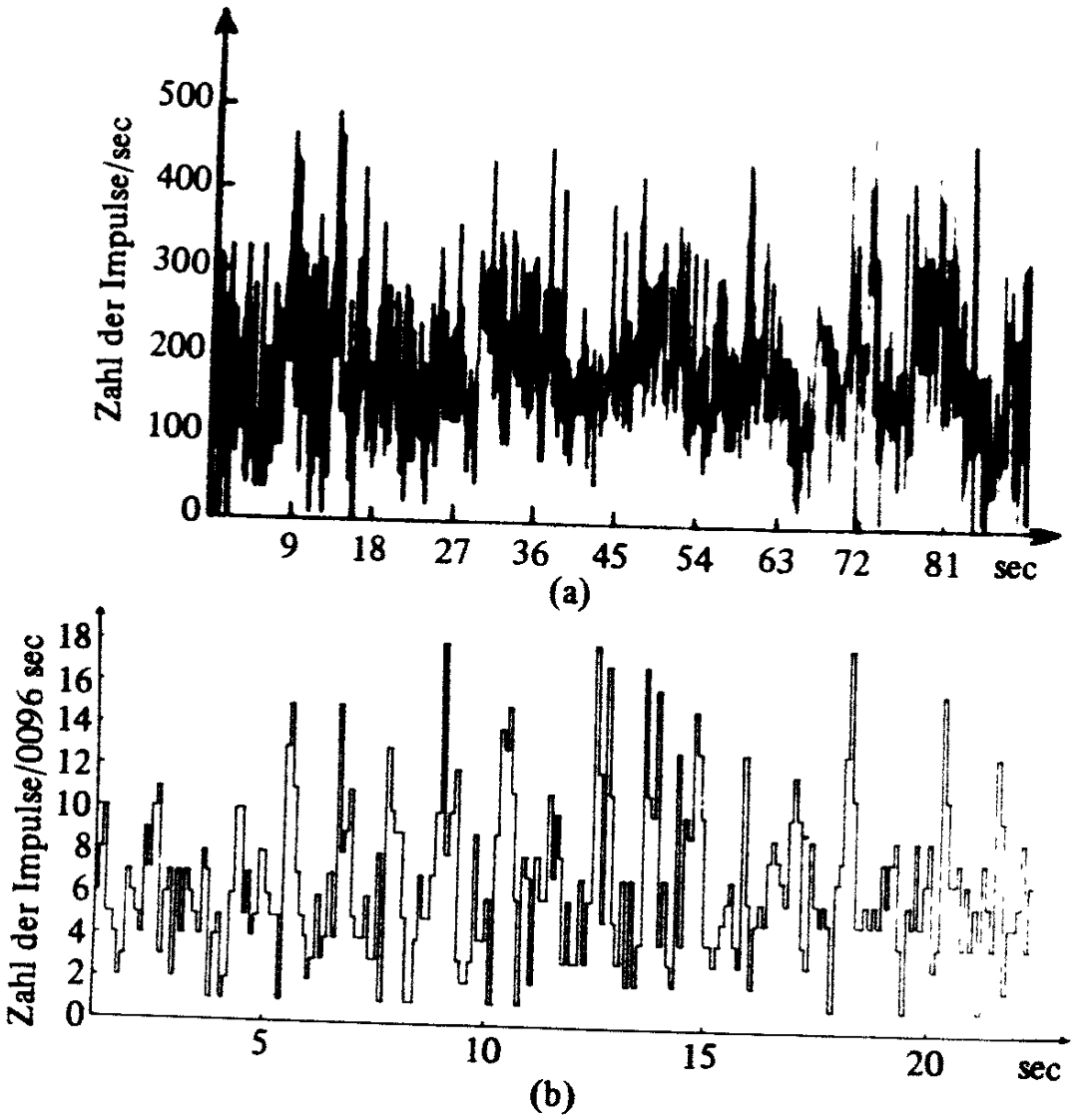

Abbildung 8.20: Röntgensignale von (a) Cygnus X1 und (b) Hercules X1.

Für weitere Details bezüglich der Entdeckung schwarzer Löcher, auch in galaktischen Kernen („supermassive schwarze Löcher", $\mathcal{M} = 10^2 - 10^8\,\mathcal{M}_\odot$), sei der Leser auf DeWitt & DeWitt (1973), die Artikel von Blandford & Thorne in Hawking & Israel (1979), von Ruffini und Mashoon in Ruffini (1982), von Blandford in Hawking & Israel (1987), von Stella in Gleiser (1993) und auf Kafatos (1988) verwiesen.

Kapitel 9

Felder im Riemannschen Raum

In den bisherigen Ausführungen haben wir Materie nur klassisch-makroskopisch (als Punktteilchen, ideale Flüssigkeit oder staubartige Materie) behandelt. Die Quantenfeldtheorie beschreibt aber Materie mikroskopisch durch quantisierte wechselwirkende Felder (Skalar-, Spinor-, Vektor-,... Eichfelder). In diesem Kapitel untersuchen wir, wie sich diese feldtheoretische Beschreibung der Materie im Riemannschen Raum durchführen läßt und welche Probleme sich dabei ergeben.

Am schwierigsten ist die Frage zu lösen, wie eine quantisierte Quelle T_{ik} mit den Einsteingleichungen $G_{ik} = -\kappa T_{ik}$ in Einklang zu bringen ist. Wir erwähnten schon die Möglichkeit der Interpretation als „effektive Feldgleichung", was aber nur eine Näherung an eine volle Theorie wäre, bei der die Metrik und damit die Raum-Zeit quantisiert ist. Hierüber wurden bereits zahllose Spekulationen angestellt. Das bislang einzige ermutigende Resultat ist aber Hawkings bereits erwähnte Berechnung der Entropie Schwarzer Löcher aufgrund eines Ansatzes über die Quantisierung der Metrik selbst.[1]

Auch wurde versucht, die Näherung durch ein effektives Feld, bei der g_{ik} unquantisiert bleibt, als eigenständige sogenannte semiklassische Theorie anzusetzen. Eine Kritik dieser Ansätze findet sich z. B. in Isham, Penrose, Sciama (1981). Lediglich zum ihr zugrunde liegenden Problem der Quantisierung eines Materiefelds in einem gegebenen äußeren Gravitationsfeld werden wir kurze Bemerkungen machen. Im übrigen aber wollen wir alle Felder und die Raum-Zeit als klassisch betrachten.

Aber selbst hier treten Formulierungsprobleme auf: Scheinbare Mehrdeu-

[1] Wir verweisen deshalb diesbezüglich auf die Überblicksartikel in Hawking & Israel (1979); Deser & Lévy (1979); siehe auch D. Brill, R. Gowdy, Rep. Progr. Phys. **33**, 413 (1970), A. Ashtekar, R. Geroch, ibid. 37, 1211 (1974).

tigkeiten bei der Anwendung des Prinzips der minimalen Kopplung (Abschnitt 3.4). Entwicklung eines Spinorkonzepts für den Riemannschen Raum....

In den folgenden Abschnitten gehen wir zunächst auf das für alle Felder grundlegende Problem der Ausbreitungsvorgänge und der Kausalität im gekrümmten Raum ein und diskutieren dann spezielle Felder, wobei einzelne, vom Verhalten im gravitationsfreien Fall abweichende Besonderheiten herausgegriffen werden. Die Geometrie der Raum-Zeit werden wir dabei als äußere, vorgegebene Metrik behandeln.

9.1 Kausalität und Ausbreitungsvorgänge

Die Ausbreitung von Feldern wird durch Feldgleichungen beschrieben, die durch Variation aus einem Wirkungsintegral herzuleiten sind. Als Beispiel betrachten wir zunächst das Wirkungsintegral des skalaren Feldes

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,(A_{,i}\,A_{,k}\,g^{ik} - m^2A^2), \tag{3.4.18}$$

aus dem sich durch Variation von A nach (3.4.20) die Feldgleichung

$$\partial_i\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}A_{,k}\right) + \sqrt{-g}\,m^2A = \sqrt{-g}\,(\Box_g + m^2)\,A = 0 \tag{9.1.1}$$

ergibt, wobei

$$\Box_g := \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_i\,\sqrt{-g}\,g^{ik}\partial_k \tag{9.1.2}$$

der kovariante d'Alembert-Operator bezüglich der Metrik g_{ik} ist.

Das Kausalverhalten des Feldes A wird durch die Fortpflanzungseigenschaften von Signalen, d. h. Wellenfronten, bestimmt. Sei $a(x)$ ein stetiges Feld, dem eine sprunghafte Unstetigkeit mit der Amplitude $u(x) \neq 0$ aufgeprägt wird, die sich entlang einer zunächst noch unbekannten Hyperfläche $\omega(x) = 0$ ausbreitet:

$$A(x) = u(x)\,\theta(\omega(x)) + a(x) \tag{9.1.3}$$

(θ ist die Stufenfunktion). Aus den Feldgleichungen erhält man

$$(\Box_g + m^2)A(x) = \delta'(\omega)\,\omega_{,k}\,\omega_{,i}\,g^{ik}u(x) + \delta(\omega)[2\omega^{,k}\,u_{,k} + u\,\Box_g\omega)] + \ldots = 0, \tag{9.1.4}$$

wobei die Punkte weniger singuläre Terme andeuten. Die Koeffizienten der beiden singulären Terme müssen einzeln verschwinden, so daß

$$g^{ik}\omega_{,i}\,\omega_{,k} = 0, \tag{9.1.5}$$

$$2u_{,k}\,\omega^{,k} + u\,\Box_g\,\omega = 0. \tag{9.1.6}$$

Unstetigkeiten können sich also nur entlang *charakteristischer Hyperflächen* (Charakteristiken) ausbreiten, die durch (9.1.5) gegeben sind. Der Vektor $\omega_{,i}$, der auf die Charakteristiken normal steht, ist nach (9.1.5) ein Nullvektor, die Charakteristiken hier also Nullhyperflächen.

Wenn eine Schar von Charakteristiken $\omega = \text{const}$ (wobei die Konstante von Hyperfläche zu Hyperfläche variiert) gegeben ist, ist $\omega_{,i}$ ein Feld von Nullvektoren. Die durch

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = \omega^i := g^{ik}\,\omega_{,k} \tag{9.1.7}$$

definierten Kurven haben ω^i in jedem Punkt als Tangentenvektor und stehen daher auf die Charakteristiken orthogonal. Die durch (9.1.7) definierten Kurven bilden ferner wegen

$$\omega_{,i;k}\,\omega^k = \omega_{;ik}\,\omega^k = \omega_{;ki}\,\omega^k = \tfrac{1}{2}\,(\omega_{,k}\,\omega^k)_{,i} = 0 \tag{9.1.8}$$

eine Kongruenz von Null-Geodätischen, die sogenannten *Bicharakteristiken* oder charakteristischen Strahlen. Wegen (9.1.5) sind die Bicharakteristiken zugleich auch tangential zu den Charakteristiken, so daß die Bicharakteristiken in den charakteristischen Hyperflächen liegen und diese erzeugen. Derart können die Charakteristiken aufgefunden werden.

Wichtig ist das charakteristische Konoid eines Punktes, das von den von einem Punkt ausgehenden charakteristischen Strahlen (d. h. Null-Geodätischen) erzeugt wird. Es verallgemeinert den Lichtkegel der speziellen Relativitätstheorie auf beliebige Riemann-Räume und bestimmt die Kausalstruktur in gleicher Weise, wie dies der Lichtkegel im flachen Raum tut (wenigstens solange keine Selbstüberschneidungen vorliegen: s. u.).

Wir wenden uns nun (9.1.6) zu. Da $u_{,k}\,\omega^k$ die Richtungsableitung von u längs einer Bicharakteristik ist, genügt die Sprungamplitude u entlang jedes charakteristischen Strahles einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung. Daraus folgt z. B., daß Unstetigkeiten entweder überall oder nirgends auf dem Strahl verschwinden und daher nicht entstehen oder vergehen können[2].

Abschließend wollen wir noch kurz auf die Struktur von *Greenfunktionen* eingehen. Aus der speziellen Relativitätstheorie ist bekannt, daß diese Funktionen auf dem Lichtkegel eine δ-artige Singularität aufweisen und außerhalb des Lichtkegels verschwinden. So lautet die zur Lösung des homogenen Anfangswertproblems von (9.1.1) benötigte Greenfunktion im flachen Raum

$$G(x - x') = \frac{\delta(\Gamma)}{2\pi}\,\mathrm{sign}(t - t') + v(x, x')\,\theta(\Gamma). \tag{9.1.9}$$

[2]Dies gilt allerdings nur für lineare Feldgleichungen.

wobei $\Gamma = (x - x')^2$ ist und v für Felder ohne Ruhmasse verschwindet[3].

Ein analoger Ansatz kann auch im gekrümmten Raum gemacht werden. Dabei ist Γ durch das Quadrat des geodätischen Abstandes der Punkte x, x' zu ersetzen, d. h. durch das Quadrat des Integrals $\int ds$, gebildet entlang der Geodätischen zwischen x und x'. Die Gleichung des charakteristischen Konoids ist dabei durch $\Gamma = 0$ gegeben. Der Ansatz für die Greenfunktion ist von der Form

$$G_g(x, x') = u(x, x')\,\delta(\Gamma) + v(x, x')\,\theta(\Gamma), \tag{9.1.10}$$

wobei v im gekrümmten Raum auch für $m = 0$ nicht verschwindet, wie in der Folge noch ausgeführt wird; u ist durch die Geometrie der Null-Geodätischen allein bestimmt.

Allerdings ist dieser Ansatz nur für genügend benachbarte Punkte x, x' möglich, da das charakteristische Konoid i.a. Selbstüberschneidungen aufweisen wird und ab dort nicht mehr den Rand des Gebiets jener x' bildet, die mit x durch zeitartige Linien verbunden werden können. Man denke nur ans Gravitationsfeld einer kugelsymmetrischen statischen Massenverteilung: liegen x, x' radial zueinander, getrennt durch die Zentralmasse, derart, daß aufgrund der Lichtablenkung ein nichtradialer Lichtstrahl von x nach x' gelangt, dann tun dies bereits aus Symmetriegründen unendlich viele! Es ist daher bemerkenswert, daß unter relativ allgemeinen Voraussetzungen, die etwa die eben beschriebene Situation mit einschließen, die Existenz von retardierter und avancierter Greenfunktion bewiesen werden kann.

Genaueres zur Theorie der hier auftretenden Feldgleichungen findet man in Hadamard (1952); Courant-Hilbert (1962); B. S. DeWitt & R. Brehme, Ann. Phys. (N. Y.) **9**, 220 (1960); DeWitt & DeWitt (1964) (Artikel von A. Lichnérowicz); Friedlander (1975). Die Analyse der Struktur der kausalen Abhängigkeitsgebiete hat übrigens beim Beweis der in Abschnitt 5.7 und 8.7 erwähnten Singularitätstheoreme eine wichtige Rolle gespielt; vgl. F. Tipler et al., in Held (1980), Vol. II.

9.2 Das skalare Feld

Bisher haben wir die Lagrangefunktion

$$L_M = \tfrac{1}{2}(A_{,i}\,A_{,k}\,g^{ik} - m^2 A^2) + \rho A \tag{9.2.1}$$

und die Feldgleichung

$$(\Box_g + m^2)A = \rho(x) \tag{9.2.2}$$

[3] Für $m \neq 0$ ist v durch Hankelfunktionen ausdrückbar, siehe etwa W. Thirring (1958), Appendix.

für ein skalares Feld im äußeren Gravitationsfeld angegeben (wir addierten hier noch einen Quellterm), während der Energie-Impulstensor des Feldes

$$T_{ik} = A_{,i}A_{,k} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik}\,(A_{,m}A_{,n}\,g^{mn} - m^2A^2 + 2\rho A) \tag{9.2.3}$$

in Aufgabe 3 zu Abschnitt 3.4 berechnet wurde. In einem lokalinertialen Bezugssystem geht $\Box_g$ in den d'Alembert-Operator $\Box = \eta^{ik}\,\partial_i\partial_k$ über, so daß aus (9.2.2) die Klein-Gordon-Gleichung folgt. Im frei fallenden Bezugssystem verhält sich also das durch (9.2.2) beschriebene Teilchen wie ein Teilchen im gravitationsfeldfreien Raum, falls die Wellenfunktion $A(x)$ genügend lokalisiert ist, so daß die Inhomogenitäten des Gravitationsfeldes zu vernachlässigen sind.

Um etwas Erfahrung über die in (9.2.2) enthaltenen physikalischen Aussagen zu sammeln, betrachten wir die Ausbreitung des skalaren Feldes A in einem schwachen Gravitationsfeld und berechnen dazu die Greenfunktion. Unter Benutzung harmonischer Koordinaten

$$g_{ik} = \eta_{ik} + 2\psi_{ik}, \qquad \psi_{ik,}{}^{k} = \tfrac{1}{2}\,\psi_k{}^{k}{}_{,i} \tag{9.2.4}$$

mit $|\psi_{ik}| \ll 1$ erhalten wir

$$(\Box_g + m^2)A = (\Box + m^2)A - 2\psi^{ik}A_{,ik} = \rho \tag{9.2.5}$$

oder

$$(\Box + m^2)A = \rho + 2\psi^{ik}A_{,ik} =: \bar{\rho}. \tag{9.2.6}$$

Diese Gleichung kann mittels einer Greenfunktion

$$G(x - x') = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ik(x-x')}}{-k^2 + m^2} \tag{9.2.7}$$

für den Klein-Gordon-Operator $\Box + m^2$ iterativ gelöst werden, wobei wie üblich die Integration um die Pole des Nenners von (9.2.7) geeignet zu wählen ist, um eine eindeutige Lösung – etwa die retardierte – zu spezifizieren[4]. Die Integralgleichung

$$A(x) = \int \mathrm{d}^4x'\,G(x - x')\,\bar{\rho}(x') \tag{9.2.8}$$

liefert bei einmaliger Iteration die gesuchte Lösung für A in gewünschter Genauigkeit:

[4] Vgl. W. Thirring (1958), Appendix.

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \int \mathrm{d}^4x'\, G(x-x')\,\rho(x') \\
&\quad +2\int \mathrm{d}^4x'\,\mathrm{d}^4x''\, G(x-x')\,\psi^{ik}(x')\,G(x'-x'')_{,ik}\,\rho(x'') \qquad (9.2.9)\\
&=: \int \mathrm{d}^4x'\, G_g(x,x')\,\rho(x').
\end{aligned}
$$

Als Greenfunktion im gekrümmten Raum ergibt sich daher in der hier verwendeten Näherung

$$
G_g(x',x'') = G(x'-x'') + 2\int \mathrm{d}^4x\, G(x'-x)\,\psi^{ik}(x)\,G(x-x'')_{,ik}. \qquad (9.2.10)
$$

Diese Gleichung ist in Abbildung 9.1 graphisch interpretiert[5].

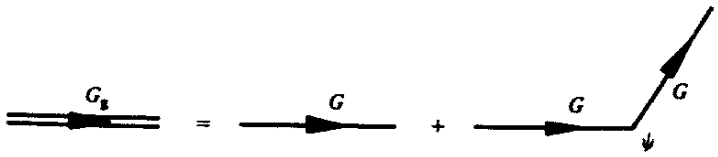

Abbildung 9.1: Störungstheoretische Entwicklung der Greenfunktion im Gravitationsfeld.

Die Abbildung deutet an, daß G die freie Fortpflanzung beschreibt, während der zweite Term die Streuung am Gravitationsfeld angibt. (9.2.10) sind natürlich nur die ersten Terme einer Entwicklung, die fortgesetzt werden könnte. Im Gegensatz zur Situation beim Punktteilchen gehen in (9.2.10) Beiträge von ψ^{ik} ein, die nicht nur von der Umgebung eines Punktes oder einer Kurve stammen. Insofern kann die Fortpflanzung von A nicht als „frei im gekrümmten Raum" bezeichnet werden, es findet vielmehr eine ständige Streuung des durch A beschriebenen Teilchens an der Raumkrümmung statt.

Besonders interessant ist der Fall masseloser Teilchen, $m = 0$. Während hier die (retardierte) Greenfunktion

$$
G(x'-x'') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|}\,\delta(t'-t''-|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|) \qquad (9.2.11)
$$

auf dem (vorderen) Lichtkegel konzentriert ist, enthält G_g nach (9.2.10) auch Beiträge, die von Streuungen der Welle in Punkt x herrühren (Abbildung 9.2).

[5] Vgl. Bjørken-Drell (1966).

Da über alle x zu integrieren ist, wird G_g schon in erster Ordnung im gesamten vorderen Lichtkegel nicht verschwinden. Vergleich mit der allgemeinen Form (9.1.10) der Greenfunktion ergibt für den „Schwanz der Greenfunktion" in niedrigster Ordnung[6]

$$v(x', x'') = 2\int d^4x \, \frac{\delta(t' - t - |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, \psi^{ik}(x) \left(\frac{\delta(t - t'' - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}''|)}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}''|} \right)_{,ik} \tag{9.2.12}$$

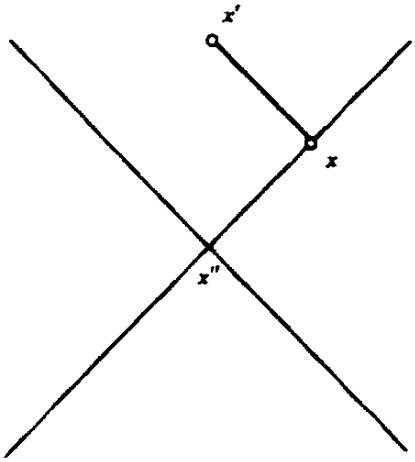

Abbildung 9.2: Streuung am Gravitationsfeld und Schwanz der Greenfunktion.

Wenn die Welle sehr große Distanzen im Gravitationsfeld durchquert, würde man erwarten, daß ein beträchtlicher Teil der Gesamtintensität den Beobachter nicht unmittelbar auf dem Lichtkegel, sondern erst nach einigen Streuungen erreicht. Dieser Effekt ist aber selbst bei kosmischen Distanzen sehr klein, da das Gravitationsfeld ψ^{ik} nur sehr kleine Frequenzen aufweist. Wesentlich beeinflußt werden nur Wellen, deren Länge mit dem Radius des Weltalls vergleichbar ist (Aufgabe 1).

Wir sehen damit, daß bei Wellenphänomenen wegen deren Nichtlokalität nicht so einfach auf der Basis des Äquivalenzprinzips argumentiert werden kann wie beim Punktteilchenmodell der Materie. Verbunden damit ist auch die Schwierigkeit, in Analogie zur Quantenfeldtheorie im flachen Raum[7] Einteilchenzustände zu definieren, von denen man sagen könnte, die entsprechen-

[6] Das Integral ist dabei für zeitartige Trennung von x', x'' auszuwerten und in den übrigen Bereich regulär fortzusetzen. Die singulären Bestandteile des Integrals ($(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'')^2 = 0$) geben die Änderung von u und Γ gegenüber den flachen Werten an.

[7] Siehe z. B. Bjørken-Drell (1967); Sexl u. Urbantke (1992).

den Teilchen verhielten sich wie freie Teilchen in einer gekrümmten Raum-Zeit. Im flachen Raum geschieht dies bekanntlich durch Fourieranalyse des Feldes nach einer inertialen Zeitkoordinate – egal welcher – und Zerlegung in einen Anteil mit positiven und einen mit negativen Frequenzen. Im gekrümmten Raum läßt sich diese höchst nichtlokale Vorgangsweise nicht durch einfache Anwendung des Äquivalenzprinzips imitieren – es macht sich der Wegfall der Poincaré-Invarianz in der Allgemeinen Relativitätstheorie deutlich bemerkbar, die ja im flachen Raum dazu dient, freie Felder und damit Teilchen zu klassifizieren.

Die Quantisierung der durch (9.1.1) gegebenen Dynamik ist auf dem „algebraischen" Niveau (Vertauschungsrelationen, etc.) mit nur geringen Einschränkungen an g_{ik} ohne weiteres möglich (vgl. A. Lichnérowicz, in DeWitt & DeWitt (1964)). Das Problem besteht darin, sinnvolle, das heißt interpretierbare physikalische *Zustände* zu finden, für die dann Erwartungswerte und Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet werden können. Dies ist etwa in asymptotisch flachen Regionen möglich: in manchen Fällen existieren asymptotisch quasiklassische Lösungen[8], die man hierzu verwenden kann; das Problem ist aber in voller Allgemeinheit und insbesondere in kosmologischen Situationen noch unbefriedigend behandelt[9]. Dennoch erwartet man, daß das dynamische Gravitationsfeld in der Frühphase des Universums Erzeugungsprozesse von Materie und Antimaterie hervorruft.

Aufgaben

1. Schreibe (9.2.10) unter Benutzung von (9.2.7) im Fourier-Raum an. Zeige, daß ein hochfrequentes Feld praktisch nur dann gestreut wird, wenn auch das Gravitationsfeld υ^{ik} vergleichbare Frequenzen aufweist.

2. Führe für (9.2.2) einen WKB-Limes aus[2]. Welche Gleichung ergibt sich anstelle von (9.1.5) für die Phase? Was sind die charakteristischen Kurven[10] dieser partiellen Differentialgleichung erster Ordnung?

3. Zeige, daß die Wellengleichung für ein skalares masseloses Feld Φ in der Schwarzschild-Metrik separierbar ist und für ein statisches Feld $\Phi(r,\theta,\phi) = R(r)\,Y_{lm}(\theta,\phi)$ (2^l-Pol, Y_{lm} sind die gewöhnlichen Kugelfunktionen) die Differentialgleichung

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\left(1-\frac{M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-l(l+1)\frac{R}{r^2}=0$$

[8] Vgl. Flügge (1964), Landau-Lifschitz (1971), Bd. 3 zu diesem Begriff.

[9] Siehe H. Rumpf, H.K. Urbantke, Ann. Phys. (N.Y.) **114**, 332 (1978) wegen einer Diskussion dieses Punktes. Im übrigen sei auf die einschlägigen Überblicksartikel in Held (1980), Hawking & Israel (1979), Deser & Lévy (1979), sowie auf Birrell & Davies (1982), Fulling (1989), Audretsch & de Sabbata (1990) und Wald (1994) verwiesen.

[10] Courant-Hilbert (1962).

gilt. Zeige, daß sich diese Differentialgleichung durch Einführung der Radialkoordinate (8.4.8) auf die Form

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^{*2}}+\frac{2}{r}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r^*}-\frac{l(l+1)}{r^2}R=0 \tag{9.2.13}$$

bringen läßt, wobei r als $r(r^*)$ aufzufassen ist.

4. Zeige, daß sich die Lösungen von (9.2.13) für $r^* \to \infty$ bzw. $-\infty$ (d. h. $r \to \infty$ bzw. $2M$) wie $R_l \propto r^{*l}$, $\underline{r^{*-l-1}}$ bzw. $R_l \propto r^*$, $\underline{\text{const}}$ verhalten, wobei für $l \neq 0$ nur die unterstrichenen Lösungen an den jeweiligen Grenzen endlich sind (bzw. verschwinden). Diese Lösungen können aber nicht zu einer Lösung im Bereich $2M < r < \infty$ zusammengefügt werden, da es bei Anfügung einer konstanten Lösung an eine asymptotisch abfallende notwendig einen Punkt gibt, in dem $\mathrm{d}^2R/\mathrm{d}r^{*2} = 0$ gilt und R und $\mathrm{d}R/\mathrm{d}r^*$ entgegengesetztes Vorzeichen haben. Dies ist jedoch nach (9.2.13) ausgeschlossen. Die Lösung $R_0 = \text{const}$ bleibt daher als einzige übrig, so daß ein nichtrotierender kollabierter Stern im Außenraum nur von einem konstanten skalaren Monopolfeld umgeben sein kann, alle höheren Multipole müssen während des Kollapses abgestrahlt werden[11].

5. Zeige, daß die Wellengleichung für ein zeitabhängiges skalares Feld in der Schwarzschild-Metrik durch den Ansatz $\Phi = r^{-1}\psi(r,t)Y_{lm}(\theta,\phi)$ auf die Form

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^{*2}}+\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\frac{2M}{r^3}+\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\psi=0$$

gebracht wird. Studiere die Form des auftretenden effektiven Potentials, dessen Bedeutung von R. Price, l. c., erkannt wurde.

9.3 Das elektromagnetische Feld

Die Gleichungen, nach denen sich ein elektromagnetisches Feld im Gravitationsfeld ausbreitet, erhalten wir durch das „Prinzip der minimalen Kopplung" (Abschnitt 3.4) aus jenen der Maxwelltheorie im flachen Raum. Je nachdem, ob man mit den Feldstärken oder Potentialen arbeitet, ob auf dem Niveau der Lagrangefunktion oder der Feldgleichungen, vor oder nach Wahl von Eichbedingungen, kann man zu verschiedenen Resultaten gelangen. Wirkungsprinzip und Eichinvarianz sind daher nützliche Wegweiser. Die Lagrangefunktion lautet

[11] Die weitere Möglichkeit, daß nämlich die höheren Multipole während des Kollapses divergieren und damit die hier angenommene Schwarzschild-Hintergrundmetrik zerstören, wurde von R. Price (Phys. Rev. **D5**, 2419, 2439 (1972)) mittels numerischer Rechnungen ausgeschlossen.

$$L_M = \tfrac{1}{4} F_{ik} F_{mn}\, g^{in}\, g^{km} - j^i A_i \tag{9.3.1}$$

mit einem Quellterm j_i und den Feldstärken

$$F_{ik} = A_{k:i} - A_{i:k} = A_{k,i} - A_{i,k}. \tag{9.3.2}$$

(Die letzte Gleichheit würde nicht gelten, wenn die Torsion Θ^i, (7.6.7), nicht verschwindet, nur die zweite Version ist aber im üblichen Sinn eichinvariant.) (9.3.2) impliziert die homogenen Maxwellgleichungen

$$F_{[ik,m]} = F_{[ik:m]} = 0, \tag{9.3.3}$$

während sich die inhomogenen durch Variation nach A_i ergeben:

$$0 = \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,L_M}{\partial A_{r,s}}\right)_{,s} - \frac{\partial\sqrt{-g}\,L_M}{\partial A_r} = \left(\sqrt{-g}\,F^{rs}\right)_{,s} + j^r\sqrt{-g}$$

oder

$$F^{rs}{}_{:s} = -j^r. \tag{9.3.4}$$

Wegen der Antisymmetrie von F^{rs} erhalten wir durch Divergenzbildung als Konsistenzbedingung die lokale Stromerhaltung

$$0 = \left(\sqrt{-g}\,j^r\right)_{,r} = \sqrt{-g}\,j^r{}_{:r}. \tag{9.3.5}$$

Sie garantiert die Invarianz von $\int L_M\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$ unter Eichtransformationen

$$A_i \to A_i + \Lambda_{,i}. \tag{9.3.6}$$

Aus (9.3.5) folgt in üblicher Weise die Erhaltung der Gesamtladung (vgl. Abschnitt 7.8, Aufgabe 1). Die Feldgleichungen für die Potentiale entstehen durch Einsetzen von (9.3.2) in (9.3.4):

$$A^{r:s}{}_s - A^{s:r}{}_s = j^r. \tag{9.3.7}$$

Die Invarianz von (9.3.1) unter Eichtransformationen $A_i \to A_i + \Lambda_{,i}$ ermöglicht es zwar, die Lorentz-Bedingung in der Form

$$A^s{}_{,s} = 0 \tag{9.3.8}$$

zu erreichen, doch kann sie in (9.3.7) erst nach Vertauschung der kovarianten Ableitungen ausgenutzt werden. Dies führt zu einem Term, der den Ricci-Tensor enthält:

$$A^{r:s}{}_s + R^r{}_s A^s = j^r, \tag{9.3.9}$$

so daß durch die Lorentz-Bedingung die gewünschte Entkopplung der Gleichungen (9.3.7) nicht erreicht wird.

Immerhin läßt sich aber aus (9.3.9) durch eine (9.1.3), (9.1.4) entsprechende Rechnung sofort entnehmen, daß die Charakteristikenbedingung mit (9.1.5) übereinstimmt. Elektromagnetische Signale breiten sich also längs Nullflächen aus. (9.1.5) ergibt sich auch beim Übergang zur geometrischen Optik als Eikonalgleichung[12], so daß die schon vorweggenommene Deutung der Null- Geodätischen als Lichtstrahlen bewiesen ist.

Der in (9.3.9) auftretende Ricci-Tensor kann mit Hilfe der Feldgleichungen der Gravitation durch den Energie-Impulstensor ausgedrückt werden. Sieht man das Gravitationsfeld nicht als fest vorgegeben an, so ist in diesem lokalen Term vor allem der Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes selbst einzusetzen, der nach (3.4.24) gleich

$$T_{ik} = F_{ij}\, F^{j}{}_{k} - \tfrac{1}{4}\, g_{ik}\, F_{mn} F^{nm} \tag{9.3.10}$$

wird, analog zum Ausdruck im flachen Raum. Daraus resultiert eine komplizierte Selbstkopplung des elektromagnetischen Feldes, die für den Einfluß der Gravitation auf die Ausbreitung von Feldern typisch ist.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch eine interessante Fragestellung untersuchen, die mit dem Verhalten des elektromagnetischen Feldes im Gravitationsfeld zu tun hat: Sendet eine im Gravitationsfeld frei fallende Ladung, wie etwa ein Elektron oder ein geladener Satellit, elektromagnetische Strahlung aus? Heuristisch scheinen darauf zwei konträre Antworten möglich: Nach dem Äquivalenzprinzip sollte eine frei fallende Ladung, die ja von einem „Gravitationsfeld" nichts verspürt, keinerlei Strahlung emittieren. Andererseits geht aber in die klassische Strahlungsformel (wir beschränken uns auf nichtrelativistische Bewegung)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3} e^2 \ddot{\boldsymbol{x}}^2 \tag{9.3.11}$$

die Art der Beschleunigung überhaupt nicht ein, und sie sollte daher auch für Gravitationsbeschleunigung gelten, wenn man vom Standpunkt der Newtonschen Theorie her argumentiert.

Welches dieser beiden heuristischen Argumente ist korrekt? Um dies zu entscheiden, denken wir zunächst an eine konkrete physikalische Situation wie etwa einen geladenen Satelliten, der um die Sonne kreist, also an eine Ladung, die sich auf einer Kreisbahn mit $r \gg M$ in einer Schwarzschild-Metrik bewegt, so daß wir die lineare Näherung und harmonische Koordinaten (9.2.4) benutzen können. Wegen $v^2/c^2 \sim M/r$ erfolgt die Bewegung außerdem nichtrelativistisch. Einsetzen von (9.2.5) in (9.3.9) liefert

$$\Box A^r = j^r + 2\psi^{rk} A_{r,k} - \Gamma^r{}_{ks}\, A^{k,s} =: \bar{j}^r. \tag{9.3.12}$$

[12] Landau-Lifschitz (1971), Bd. 2.

Wenn man den Unterschied zwischen j^r und $\bar{j}^r$ zunächst vernachlässigt, erhält man tatsächlich aus (9.3.12) die Strahlungsformel (9.3.11), die demnach auch auf Ladungen anwendbar sein sollte, die sich im Gravitationsfeld bewegen. Die in (9.3.12) auftretenden Korrekturterme, die proportional zu v bzw. Γ sind, können nur kleine Änderungen dieser Strahlungsformel bewirken.

Nach dieser einfachen Überlegung strahlt eine im Gravitationsfeld frei fallende Ladung tatsächlich, und wir haben nur noch die Frage zu klären, wie dies mit dem Äquivalenzprinzip vereinbar ist und wie die Energieemission durch eine Strahlungsrückwirkung kompensiert wird.

Zur Beantwortung des ersten Teils der Frage bemerken wir zunächst, daß bei einer nichtrelativistischen Kreisbewegung der Hauptteil der elektromagnetischen Strahlung mit der Frequenz ν der Bahnbewegung ausgesendet wird. Die Wellenlänge der Strahlung ist durch

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{v} 2\pi r \gg r \tag{9.3.13}$$

gegeben, d. h., die Wellenlänge ist viel größer als der Bahnradius. Wenn wir das elektromagnetische Feld in der Umgebung der Ladung wie üblich in eine Nah- und Fernzone einteilen, so hat die Nahzone eine Ausdehnung von einigen Wellenlängen, ist also viel größer als der Bahnradius der Bewegung. Man kann daher keinesfalls das lokale Äquivalenzprinzip auf die Strahlungsentstehung anwenden, da die Strahlung aus einer Region stammt, die viel größer ist als jener Bereich, in dem das Gravitationsfeld als homogen angenähert werden kann.

Wir können diesen Sachverhalt auch noch anders ausdrücken. Elektromagnetische Strahlung kommt dadurch zustande, daß eine Ladung aus ihrem eigenen Coulombfeld plötzlich herausbeschleunigt wird, da etwa elektromagnetische Kräfte, die zur Beschleunigung einer Ladung benutzt werden, nicht auf das Coulombfeld wirken, so daß dieses zurückbleibt und in Form von Strahlung freigesetzt wird. Im Falle der Gravitationskraft erleidet aber das Coulombfeld in der Umgebung einer Ladung die gleiche Gravitationsbeschleunigung wie die Ladung selbst, so daß es zunächst zu keinen Strahlungserscheinungen kommen sollte. Dies ist die Aussage des Äquivalenzprinzips. Auf den oben betrachteten Fall ist es allerdings nicht anwendbar, da die elektromagnetischen Wellen (Photonen), die emittiert werden, eine derart große Wellenlänge besitzen, daß das Gravitationsfeld nicht mehr als homogen angenähert werden kann und daher eine Relativbeschleunigung der Ladung zu dem sie umgebenden Coulombfeld auftritt, die zu Strahlungserscheinungen führt.

Anschließend gehen wir noch auf die Frage der Strahlungsrückwirkung ein, die in einer ausführlichen Arbeit von DeWitt und DeWitt behandelt wurde[13]. Wie Abbildung 9.3 zeigt, kommt die Strahlungsrückwirkung so zustande, daß das an der Raumkrümmung gestreute elektromagnetische Feld, das in Punkt A

[13] C. M. DeWitt, B. S. DeWitt, Physics **1**, 3 (1964); für eine Korrektur siehe M. Carmeli, Phys. Rev. **138**, B1003 (1965).

von der Ladung ausgeht, im Punkt B auf die Ladung rückwirkt. DeWitt und DeWitt konnten zeigen, daß dieser Effekt genau zur gesuchten Strahlungsrückwirkung führt. Es ist dies ein Beispiel für die physikalische Bedeutung des „Schwanzes der Green-Funktion".

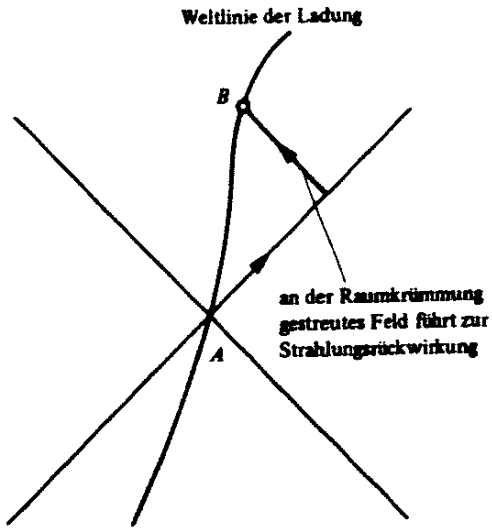

Abbildung 9.3: Strahlungsrückwirkung für frei fallende elektrische Ladung.

Aufgaben

1. Wiederhole die in 7.5, Aufgaben 3, 4 angedeutete Differentialformenversion der Maxwell-Gleichungen.

$$\mathrm{d} \wedge \varphi = 0, \qquad * \mathrm{d} * \varphi = -\gamma,$$

wobei $\varphi = \frac{1}{2} F_{ik}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k$, $\gamma = j_k\, \mathrm{d}x^k$. Dem Vektorpotential entspricht die 1-Form $\alpha = A_i \mathrm{d}x^i$, und es ist $\varphi = \mathrm{d} \wedge \alpha$. Man überlege sich, daß diese Formeln unverändert auch die kovarianten Formeln (9.3.7, 9) beinhalten, wobei nur die $*$- Operation bezüglich der Riemann-Metrik vorzunehmen ist. Die Stromerhaltung erscheint als

$$0 = \mathrm{d} \wedge \mathrm{d} * \varphi = -\mathrm{d} * \gamma;$$

die in einem 3-Volumen V enthaltene Ladung Q_V ist

$$Q_V = -\int_V * \gamma = \int_{\partial V} * \varphi.$$

2. Ergänze die statische, sphärisch-symmetrische Metrik (8.4.6a) durch geeignete Wahl von Φ und eines sphärisch-symmetrischen elektrostatischen Feldes zu einer Lösung der kombinierten Einstein- und Maxwell-Gleichungen

im Außenraum einer im Symmetriezentrum befindlichen Punktladung (Reissner-Lösung, vgl. (8.4.30)).
Anleitung: Wir verwenden, analog zu 7.7 *b)*, die orthonormale Basis

$$\omega^0 = \Phi^{1/2}\mathrm{d}t, \quad \omega^1 = \Phi^{-1/2}\mathrm{d}r, \quad \omega^2 = r\,\mathrm{d}\theta, \quad \omega^3 = r\sin\theta\,\mathrm{d}o.$$

Für ein sphärisch-symmetrisches elektrostatisches Feld ist (vgl. Aufgabe 1) $\alpha = A(r)\,\mathrm{d}t$ anzusetzen, daraus $\varphi = A'\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}t = -A'\,\omega^0 \wedge \omega^1$, $*\varphi = -A'\,\omega^2 \wedge \omega^3 = -A'r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}o$ (vgl. Abschn. 7.4, Aufgabe 7). Im Außenraum ist $\gamma = 0$, also $0 = \mathrm{d} * \varphi = -(A'r^2)'\sin\theta\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}o \to r^2A' = \text{const.} = -e$ (elektr. Flußerhaltung), daher $A' = -e/r^2$. In der orthonormalen Basis ist die Auswertung von (9.3.10) besonders bequem: $2T_a{}^b = \mathrm{diag}\,(A'^2, A'^2, -A'^2, -A'^2)$. Nun kann $\Phi(r)$ etwa aus $G_0^0 = -\kappa\,T_0^0$ leicht berechnet werden, wobei sich (8.4.30) ergibt. Wie hängt e mit der im Unendlichen in üblichen Einheiten gemessenen Ladung zusammen? (vgl. Aufg. 1).

3. Zeige, daß für die Amplitude f_{ik} des singulärsten (δ-artigen) Anteils des Feldstärke-Tensors für ein unstetiges Vektorpotential $A^i = a^i\theta(\omega) +_0 a^i$ die folgenden algebraischen Relationen gelten müssen:

$$f^{ik}\omega_{,k} = 0, \quad f^{ik}f_{ik} = 0, \quad f^{ik}f^*_{ik} = 0.$$

4. Leite das zu (9.1.6) analoge Transportgesetz für die (Sprung-) Amplitude a^i und aus (9.3.8) $a^i\omega_i = 0$ her. a^i ist also raumartig und kann in der Form $a^i = \mathcal{A}\,n^i$ mit $n^in_i = -1$ zerlegt werden. Beweise und deute die sich ergebenden Formeln

$$n^i{}_{;k}\,\omega^{;k} = 0, \qquad (\mathcal{A}^2\,\omega^{;k})_{;k} = 0.$$

5. Was ergibt sich als Charakteristikenbedingung, wenn man von (9.3.7) ohne zusätzliche Eichbedingung ausgeht? (Unstetigkeiten in Eichfreiheitsgraden dürfen zu keiner Einschränkung für ω führen.)

9.4 Spinorfelder und die Dirac-Gleichung

Wegen der fundamentalen Bedeutung der Dirac-Gleichung für die Elementarteilchenphysik ist die Frage nach ihrer Formulierbarkeit im gekrümmten Raum von prinzipieller Bedeutung, wenngleich wir keine meßbaren Effekte erwarten können, die von der Wechselwirkung des Spins mit dem Krümmungstensor stammen[14].

[14] Spinoren im gekrümmten Raum haben daher seit einer fundamentalen Arbeit von R. Penrose (Ann. Phys. (N. Y.) **10**, 171 (1960)) in der allgemeinen Relativitätstheorie hauptsächlich

Im flachen Raum sind Spinoren Objekte, deren Komponenten nach zweiwertigen Darstellungen der Lorentzgruppe transformieren. Im gekrümmten Raum haben wir (Tangential-) Vektoren und Tensoren abstrakt eingeführt, deren Komponenten bei Basiswechsel im Tantentialraum,

$$e_a = e'_b \, p^{b'}{}_a, \tag{9.4.1}$$

nach

$$v^{b'} = p^{b'}{}_a \, v^a, \qquad T^{a'b'} = p^{a'}{}_c \, p^{b'}{}_d \, T^{cd} \tag{9.4.2}$$

etc. transformieren, d. h. nach Tensordarstellungen der Transformationen (9.4.1). Wenn wir diese Transformationen nur durch $\det p^{b'}{}_a \neq 0$ einschränken, bilden sie die Gruppe der allgemeinen linearen Transformationen $GL(4)$, von der man weiß, daß sie keine mehrwertigen Darstellungen hat. Erst bei Einschränkung auf die (pseudo-) orthogonale Untergruppe (hier Lorentzgruppe) ergeben sich mehrwertige Darstellungen. (Um Mißverständnissen vorzubeugen, skizzieren wir den Beweis aus Cartan (1966): Eine mehrwertige (stetige, *endlichdimensionale*) Darstellung von $GL(n)$ ergäbe automatisch eine solche der Untergruppe $SL(2, \mathbf{R})$. Da endlichdimensionale Darstellungen[15] reeller (zusammenhängender) Liegruppen analytisch sind, könnte zu einer mehrwertigen Darstellung der Komplexifizierung $SL(2, \mathbf{C})$ fortgesetzt werden. Letztere Gruppe ist aber einfach zusammenhängend, kann also aus topologischen Gründen keine stetigen mehrdeutigen Darstellungen haben.) Wir beschränken uns daher im weiteren auf orthonormale Basen, die durch griechische Indizes gekennzeichnet werden sollen:

$$(e_\alpha, e_\beta) = \eta_{\alpha\beta}. \tag{9.4.3}$$

Die Relation (7.6.1) der Basisvektoren in benachbarten Punkten

$$\mathrm{D}e_\beta = \omega^\alpha{}_\beta \, e_\alpha \tag{9.4.4}$$

muß daher eine infinitesimale Lorentz-Transformation

$$L^\beta{}_\alpha = \delta^\beta{}_\alpha + \omega^\beta{}_\alpha \tag{9.4.5}$$

sein ($\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ folgt aus (7.6.15) wegen $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$).

---

als *mathematisches Hilfsmittel* Beachtung gefunden (vgl. Pirani, in Deser & Ford (1965)), u. zw. in ihrer zweikomponentigen Version. Wegen eines Versuches, ihnen eine weit fundamentalere Rolle zuzuschreiben, siehe den Artikel von Penrose in Klauder (1972).

[15] Es wurde in diesem Zusammenhang auf bekannte mehrdeutige unendlichdimensionale Darstellungen von $SL(2, \mathbf{R})$ hingewiesen; diese sind unitär, verlieren jedoch diese Eigenschaft bei Übergang zu $SL(2, \mathbf{C})$, und das topologische Argument geht nicht mehr durch, da nun der nötige Stetigkeitsbegriff (Operatornorm bei Unitärität) nicht offensichtlich ist. Vgl. Y. Ne'eman, D. Sijacki, Phys. Lett. **157B**, 275 (1985).

Um nun das kovariante Differential eines Spinors zu finden, betrachten wir nochmals die Komponenten des kovarianten Differentials eines Vektors, die in (7.6.3) eingeführt wurden:

$$(\mathrm{D}v)^\alpha = \mathrm{d}v^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta\, v^\beta =: \mathrm{d}v^\alpha + \delta v^\alpha. \tag{9.4.6}$$

Dabei berücksichtigt δv^α die relative Rotation benachbarter Basisvektoren. (9.4.6) läßt sich nun sofort auf beliebige Tensor- oder Spinorfelder v verallgemeinern (wir unterdrücken die Indizes von v zunächst), indem wir setzen

$$\mathrm{D}v = \mathrm{d}v + \delta v; \tag{9.4.7}$$

dabei berücksichtigt der Korrekturterm δv die Änderung der Komponenten bei der $\omega^\alpha{}_\beta$ entsprechenden Rotation der Basisvektoren im Tensor- bzw. Spinorraum. Die Änderung δv erfolgt gemäß der zu $\omega^\alpha{}_\beta$ gehörenden Darstellungsmatrix der Lorentzgruppe:

$$\delta v = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{G}_{\alpha\beta}\, v\, \omega^{\alpha\beta}. \tag{9.4.8}$$

$\boldsymbol{G}_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{G}_{\beta\alpha}$ sind die bekannten sechs Erzeugenden (in der jeweiligen Darstellung) von Lorentzdrehungen in den (α, β)-Ebenen. Die $\boldsymbol{G}_{\alpha\beta}$ genügen den Vertauschungsrelationen

$$[\boldsymbol{G}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{G}_{\gamma\delta}] = 2\boldsymbol{G}_{\alpha[\delta}\, \eta_{\gamma]\beta} - 2\boldsymbol{G}_{\beta[\delta}\, \eta_{\gamma]\alpha}. \tag{9.4.9}$$

Die Matrizen $\boldsymbol{G}_{\alpha\beta}$ haben etwa in der 4-Vektordarstellung die Form

$$(\boldsymbol{G}_{\alpha\beta})^\gamma{}_\delta = 2\eta_{\delta[\beta}\, \delta^\gamma{}_{\alpha]}, \tag{9.4.10}$$

wodurch (9.4.7, 8) für $v = (v^\alpha)$ in (9.4.6) übergeht.

Für die hier interessierenden Dirac-Spinoren ist dagegen[16]

$$\boldsymbol{G}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\, \gamma_{[\alpha}\, \gamma_{\beta]}, \tag{9.4.11}$$

so daß das kovariante Differential eines Dirac-Spinors durch

$$\mathrm{D}\psi = \mathrm{d}\psi + \tfrac{1}{8}\, [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\, \psi\, \omega^{\alpha\beta} \tag{9.4.12}$$

gegeben ist. (Die eckige Klammer in (9.4.12) bedeutet dabei den Kommutator.) Durch Zerlegung von (9.4.12) nach der orthonormalen Kobasis $\{\omega^\alpha\}$,

$$\mathrm{D}\psi = \mathrm{D}_{e_\alpha}\, \psi \otimes \omega^\alpha, \tag{9.4.13}$$

lassen sich die kovarianten Richtungsableitungen $\mathrm{D}_{e_\alpha}\psi$ ablesen, und die Dirac-Gleichung lautet somit

[16] Für diese und die folgenden Relationen siehe z. B. Sexl & Urbantke (1992).

$$\boxed{(i\gamma^\alpha \mathrm{D}_{e_\alpha} + m)\psi = 0.} \tag{9.4.14}$$

Wir wollen die Aufgabe, diese Gleichung von der hier benutzten orthonormalen auf die üblicherweise verwendete holonome Basis zu transformieren, etwas zurückstellen und zunächst die bisherigen Überlegungen an einem konkreten Beispiel erläutern. Dazu betrachten wir den flachen Raum und führen Zylinder-Koordinaten ein:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\rho^2 - \rho^2\,\mathrm{d}\varphi^2 - \mathrm{d}z^2. \tag{9.4.15}$$

Um die Dirac-Gleichung direkt in Zylinder-Koordinaten anschreiben zu können, wählen wir als orthonormale Basis und Kobasis

$$\begin{aligned} &\omega^0 = \mathrm{d}t, \quad \omega^1 = \mathrm{d}\rho, \quad \omega^2 = \rho\,\mathrm{d}\phi, \quad \omega^3 = \mathrm{d}z, \\ &e_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad e_1 = \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad e_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{9.4.16}$$

Daraus folgt $\mathrm{d}\omega^0 = \mathrm{d}\omega^1 = \mathrm{d}\omega^3 = 0$, $\mathrm{d}\omega^2 = \mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi = \rho^{-1}\omega^1 \wedge \omega^2$ und durch Vergleich mit $\mathrm{d}\omega^\alpha = -\omega^\alpha{}_\beta \wedge \omega^\beta$:

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = \rho^{-1}\omega^2 = \mathrm{d}\phi \tag{9.4.17}$$

und $\omega_{\alpha\beta} = 0$ sonst. Für das kovariante Differential eines Dirac-Spinors ergibt sich somit

$$\mathrm{D}\psi = \mathrm{d}\psi + \frac{1}{4}[\gamma^1, \gamma^2]\psi\,\mathrm{d}\phi. \tag{9.4.18}$$

Die kovarianten Ableitungen von ψ nach den e_α sind also

$$\mathrm{D}_{e_0}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \mathrm{D}_{e_1}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \quad \mathrm{D}_{e_2}\psi = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \frac{1}{4}[\gamma^1, \gamma^2]\psi\right), \quad \mathrm{D}_{e_3}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{9.4.19}$$

Die Dirac-Gleichung lautet daher in Zylinder-Koordinaten

$$i\left(\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \gamma^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \gamma^3\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \left(\frac{i}{4\rho}\gamma^2[\gamma^1, \gamma^2] + m\right)\psi = 0. \tag{9.4.20}$$

Zum Vergleich wollen wir diese Gleichung noch aus der üblichen Form der Dirac-Gleichung mit elementaren Methoden herleiten. Wenn wir in

$$i\left(\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \gamma^2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \gamma^3\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + m\psi = 0 \tag{9.4.21}$$

ch $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ Polarkoordinaten einführen, so wird (9.4.21)

$$i\left(\tilde{\gamma}^0\frac{\partial\psi}{\partial t}+\tilde{\gamma}^1\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\tilde{\gamma}^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\tilde{\gamma}^3\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+m\psi=0 \tag{9.4.22}$$

mit

$$\tilde{\gamma}^0=\gamma^0,\quad \tilde{\gamma}^3=\gamma^3,\quad \tilde{\gamma}^1=\gamma^1\cos\varphi+\gamma^2\sin\varphi,\quad \tilde{\gamma}^2=-\gamma^1\sin\varphi+\gamma^2\cos\varphi. \tag{9.4.23}$$

Um von diesen ortsabhängigen γ-Matrizen wieder auf ortsunabhängige Matrizen zu kommen, argumentieren wir wie üblich: Auch die $\tilde{\gamma}^\alpha$ erfüllen die Relation $\{\tilde{\gamma}^\alpha,\tilde{\gamma}^\beta\}=2\eta^{\alpha\beta}$, es muß daher eine Matrix $S(\varphi)$ geben, so daß $\tilde{\gamma}^\alpha=S^{-1}\gamma^\alpha S$. Setzen wir ferner $\tilde{\psi}=S\psi$, so folgt aus (9.4.22)

$$i\left(\gamma^0\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t}+\gamma^1\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\rho}+\gamma^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi}+\gamma^3\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z}\right)-i\gamma^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial S}{\partial\varphi}S^{-1}\tilde{\psi}+m\tilde{\psi}=0. \tag{9.4.24}$$

Bis auf die Bezeichnungsweise ($\tilde{\psi}$ statt ψ) ist dies bereits identisch mit (9.4.20), wenn noch gezeigt wird, daß

$$\frac{1}{4}[\gamma^1,\gamma^2]=-\frac{\partial S}{\partial\varphi}S^{-1}. \tag{9.4.25}$$

Diese Relation ist für infinitesimale φ unmittelbar einsichtig, sie folgt aber auch für endliche φ, weil φ für die Drehung (9.4.23) ein additiver Parameter ist.

Zuletzt sei noch kurz auf die übliche Terminologie und den Übergang auf holonome Basen eingegangen. Die Koeffizienten $h^\alpha{}_i$, die in der Zerlegung

$$\omega^\alpha=h^\alpha{}_i\,\mathrm{d}x^i,\qquad e_\alpha=h_\alpha{}^i\,\partial_i \tag{9.4.26}$$

der orthonormalen nach einer holonomen Basis auftreten, heißen Vierbeinfelder oder Tetradenfelder. Sie dienen auch zur Umrechnung von holonomen auf orthonormale Tensorkomponenten (letztere heißen auch „physikalische" Komponenten). Die γ-Matrizen werden durch

$$\gamma^i=h_\alpha{}^i\,\gamma^\alpha \tag{9.4.27}$$

auf die holonome Basis bezogen, sie erfüllen

$$\{\gamma^i,\gamma^k\}=2g^{ik}. \tag{9.4.28}$$

Schließlich bezeichnet man die bei der holonomen Basiszerlegung des kovarianten Differentials

$$\mathrm{D}\psi=\psi_{;i}\,\mathrm{d}x^i=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+\Gamma_i\psi\right)\mathrm{d}x^i \tag{9.4.29}$$

auftretenden Matrix-Koeffizienten Γ_i als Fock-Iwanenko-Koeffizienten. Sie sind durch

$$\Gamma_i = \frac{1}{8}\left[\gamma^j, \gamma^k\right] h^{\beta}{}_{ji}\, h_{\beta k} \tag{9.4.30}$$

gegeben.

Für die hier angegebene Dirac-Gleichung läßt sich auch eine Lagrange-Funktion angeben. Auf die Schwierigkeiten, die sich bei der Herleitung des Energie-Impulstensors daraus gemäß (3.4.24) ergeben, gehen wir hier nicht mehr ein[17].

Aufgaben

1. Zeige, daß die charakteristischen Hyperflächen $\omega = 0$ für die Dirac-Gleichung (9.1.5) erfüllen[18].
   Anleitung: Ein Ansatz mit Unstetigkeit, $\psi = \psi_0\,\theta(\omega) + \psi_1$, führt wie in (9.1.4) auf die Bedingung $\det(\gamma^\alpha e_\alpha(\omega)) = 0$; daraus folgt
   $0 = \det(\gamma^\alpha e_\alpha(\omega))^2 = (\eta^{\alpha\beta} e_\alpha(\omega) e_\beta(\omega))^4$.

2. Leite Formel (9.4.30) her. (Die Rechnung mit Differentialformen ist für Anwendungen offensichtlich bequemer!)

9.5 Gravitationswellen als Störungen einer Hintergrundmetrik

In diesem Abschnitt wollen wir die Überlegungen über Charakteristiken und Ausbreitungsverhalten auf die Einsteinschen Vakuumgleichungen anwenden. Dazu denken wir uns einer Hintergrundmetrik ${}_0g_{ik}$ eine kleine, unstetige Störung überlagert. Wegen der Nichtlinearität der Feldgleichungen wählen wir die Störung so, daß erst die zweiten Ableitungen unstetig werden, während ${}_0g_{ik}$ stetige zweite Ableitungen haben soll:

$$g_{ik} = {}_0g_{ik} + h_{ik}\,\frac{\omega^2}{2}\,\theta(\omega). \tag{9.5.1}$$

Dabei ist $\omega(x) = 0$ wieder eine zunächst beliebige Hyperfläche. Bevor wir diesen Ansatz in die Feldgleichungen $R_{ik} = 0$ einsetzen, müssen wir wie beim elektromagnetischen Feld Eichbedingungen wählen (Unstetigkeiten in Eichfreiheitsgraden können nicht zu Einschränkungen von ω führen). Am zweckmäßigsten

[17] Zur Herleitung von T_{ik} muß nach g_{ik} variiert werden, es sind aber die in (9.4.26) definierten $h^\alpha{}_i$ neben den g_{ik} zur Formulierung der Theorie notwendig. Siehe dazu etwa Brill & Wheeler, Rev. Mod. Phys. **29**, 465 (1957).

[18] (9.1.5) ergibt sich somit auch als Eikonalgleichung im Grenzfall der geometrischen Optik. Ein geeigneter WKB-Limes hingegen ergibt die in 4.1b) beschriebene Kopplung zwischen Spin- und Krümmungstensor; vgl. J. Lawrence, Acta Phys. Austr. **XXX**, 313 (1969), Ann. Phys. (N. Y.) **58**, 47 (1970), Acta Phys. Polonica **B1**, 247 (1970).

erweist sich hier die harmonische Koordinatenbedingung, deren linearisierte Version bereits in Abschnitt 3.2 eingeführt wurde. Man verwendet als neue Koordinaten vier unabhängige Lösungen der Gleichung $\Box_g A = 0$. Für diese *harmonischen Koordinaten* x^i gilt[19]

$$\begin{aligned} 0 = \Box_g x^i &= g^{mn}(x^i)_{;mn} = -g^{mn}\,\Gamma^k{}_{mn}\,\delta^i{}_k, \\ g^{mn}\,\Gamma^i{}_{mn} &= 0. \qquad g^{mn}\,\Gamma_{imn} = 0. \end{aligned} \tag{9.5.2}$$

Aus der letzteren Gleichung folgt $g^{mn}(2g_{mi,n} - g_{mn,i}) = 0$, was in (2.7.5) eingesetzt, nach kurzer Rechnung,

$$R_{ik} = g^{mn}\,R_{mikn} = \tfrac{1}{2}\,g^{mn}\,g_{ik,mn} + \text{Terme ohne 2. Ableitungen} \tag{9.5.3}$$

ergibt. Setzen wir (9.5.1) in die Vakuumfeldgleichungen $R_{ik} = 0$[20] ein, so erhalten wir als Bedingung für das Verschwinden des unstetigen Terms $\propto \theta(\omega)$

$$g^{mn}\,\omega_{,m}\,\omega_{,n} = 0. \tag{9.5.4}$$

Es ergibt sich also auch hier (9.1.5) als Charakteristikenbedingung, so daß sich Gravitationswellen-Signale mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die (9.1.6) entsprechende Gleichung ist dagegen viel komplizierter und nicht linear.

Das Resultat (9.5.4) ist offensichtlich von der Wahl spezieller Koordinaten unabhängig. Setzt man (9.5.1) auch in die Eichbedingung (9.5.2) ein, so erhält man ein weiteres invariantes Resultat, indem man den Koeffizienten von $\omega\,\theta(\omega)$ nullsetzt:

$$\left(h_i{}^n - \tfrac{1}{2}\,h_m{}^m\,\delta_i{}^n\right)\omega_{;n} = 0. \tag{9.5.5}$$

Das ist eine algebraische Bedingung an die Sprungamplitude, die analog zu $a^i\,\omega_{,i} = 0$ beim Vektorfeld ist. Aus ihr lassen sich (analog zu Aufgabe 3 von Abschnitt 9.3) algebraische Eigenschaften der Sprungamplitude r_{mikn} des Riemann Tensors herleiten[21]

$$r_{mikn}\,\omega^{;n} = 0. \qquad r_{mi[kn}\,\omega_{j]} = 0. \tag{9.5.6}$$

Derartige formal-algebraische Charakterisierungen des Riemann-Tensors sind in der Theorie der Gravitationsstrahlung von Bedeutung (vgl. Pirani, in Deser & Ford (1965)).

Die Näherung, in der stetige Störungen kleiner (im Vergleich zu den Hintergrundkrümmungsradien) Wellenlänge behandelt werden, der Grenzübergang

[19] Diese Bedingungen werden auch oft nach de Donder oder Lanczos benannt und in Fock (1960) vielfach verwendet.

[20] Dabei ist angenommen, daß g_{ik} selbst Lösung von $R_{ik} = 0$ ist.

[21] welche die Transversalität der damit im Sinn von (8.4.23) verbundenen Gezeitenkräfte ausdrücken.

zur Eikonalapproximation (geometrische „Optik") u. a. sind ausführlich von R. Isaacson[22] behandelt worden.

Es sei hier erwähnt, daß es die Untersuchung der Fokussierungswirkungen der Hintergrundmetrik ${}_0g$ auf Licht- und Gravitationsstrahlen (Nullgeodätische) waren, welche – zusammen mit topologischen Überlegungen – zu einigen der berühmten Singularitätentheoreme der allgemeinen Relativitätstheorie führten[23].

Aufgabe

Deduziere (9.5.6).

[22] Phys. Rev. **166**, 1263 und 1272 (1968).
[23] Siehe F. Tipler et al., in Held (1980), Vol. II.

Kapitel 10

Gravitation und Feldtheorie

In diesem Kapitel sollen weitere Überlegungen über den Zusammenhang zwischen Gravitation und Feldtheorie angestellt werden. Ausgangspunkt ist dabei die Frage, warum die allgemeine Relativitätstheorie in ihrer Struktur so verschieden von den übrigen Feldtheorien ist. Weshalb benötigt man gerade für die Theorie des Gravitationsfeldes den aufwendigen Formalismus der Riemannschen Geometrie? Kann man nicht auch eine lorentzkovariante Gravitationstheorie analog zur Elektrodynamik konstruieren?

10.1 Das Gravitationsfeld als Spin-2-Feld im Minkowski-Raum

In Abschnitt 6.2 haben wir die Lagrange-Funktion des Gravitationsfeldes in linearer Näherung angegeben. Mit einer trivialen Bezeichnungsänderung ($\kappa = f^2$, $\psi_{ik} \to f\psi_{ik}$) lautet (6.1.20)[1]

$$L = \frac{1}{2}\left(\psi_{ik,j}\psi^{ik,j} - 2\psi_{ik,j}\psi^{jk,i} - \psi^{,i}\psi_{,i} + 2\psi^{ik}{}_{,k}\psi_{,i}\right) - f\psi^{ik}T_{ik} + L_M, \tag{10.1.1a}$$

wobei wir noch die Lagrange-Funktion der Materie L_M hinzugefügt haben. Die Materie denken wir uns dabei wieder durch ein skalares Feld A repräsentiert. Diese Lagrange-Funktion (10.1.1a) ist analog zur bekannten Lagrange-Funktion der speziell-relativistischen Elektrodynamik:

$$L = \frac{1}{2}\left(A_{i,k}A^{k,i} - A_{i,k}A^{i,k}\right) - j_i A^i + L_M(A, \eta_{ik}). \tag{10.1.1b}$$

Es drängt sich die Frage auf, warum man nicht (10.1.1a) als Lagrange-Funktion einer speziell-relativistischen Gravitationstheorie auffassen kann, wobei das

[1] Alle Indizes werden in diesem Kapitel mittels η_{ik} hinauf- bzw. hinuntergezogen.

Tensorfeld ψ_{ik} als Feld im Minkowski-Raum zu behandeln wäre. Damit würden sowohl die Schwierigkeiten wegfallen, die durch die Nichtlinearität der Einsteinschen Feldgleichungen bedingt sind, als auch diejenigen, die sich aus der ungewohnten Riemannschen Raumstruktur ergeben.

In der Tat bestehen zwischen (10.1.1a) und (10.1.1b) sehr weitgehende Analogien. Durch Variation von ψ_{ik} bzw. A^i entstehen die Feldgleichungen

$$\Box\psi_{ik} - \psi_{ij,}{}^{j}{}_{k} - \psi_{kj,}{}^{j}{}_{i} + \psi_{,ik} + \eta_{ik}\left(\psi_{jl}{}^{,jl} - \Box\psi\right) = -f\,T_{ik}. \qquad (10.1.2a)$$

$$\Box A_i - A_{k,}{}^{k}{}_{i} = j_i. \qquad (10.1.2b)$$

Wie man sich leicht überzeugt, sind diese Feldgleichungen unter den Eichtransformationen

$$\psi_{ik} \to \psi_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}, \qquad (10.1.3a)$$

$$A_i \to A_i + \Lambda_{,i} \qquad (10.1.3b)$$

invariant, wobei $\Lambda(x)$ bzw. $\Lambda_i(x)$ beliebige Funktionen der Koordinaten sind.

Die Eichinvarianz der Theorien kann man verwenden, um die Feldgleichungen zu entkoppeln. Man benutzt dazu die Bedingungen

$$\psi_{ik,}{}^{k} = \tfrac{1}{2}\,\psi_{k}{}^{k}{}_{,i}, \qquad (10.1.4a)$$

$$A_{i,}{}^{i} = 0, \qquad (10.1.4b)$$

die durch geeignete Wahl der $\Lambda(x)$ bzw. $\Lambda_i(x)$ zu erreichen sind (Lorentz-Eichung bzw. harmonische Koordinaten). Damit vereinfachen sich die Feldgleichungen zu

$$\Box\psi_{ik} = -f\left(T_{ik} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{ik}T\right), \qquad (10.1.5a)$$

$$\Box A_i = j_i. \qquad (10.1.5b)$$

Die derart entkoppelten Feldgleichungen können mit Hilfe der Greenfunktionenmethode gelöst werden. Zumindest im Prinzip sind damit alle Effekte der Elektrodynamik und die Effekte der linearen Gravitationstheorie berechenbar.

Bei diesem speziell-relativistischen Zugang zur Gravitationstheorie ist zunächst die Frage zu beantworten, warum man das Gravitationsfeld gerade durch ein symmetrisches Tensorfeld ψ_{ik} beschreiben will und nicht etwa durch ein Vektorfeld A^i, wie in der Elektrodynamik, und warum ferner die Lagrange-Funktion des Gravitationsfeldes gerade die in (10.1.1a) angegebene Form haben

soll. Um dies einzusehen, untersuchen wir zunächst die Elektrodynamik etwas näher. Ausgangspunkt der Elektrodynamik ist, daß die Ladung

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, \rho(x) \tag{10.1.6}$$

erhalten ist, wobei $\rho(x)$ die Ladungsdichte darstellt. Es ist daher naheliegend, $\rho(x)$ als Nullkomponente eines erhaltenen Vektors $j_\iota(x)$ aufzufassen:

$$\rho = j_0, \qquad j_{\iota,}{}^{\iota} = 0. \tag{10.1.7}$$

Wenn wir uns auf Kopplungen beschränken, die in Quelle und Feld jeweils linear sind, kommt nur eine Kopplung von $j_\iota(x)$ an ein Vektorfeld A^ι in Frage, also $L_w = j_\iota A^\iota$, bzw. eine Kopplung an ein Skalarfeld φ in der Form $L'_w = j_i\,\phi^{,i} = -j_i{}^{,i}\phi + (j_i\phi)^{,i} = (j_i\phi)^{,i}$. Da sich L'_w aber wie angedeutet auf eine Divergenz reduziert, ist sie als Lagrange-Funktion nicht brauchbar, so daß das elektromagnetische Feld durch ein Vektorfeld A^ι zu beschreiben ist. Zur Konstruktion der Lagrange-Funktion eines Vektorfeldes stehen zwei Invarianten zur Verfügung, die quadratisch in den ersten Ableitungen sind, nämlich $A_{i,k}\,A^{k,i}$ bzw. $A_{i,k}\,A^{i,k}$ (eine dritte Invariante $A_{i,}{}^{i}A^{k}{}_{,k}$ kann durch partielle Integration in $A_{i,k}\,A^{k,i}$ umgewandelt werden), so daß sich zunächst

$$L = \tfrac{1}{2}\left(a\,A_{i,k}\,A^{k,i} + b\,A_{i,k}\,A^{i,k}\right) \tag{10.1.8}$$

mit beliebigen Konstanten a, b als Lagrange-Funktion des elektromagnetischen Feldes ergibt[2].

Fordert man, daß die Lagrange-Funktion unter Eichtransformationen $A_i \to A_i + \Lambda_{,i}$ invariant sein soll, so folgt $a = -b$. Diese Forderung hat folgende physikalische Bedeutung: Ein Vektorfeld A^i hat vier Komponenten, die einem Spin-1-Feld (drei Komponenten) und einem Spin-0-Feld (eine Komponente) entsprechen. Die eichinvariante Lagrange-Funktion projiziert gerade die Spin-1-Komponenten des Feldes heraus, so daß das Photon nur Spin 1 aufweist[3]. Wählt man eine nicht eichinvariante Lagrange-Funktion, so tritt außer dem Spin-1-Photon noch ein Spin-0-Photon auf. Wegen der Stromerhaltung (10.1.7) enthält die Quelle j_i eines elektromagnetischen Feldes allerdings nur drei unabhängige Komponenten, so daß das Spin-0-Photon keine Quelle hat.

Für die Gravitation ist die Konstruktion einer Vektortheorie nicht möglich, da das Integral der Massendichte nicht erhalten ist (Umwandlungsprozesse der Elementarteilchen!) und daher nicht Teil eines erhaltenen Vektorstromes sein kann. Ferner ergibt eine Vektortheorie der Gravitation stets Abstoßung von Massen, ebenso wie die vektorielle Elektrodynamik die Abstoßung gleichnamiger Ladungen vorhersagt. Dies kann man nur abändern, indem man dem

[2]Von einem möglichen Massenterm $-m^2A^2$ wollen wir hier absehen.

[3]Genaueres dazu siehe z. B. Sexl & Urbantke (1992).

Vektorfeld negative Energie gibt (also das Vorzeichen des ersten Teiles von (10.1.1b) umdreht), was aber bekanntlich zu großen Schwierigkeiten führt[4].

Als Quellen eines Gravitationsfeldes stehen aber die zehn Komponenten von $T_{ik} = T_{ki}$ zur Verfügung, die durch die Erhaltungssätze

$$T_{ik,}{}^{k} = 0 \tag{10.1.9}$$

auf sechs unabhängige Komponenten reduziert werden, entsprechend einem Spin-0-Feld (die Spur $T = T_i{}^i$ von T_{ik}) und einem Spin-2-Feld. Man kann daher entweder eine skalare (Spin 0) oder eine tensorielle Theorie (Spin 2) der Gravitation konstruieren, oder eine Mischung von beiden (Skalar-Tensor-Theorie). Für eine *skalare Theorie* der Gravitation lautet die Lagrange-Funktion einfach (g ist eine Kopplungskonstante)

$$L_s = \tfrac{1}{2}\varphi_{,i}\varphi^{,i} - g\varphi T + L_M. \tag{10.1.10}$$

Eine derartige Theorie wurde von Nordstrom noch vor der allgemeinen Relativitätstheorie aufgestellt.

Für eine Spin-2-Theorie der Gravitation ist die Lagrange-Funktion gerade durch (10.1.1a) gegeben, da die Eichinvarianz (10.1.3a) der Theorie aus dem Tensorfeld v^{ik} (dessen zehn unabhängige Komponenten den Spins 2,1,0,0 entsprechen) genau Spin 2 herausprojiziert[5]. Vom Standpunkt der Feldtheorie bedeutet die Wahl der unter Eichtransformationen (10.1.3a) invarianten Lagrange-Funktion (10.1.1a), daß das Graviton ein Spin-2-Teilchen ist und keine Spin-0-Beimischungen auftreten, die auch möglich wären, da die Quelle des Feldes, wie erwähnt, den Spin-0-Anteil T enthält.

Verallgemeinerte Gravitationstheorien erhält man durch Kombination von (10.1.1a) mit (10.1.10), wobei $f^2 + 2g^2 = \kappa$ die Übereinstimmung mit der Newtonschen Theorie sichert (siehe Abschnitt 10.3). In einer derartigen Theorie wird die Gravitationswechselwirkung teilweise durch Spin-0- und teilweise durch Spin-2-Gravitonen vermittelt (Skalar-Tensor-Theorien).

10.2 Die Renormierung der Metrik und die Nichtlinearität der Feldgleichungen

Die bisherigen Überlegungen scheinen zu zeigen, daß Elektrodynamik und Gravitationstheorie völlig analog aufgebaut werden können, so daß das Problem der Konstruktion einer linearen Gravitationstheorie im Minkowski-Raum gelöst

[4] H. A. Lorentz hat versucht, eine Vektortheorie der Gravitation zu konstruieren, in der gerade diese Schwierigkeiten auftraten: Proc. Amst. Ac., p. 559 (1900). (Wir danken Herrn R. A. Breuer für diesen Hinweis.)

[5] Eine Anleitung zur formalen Analyse mittels der Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe findet man z. B. in Sexl & Urbantke (1992), Abschn. 9.5, Aufg. 15.

erscheint. Die Komplikationen der Einsteinschen Theorie sind aber dennoch unausweichlich, da die bisherigen Überlegungen Widersprüche aufweisen, wie sich im folgenden zeigen wird.

Wir leiten zunächst die Feldgleichungen für ein skalares Feld[6], Lagrange-Funktion $L_M = \frac{1}{2}(A_{,i}\,A_{,k}\,\eta^{ik} - m^2A^2)$, her, das an das Gravitationsfeld nach (10.1.1a) gekoppelt ist. Variation nach A ergibt mit (siehe (9.2.3))

$$T_{ik} = A_{,i}\,A_{,k} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{ik}\left(A_{,l}\,A_{,n}\,\eta^{ln} - m^2A^2\right) \tag{10.2.1}$$

die Feldgleichungen

$$(1 - f\psi)(\Box + m^2)A + 2f\psi^{ik}A_{,ik} + fA_{,i}\,(2\psi^{ik}{}_{,k} - \psi^{,i}) = 0. \tag{10.2.2}$$

Durch explizite Rechnung zeigt man leicht, daß (10.2.2) unter der Eichtransformation (10.1.3a) nicht invariant ist. Damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet: Während die Feldgleichungen für ψ^{ik} eichinvariant sind und damit das Feld ψ^{ik} nur bis auf eine Eichung festlegen, geht diese unbekannte Eichung in die Bewegungsgleichungen des Feldes A ein!

Ein zweiter Widerspruch zu den Postulaten der lorentzinvarianten Feldtheorie ergibt sich ebenfalls: Da zweite Ableitungen von A nicht nur im Term $\Box A$ auftreten, sondern auch in den Kopplungstermen, erhält man als Charakteristikenbedingung des Feldes A

$$(1 - f\psi)\eta^{ik}\,\omega_{,i}\,\omega_{,k} + 2f\,\psi^{ik}\,\omega_{,i}\,\omega_{,k} = 0. \tag{10.2.3}$$

Das charakteristische Konoid des Feldes A ist daher nicht durch den normalen Minkowski-Lichtkegel ($\eta^{ik}\,\omega_{,i}\,\omega_{,k} = 0$) gegeben, so daß sich das Feld eventuell mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten kann und Akausalitäten verursacht.

Damit erscheint der Ansatz für eine lorentzinvariante Theorie der Gravitation völlig verfehlt. Wir können aber durch folgende Bemerkung[7] unsere Überlegungen weiterführen: In erster Ordnung in f ist die Feldgleichung (10.2.2) invariant unter (Aufgabe 1)

$$\psi_{ik} \to \bar{\psi}_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}, \tag{10.2.4}$$

$$x^i \to \bar{x}^i + 2f\Lambda^i, \tag{10.2.5}$$

$$A(x) = \bar{A}(\bar{x}), \tag{10.2.6}$$

also unter der Kombination einer Eichtransformation mit einer Koordinatentransformation. In der Elektrodynamik ist dagegen die Feldgleichung allein

[6] Nicht zu verwechseln mit dem in diesem Kapitel ebenfalls betrachteten skalaren Gravitationsfeld ϕ (10.1.10)!

[7] W. Thirring, Ann. Phys. (N. Y.) **16**, 96 (1961); Fortschr. Phys. **7**, 79 (1959).

unter Eichtransformationen invariant, d. h., es tritt kein Analogon zu (10.2.5) auf; vgl. Abschn. 11.5.

Die Invarianz unter kombinierten Eich- und Koordinatentransformationen kann man dazu benutzen, um etwa ein konstantes Gravitationspotential, $\psi_{ik} = a_{ik} = a_{ki}$, durch

$$\bar{x}^i = x^i - f\, a_{ik}\, x^k \tag{10.2.7}$$

wegzutransformieren:

$$\psi_{ik} = a_{ik} \to \bar{\psi}_{ik} = 0. \tag{10.2.8}$$

Da konstante Potentiale auch in der Elektrodynamik durch Eichtransformationen eliminiert werden können, ist diese Tatsache nicht weiter überraschend. Charakteristisch für die Gravitationstheorie ist dagegen, daß auch konstante Feldstärken (homogenes Gravitationsfeld), also linear von x abhängige Potentiale

$$\psi_{ik} = a_{ikl}\, x^l \qquad (a_{ikl} = a_{kil} = a_{ilk}) \tag{10.2.9}$$

durch Eichtransformationen eliminierbar sind. Wählen wir Λ^i zu

$$\Lambda^i = \tfrac{1}{4}\, a^i{}_{kl}\, x^k\, x^l, \tag{10.2.10}$$

also

$$\bar{x}^i = x^i - \tfrac{1}{2}\, f a^i{}_{kl}\, x^k\, x^l, \tag{10.2.11}$$

so folgt $\bar{\psi}_{ik} = 0$. So kann z. B. ein homogenes Gravitationsfeld in der x^1-Richtung,

$$a_{100} = g/f, \qquad \psi_{00} = (g/f)\, x^1, \tag{10.2.12}$$

durch die Transformation

$$\bar{x}^1 = x^1 - \frac{g}{2}\, t^2 \tag{10.2.13}$$

weggeschafft werden. Diese Aussage entspricht gerade dem Äquivalenzprinzip, das sich hier als Resultat ergibt, während es im Einsteinschen Aufbau der Theorie als Grundpostulat eingeht.

Von hier aus gelangt man auch mit wenigen Schritten wieder zum Konzept des gekrümmten Riemannschen Raumes: Wenn wir einen beliebigen Raumpunkt herausgreifen und annehmen, daß sich das Gravitationsfeld dort in eine Taylorreihe entwickeln läßt, so können die konstanten bzw. linearen Terme durch Transformationen (10.2.7) bzw. (10.2.11) stets eliminiert werden, so daß das Gravitationsfeld im Koordinatensystem $\bar{x}^i$ lokal wegtransformiert ist. Wenn wir nun Maßstäbe bzw. Uhren zur Vermessung der Raumzeit heranziehen, so

werden diese im System $\bar{x}^i$ die gleichen Längen bzw. Perioden anzeigen wie im schwerefreien Raum. Das System $\bar{x}^i$ wurde ja gerade so gewählt, daß darin lokal alle Gravitationsfelder weggeschafft wurden. Die nach dieser Vorschrift ausgemessene Raum-Zeit wird daher die Metrik (renormierte Metrik)

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ik}\,\mathrm{d}\bar{x}^i\,\mathrm{d}\bar{x}^k \tag{10.2.14}$$

aufweisen und nicht durch das Linienelement des Minkowski-Raumes

$$\overline{\mathrm{d}s^2} = \eta_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k \tag{10.2.15}$$

gegeben sein, mit dem wir begonnen haben (unrenormierte Metrik). Wegen

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \eta_{ik}\,\mathrm{d}\bar{x}^i\,\mathrm{d}\bar{x}^k = \eta_{ik}\,\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^l}\,\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^m}\,\mathrm{d}x^l\,\mathrm{d}x^m \\ &= (\eta_{ik} + 2f(\Lambda_{i.k} + \Lambda_{k.i}))\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k = (\eta_{ik} + 2f\psi_{ik})\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k \\ &=: g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k\end{aligned} \tag{10.2.16}$$

weist diese renormierte Metrik, die mit tatsächlichen Maßstäben bzw. Uhren ausgemessen werden kann, global eine Riemannsche Struktur auf. Damit sind wir wieder zur allgemeinen Relativitätstheorie zurückgekehrt, wenn auch bisher nur in linearer Näherung.

Um die Rolle des Linienelementes (10.2.15) noch etwas näher zu analysieren, betrachten wir als Beispiel die Geometrie $g_{ik} = \mathrm{diag}\,(1-\gamma, -1-\gamma, -1-\gamma, -1-\gamma) = \eta_{ik} + 2f\psi_{ik}$, $\gamma = 2M/r$, d.h. (vom Standpunkt der Feldtheorie) das Gravitationsfeld ψ_{ik} in der Umgebung eines Massenpunktes. Nach (10.2.7, 8) läßt sich dieses Gravitationsfeld lokal durch die Transformation

$$\bar{t} = t\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right), \qquad \bar{x} = x\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \tag{10.2.17}$$

wegtransformieren. Ein im Gravitationsfeld befindlicher Maßstab, der die Länge $\Delta\bar{x} = 1$ hat, weist daher von der unrenormierten Metrik (also von dem Minkowski-Raum, mit dem wir begonnen haben) aus betrachtet nur mehr die Länge $\Delta x = 1 - \frac{\gamma}{2} < 1$ auf. Ein in ein Gravitationsfeld gebrachter Maßstab schrumpft daher, wenn wir ihn vom Standpunkt der Minkowski-Geometrie (unrenormierten Metrik) betrachten. Ebenso bedeutet (10.2.17), daß eine ins Gravitationspotential eingebrachte Uhr langsamer geht als eine im gravitationsfreien Raum.

Wir sehen zusammenfassend, daß zwei verschiedene Standpunkte möglich sind. Wir können entweder festlegen, daß ein Maßstab (bzw. eine Uhr) an jedem beliebigen Raum-Zeit-Punkt *per definitionem* die gleiche, invariante Länge (Periode) hat. Mit dieser Definition folgt, daß das mit diesen Maßstäben ausgemessene Linienelement durch den Riemannschen Ausdruck (10.2.16) gegeben ist. Diese *Konvention* wurde von Einstein gewählt.

Wir können uns aber auch auf einen anderen Standpunkt stellen: Wir setzen fest, daß das Linienelement einer Raum-Zeit per definitionem durch das Minkowski-Linienelement (10.2.15) gegeben ist. Dann folgt daraus, daß in dieser flachen Metrik Uhren langsam gehen, wenn sie in ein Gravitationsfeld eingebracht werden, und Maßstäbe schrumpfen. In dieser *Konvention* wurde das Verhalten des Raumes axiomatisch festgelegt, während das Verhalten von Maßstäben dann dem Experiment entnommen werden muß. Beide Standpunkte sind äquivalent (wenn man von topologischen Fragen absieht), wie in Abbildung 10.1 angedeutet ist.

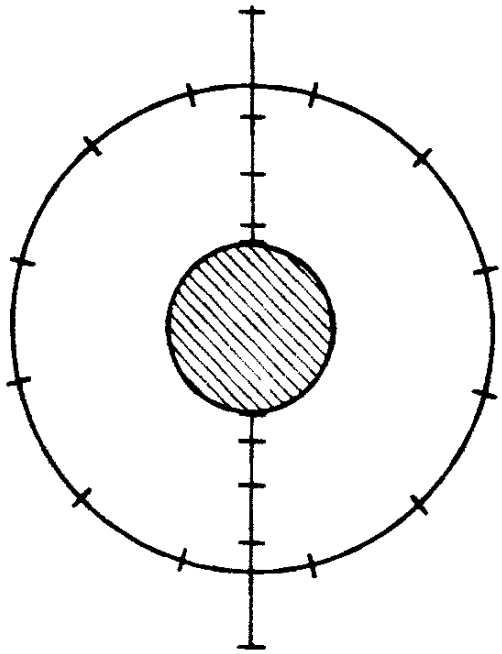

Abbildung 10.1: Schrumpfen von Maßstäben in der Umgebung schwerer Massen.

Die Abbildung zeigt, daß in einer Ebene, in der Maßstäbe von Punkt zu Punkt verschieden schrumpfen, das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises (nach der Anzahl der Maßstäbe gemessen) durchaus verschieden von 2π sein kann. An diesem Beispiel sieht man konkret die große Bedeutung, die konventionelle Festsetzungen in der Physik haben. Diese Bedeutung wurde vor allem von Poincaré hervorgehoben, während Duhem betonte, daß einzelne physikalische Aussagen für sich allein genommen nicht testbar seien, nur ihre Gesamtheit. Auch das können wir hier an dem konkreten Beispiel sehen, da etwa die Aussage: „Der Raum ist flach" oder „der Raum ist gekrümmt" für sich allein genommen noch nicht sinnvoll ist, solange keine Definition über das Verhalten von Maßstäben gesetzt wurde. Eine ausgezeichnete Einführung in die hier angeschnittene Problematik, die uns weit in die Erkenntnistheorie der Physik hineinführt, bringen die Bücher von Reichenbach (1958), Grünbaum (1963), Poincaré (1946) und Duhem (1954).

Die beiden verschiedenen, oben erwähnten Konventionen über das Verhalten von Maßstäben bzw. die Struktur der Raum-Zeit sind für Anwendungen gleichermaßen brauchbar (wenn man von Fragen der Topologie absieht), wobei bald das eine, bald das andere Bild eine einfachere Erklärung der physikalischen Vorgänge liefert. So läßt sich etwa das in Kapitel 4 erwähnte *Shapiro-Experiment* leichter vom Standpunkt des flachen Raumes diskutieren, in dem Maßstäbe schrumpfen und Uhren langsamer gehen. Es folgt daraus nämlich, daß in der Umgebung einer schweren Masse (der Sonne) die Lichtgeschwindigkeit einen kleineren Wert hat als im gravitationsfreien Raum (mißt man allerdings die Lichtgeschwindigkeit lokal, so erhält man infolge des Verhaltens von Maßstäben und Uhren stets den gleichen Wert wie im freien Raum). Diese Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie führt dazu, daß ein Lichtstrahl, der knapp an der Sonne vorbeiläuft, dazu länger braucht, als es die Newtonsche Theorie angibt. Numerisch wird dieser Effekt in Aufgabe 2 berechnet.

Damit haben wir aber auch bereits das Problem der scheinbaren Akausalität der Theorie gelöst: Im System $\bar{x}^i$, in dem $\bar{\psi}_{ik} = 0$, also das Gravitationspotential wegtransformiert ist, wird (10.1.3)

$$\eta^{ik}\,\omega_{,\bar{i}}\,\omega_{,\bar{k}} = 0. \tag{10.2.18}$$

In diesem renormierten Koordinatensystem ergeben sich die gleichen Charakteristiken wie im flachen Raum. Die in (10.2.3) scheinbar vorhergesagte Überlichtgeschwindigkeit ist durch die Benutzung von Koordinatenmaßstäben zu erklären, deren Länge nicht mit der physikalischer Maßstäbe übereinstimmt. Wenn wir das Bild einer flachen Raum-Zeit benutzen wollen, in der Maßstäbe schrumpfen und Uhren langsam gehen, so ergibt sich eine Raum-Zeit-abhängige Grenzgeschwindigkeit, deren Effekte ja gerade im Shapiro-Experiment gesucht werden.

Abschließend bleibt noch eine Fragestellung offen: Wir haben uns in den bisherigen Überlegungen immer auf die erste Ordnung in der Kopplungskonstante f beschränkt und so eine lineare Theorie der Gravitation erhalten. Woher stammen die Nichtlinearitäten der Einsteinschen Theorie? Durch Divergenzbildung sieht man, daß (10.1.2a) den Erhaltungssatz

$$T_{ik,}{}^{k} = 0 \tag{10.2.19}$$

impliziert. Dieser Erhaltungssatz kann aber nicht für den Energie-Impulstensor der Materie allein gültig sein (da dann Teilchen im Gravitationsfeld keine Energie gewinnen bzw. abgeben könnten). Der Energie-Impulstensor T_{ik} der Materie, der in (10.1.1) als Quelle des Feldes angesetzt wurde, ist demnach durch den Energie-Impulstensor des Gravitationsfeldes selbst zu ergänzen. Das Gravitationsfeld erweist sich daher als selbstgekoppelt, was die Nichtlinearitäten der Theorie erklärt, da die Quelle des Feldes der Energie-Impulstensor ist, das Feld aber selbst Energie und Impuls besitzt. Ergänzt man (10.1.1) auf eichinvariante Weise durch den Energie-Impulstensor des Feldes v_{ik}, so ergibt sich

daraus eine Reihenentwicklung der vollen Lagrange-Funktion der allgemeinen Relativitätstheorie, so daß man auf diese Art die Einsteinsche Theorie in ihrer vollen Nichtlinearität zurückgewinnt[8].

Damit haben wir gesehen, daß der Versuch, eine lorentzkovariante Gravitationstheorie aufzustellen, uns wieder auf die Einsteinsche Theorie zurückgeführt hat, wenn wir von einer eichinvarianten (Spin-2-) Theorie ausgehen. Die feldtheoretischen Überlegungen haben uns aber einen neuen Gesichtspunkt der Analyse des Raum-Zeit-Problems gebracht, der den bisher in diesem Buch verwendeten Einsteinschen Gesichtspunkt auf wertvolle Weise ergänzt.

Aufgaben

1. Verifiziere die Invarianz von (10.2.2) unter (10.2.4, 5, 6) für $f^2 \approx 0$!

2. Berechne den Shapiro-Effekt.
   Anleitung: In dem Bild, wo der Raum als flach und die Lichtgeschwindigkeit ortsabhängig angesehen wird, entnimmt man aus der linearen Näherung

$$\mathrm{d}s^2 = (1+2U)\,\mathrm{d}t^2 - (1-2U)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2,$$

$$c(x) = \sqrt{\frac{g_{00}}{|g_{11}|}} = 1 + 2U < 1. \tag{10.2.20}$$

   Das Gravitationspotential hat auf elektromagnetische Vorgänge also etwa die Wirkung einer raumabhängigen Dielektrizitätskonstante und Permeabilität[9]

$$\epsilon = \mu = 1 - 2U > 1.$$

   Zum Shapiro-Effekt tragen bei: a) Die relativistischen Korrekturen zu den Planetenbahnen, b) die durch die Ortsabhängigkeit von c bewirkte Krümmung des Lichtstrahls, c) die verringerte Geschwindigkeit. Hier soll der Haupteffekt c) betrachtet werden. Wir nähern den Lichtstrahl durch eine Gerade und nehmen der Einfachheit halber Erde und Venus im gleichen Abstand von der Sonne an. Die Lichtlaufzeit ist

$$t = \int \frac{\mathrm{d}x}{c(x)} = x + \int \frac{2\mathcal{M}G}{r}\,\mathrm{d}x = x + \Delta R.$$

   ΔR ist die scheinbare Abstandsvergrößerung.

[8] Durch geeignete Variablenwahl kann diese Reihe aufsummiert werden, vgl. S. Deser, GRG **1**, 9 (1970).

[9] W. Thirring, Ann. Phys. (N. Y.) **16**, 89 (1961).

$$\Delta R = 4\mathcal{M}G \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\Big|_0^R \approx 4\mathcal{M}G \ln \frac{2R}{a}. \tag{10.2.21}$$

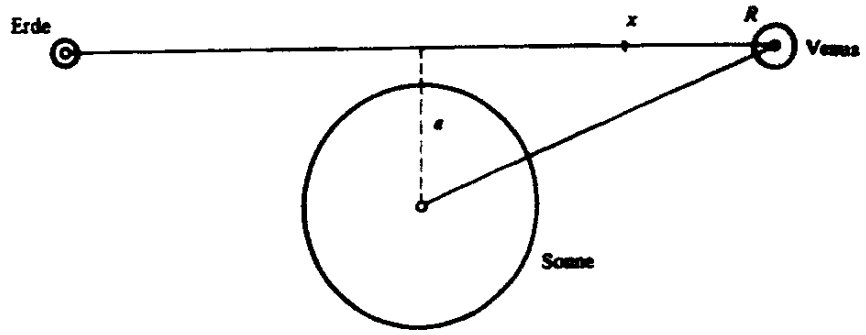

Abbildung 10.2: Zum Shapiro-Effekt.

Da $4\mathcal{M}G = 6\,\text{km}$, $\ln \frac{2R}{a} \approx 10$, beträgt die scheinbare Abstandsvergrößerung, die sich als scheinbare Ausbuchtung in der Venusbahn auswirkt, $\Delta R \approx 60\,\text{km}$.

10.3 Verallgemeinerte Gravitationstheorien

In Abschnitt 10.1 haben wir die Skalar-Tensor-Theorie der Gravitation als mögliche Verallgemeinerungen der Einsteinschen Relativitätstheorie erwähnt. Wir wollen hier diese Theorie kurz[10] untersuchen, wobei wir uns auf die lineare Näherung beschränken wollen, da diese für die Diskussion der interessantesten Effekte genügt. Durch Variablentransformation können in dieser Näherung auch einige der neueren Ansätze für Gravitationstheorien mit skalarem Anteil auf die nachfolgend diskutierte Form gebracht werden, z. B. die sich aus der Stringtheorie ergebende „dilaton gravity".

Die Lagrange-Funktion der Skalar-Tensor-Theorie lautet in linearer Näherung

$$\begin{aligned} L = \tfrac{1}{2}\left(\psi_{ik,j}\psi^{ik,j} - 2\psi_{ik,j}\psi^{jk,i} - \psi^{,i}\psi_{,i} + 2\psi^{,ik}{}_{,k}\psi_{,i}\right) \\ + \tfrac{1}{2}\phi_{,i}\phi^{,i} - f\psi_{ik}T^{ik} - g\phi T + L_M. \end{aligned} \tag{10.3.1}$$

Wählen wir für ψ_{ik} die harmonische Eichung (10.1.4a), so erhalten wir aus (10.3.1) die Feldgleichungen

$$\Box\phi = -gT, \qquad \Box\psi_{ik} = -f\left(T_{ik} - \tfrac{1}{2}\eta_{ik}T\right). \tag{10.3.2}$$

[10] Vgl. Ausführlicheres dazu im Überblicksartikel R.U. Sexl, Fortschr. Physik **15**, 269 (1967).

Für eine Punktmasse mit $T_{ik}(x) = \mathcal{M}\,\mathrm{diag}\,(1,0,0,0)\,\delta(\boldsymbol{x})$ ist

$$o = -g\mathcal{M}/4\pi r, \qquad w_{ik} = -\frac{f\mathcal{M}}{8\pi r}\,\mathrm{diag}\,(1,1,1,1). \tag{10.3.3}$$

Überlegungen, die völlig analog zu denen des Abschnitts 10.2 sind, zeigen, daß im Fall der Skalar-Tensor-Theorie die Metrik des Riemannschen Raumes durch

$$\mathrm{d}s^2 = (\eta_{ik} + 2fw_{ik} + 2go\eta_{ik})\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k =: g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k \tag{10.3.4}$$

gegeben ist. Wegen $g_{00} = 1 + 2fw_{00} + 2go = 1 - 2(f^2 + 2g^2)\mathcal{M}/8\pi r$ ist

$$f^2 + 2g^2 = \kappa \tag{10.3.5}$$

für die Übereinstimmung mit der Newtonschen Theorie notwendig. Diese Relation zeigt, daß skalares Feld ($2g^2$) und Tensorfeld (f^2) beide zur Gravitationsanziehung beitragen (eine Vektortheorie hätte dagegen eine abstoßende Komponente zur Gravitationswechselwirkung hinzugefügt).

Für das Linienelement ergibt sich aus (10.3.3) bis (10.3.5) in linearer Näherung

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \alpha_1\frac{M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \beta_1\frac{M}{r}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2, \tag{10.3.6}$$

wobei

$$\alpha_1 = 2, \qquad \beta_1 = 2\,\frac{f^2 - 2g^2}{f^2 + 2g^2}. \tag{10.3.7}$$

Während sich daraus die in Kapitel 4 diskutierte Rotverschiebung von Spektrallinien genau wie in der Einsteinschen Theorie ergibt, erhalten wir mit Hilfe von (4.3.27) für die Lichtablenkung

$$\delta = \frac{f^2}{f^2 + 2g^2}\,\frac{4M}{R}. \tag{10.3.8}$$

Die Lichtablenkung ist daher kleiner als die von der Einsteinschen Theorie vorhergesagte. Das ist darauf zurückzuführen, daß der skalare Anteil des Gravitationsfeldes keinen Beitrag zur Lichtablenkung liefert, da in einer rein skalaren Theorie die Metrik der Raum-Zeit konformflach ist und damit die Null-Geodätischen genau wie im flachen Raum verlaufen, wie am einfachsten aus der Charakteristikenbedingung folgt. Während wir eine Perihelverschiebung in der hier diskutierten linearen Näherung nicht herleiten können, sind wir in der Lage, zwei Effekte zu skizzieren, die für Skalar-Tensor-Theorien charakteristisch sind.

10.3.1 Die Veränderlichkeit der Gravitationskonstante

Es zeigt sich, daß bei einer Ergänzung der hier verwendeten linearen Lagrange-Funktion (10.3.1) zu einer vollen nichtlinearen und kovarianten Theorie das skalare Feld φ die Rolle einer variablen Gravitationskonstante spielt. Dies war sogar der Ausgangspunkt für alle Überlegungen über Skalar-Tensor-Theorien. Man versuchte nämlich, ebenso wie die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante auch die dimensionslose Gravitationskonstante (8.1.29) auf rein theoretischem Wege (ohne Messung) herzuleiten. Nun erschien es zwar möglich, die Feinstrukturkonstante $\alpha = 1/137$ auf eine Kombination von Faktoren wie π, e zurückzuführen (wenn dies auch bis heute nicht geglückt ist), doch schien eine ähnliche Überlegung für die Gravitationskonstante $\alpha_G = 5.9 \cdot 10^{-39}$ wegen der Kleinheit dieser Konstante aussichtslos. Dirac versuchte daher den Ansatz

$$\alpha_G \sim \tau/t_0, \tag{10.3.9}$$

wobei $\tau = \hbar/mc^2 \approx 10^{-23}\,\mathrm{s}$ die Zeit ist, die Licht braucht, um die Comptonwellenlänge eines typischen Elementarteilchens zu durchlaufen (natürliche Zeiteinheit) und $t_0 \approx 10^{17}\,\mathrm{s}$ das Alter des Universums angibt. Aus (10.3.9) folgt eine Veränderlichkeit der Gravitationskonstante, die mit zunehmendem Alter des Universums abnehmen sollte. Wenn sich auch diese Idee Diracs nicht in ihrer ursprünglichen Form verwirklichen ließ, so hat sie doch für Erweiterungen der Einsteinschen Gravitationstheorie Anlaß gegeben, eben die Skalar-Tensor-Theorien, die dann ähnliche Veränderlichkeiten der Gravitationskonstante vorhersagten[11]. Diese Ideen wurden vor allem von Jordan und Thiry diskutiert und später von Dicke und Brans aufgegriffen.

Der Vollständigkeit halber sei noch eine zweite, ähnliche Idee Diracs erwähnt, die Anlaß zu einer anderen Verallgemeinerung der allgemeinen Relativitätstheorie war. Nach Tabelle 5.1, Abschnitt 5.9, ergibt sich aus Dichte ρ und sichtbarem Radius $\mathcal{R}$ des heutigen Universums eine Gesamtmasse des sichtbaren Teiles von etwa $\mathcal{M}_{\mathrm{Univ}} \approx 10^{55}\,\mathrm{g} \approx 10^{79}\,m$ (m ist die Protonenmasse). Dies veranlaßte Dirac zu dem Ansatz

$$\frac{\mathcal{M}_{\mathrm{Univ}}}{m} = (t_0/\tau)^2 = 10^{80}, \tag{10.3.10}$$

der eine ständige Vergrößerung der sichtbaren Masse des Universums mit dem Weltalter vorhersagt. Dies könnte man unter anderem auf ständige Neuschaffung von Materie (Continuous Creation) zurückführen, was eine der Ideen der sogenannten Steady-State-Theorie ist.

Die hier erwähnten Hypothesen sind nicht nur aus physikalischen, sondern auch aus erkenntnistheoretischen und geistesgeschichtlichen Gründen interes-

[11] Wegen einer Diskussion und neueren Beobachtungsdaten vergleiche man folgende Artikel: P. A. M. Dirac; V. Canuto; R. D. Reasenberg; R. C. Ritter; alle in Ruffini (1982); P. A. M. Dirac, in Perlmutter & Scott (1979); I. Shapiro, in Held (1980); R. D. Reasenberg, Proc. GRG9 Conference, Jena 1980; ds., in Bergmann & de Sabbata (1980).

sant. Ihre Grundgedanken stammen aus einer Geisteshaltung, die die Natur durch reines Nachdenken, ohne Zuhilfenahme des Experiments erklären wollte. So sollten auch alle Naturkonstanten nicht dem Experiment entnommen, sondern auf rein theoretischem Wege gewonnen werden. Hauptvertreter dieser Richtung, deren Anstoß vor allem von Einsteins Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie kam, war Eddington, dessen Ausführungen dazu auch heute noch sehr interessant sind. Nach 1945 ist die Physik sehr stark von dieser Grundhaltung abgegangen und sucht die Natur auf einem weit pragmatischeren Weg (der wahrscheinlich auf amerikanische Einflüsse zurückzuführen ist) zu beschreiben.

10.3.2 Die Veränderlichkeit der Ruhmassen

Wir sind nun auch in der Lage, die in Abschnitt 4.4.b) diskutierte mögliche Verletzung der Gleichheit von träger und schwerer Masse zu diskutieren. Diese kommt in Theorien mit veränderlicher Gravitationskonstante auf folgende Weise zustande: In Kapitel 8 (siehe z. B. (8.3.11)) haben wir gesehen, daß die Masse eines Körpers aus den Ruhmassen der beteiligten Teilchen, dem Massenäquivalent der Kompressionsarbeit und dem (negativen) Massenäquivalent der Gravitationsbindungsenergie zusammengesetzt ist. Hängt nun die Gravitationskonstante von Raum und Zeit ab, so auch die Bindungsenergie, so daß die Masse eines Körpers eine Funktion von Raum und Zeit wird. Da verschiedene Körper verschiedene Anteile von Gravitationsselbstenergie enthalten, ergibt sich daraus, daß auch das Verhältnis der Ruhmassen verschiedener Körper eine Funktion von Raum und Zeit wird. Man kann diese sehr komplexen Effekte am besten dadurch beschreiben, daß Abweichungen der Gleichheit von träger und schwerer Masse auftreten, wie ausführlich von Nordvedt[12] gezeigt wurde.

[12] K. Nordvedt, Phys. Rev. **169**, 1019 (1968); **180**, 1293 (1969).

Kapitel 11

Gravitation und Eichtheorie

Zu Beginn der Siebzigerjahren haben sich in der Teilchenphysik die Methoden und Ideen der Quantenfeldtheorie wieder durchgesetzt, nachdem längere Zeit hindurch vor allem phänomenologische Ansätze im Vordergrund standen, die sich weitgehend von den Zielsetzungen der allgemeinen Relativitätstheorie unterschieden, in der man seit 1915 im wesentlichen mit einer einzigen Lagrangefunktion ausgekommen war. Die neue Richtung der Teilchenphysik hat auch die Tendenz belebt, eine vereinheitlichte Theorie aller Wechselwirkungen aufzustellen.

Grundlage der neuen Entwicklungen ist das Prinzip der Eichtheorie, das erstmals im Jahre 1954 von Yang & Mills formuliert wurde und um 1970 durch Fortschritte auf dem Gebiete der Renormierung und der spontanen Symmetriebrechung wieder aktuell geworden ist, gipfelnd in der Aufstellung des sog. „Standardmodells" der Elementarteilchenphysik. Die Ideen der klassischen Aspekte der Eichtheorie werden in Abschnitt 11.5 diskutiert. Zunächst soll aber ein formaler Aspekt im Vordergrund stehen, der den Zusammenhang zur allgemeinen Relativitätstheorie herstellt, nämlich der Begriff der kovarianten Ableitung und der Übertragung (Konnexion), der im Formalismus der Eichtheorien eine zentrale kinematische Rolle spielt. Darauf aufbauend hatte Utiyama im Jahre 1956 auf die Analogie zum Formalismus der Relativitätstheorie hingewiesen, und seither gab es zahlreiche Versuche, auch die Gravitationstheorie als Eichtheorie aufzubauen. Die teilchenphysikalischen Erfolge der Eichtheorie in den 70er Jahren verstärkten diese Tendenz.

Wir wollen in diesem Kapitel den kinematischen und dynamischen Rahmen klassischer Eichtheorien – also ohne Quantisierungsproblem – auf einem mittleren Abstraktionsniveau darlegen und mit jenem der allgemeinen Relativitätstheorie vergleichen, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszustreichen.

Dabei werden sich auch einige mögliche Verallgemeinerungen der Gravitationstheorie ergeben.

Im folgenden werden außer den differentialgeometrischen Methoden auch Liegruppen eine wesentliche Rolle spielen[1]. Dies ergibt sich aus dem Trend der Teilchenphysik, den empirisch gefundenen Teilchenmultipletts Darstellungen geeigneter Gruppen zuzuordnen und ihre Wechselwirkung durch Austausch von Quanten (Photonen, W-Bosonen, Gluonen, ...) eines zu der Gruppe gehörigen „Eichfeldes" zu beschreiben. Für nichtkommutative Gruppen ergibt sich dabei – wie in der Relativitätstheorie – eine Selbstwechselwirkung des Eichfeldes. Daher versucht man weiter, die Wechselwirkungen von Eichfeldern, die zu verschiedenen Gruppen gehören, als Selbstwechselwirkung eines einzigen Eichfeldes einer umfassenden Gruppe zu deuten und damit die Theorie immer weitergehend zu vereinheitlichen. Um die Gravitation mitzuerfassen, gilt es, eine ihr zugrundeliegende Gruppe aufzuspüren und sie mit den übrigen Gruppen in eine Gesamtgruppe einzubauen. Im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie haben wir dabei gelegentlich (Abschnitt 7.6 und 9.4) die Lorentzgruppe erwähnt. Sie wird auch im folgenden eine wichtige Rolle spielen, sich aber dennoch als etwas zu klein erweisen.

11.1 Übertragungen in Vektorbündeln

Wir wollen hier den in Abschnitt 7.6 eingeführten Begriff der Übertragung einerseits axiomatisch und basisfrei formulieren, ihn andererseits auch soweit verallgemeinern, wie dies aufgrund der heutigen Modelle der Elementarteilchenphysik geboten erscheint.

Eine Übertragung auf einer Mannigfaltigkeit X^n erlaubt es, Vektoren zu vergleichen, die zu Tangentialräumen zweier infinitesimal benachbarter Punkte gehören, und dadurch eine kovariante oder absolute Differentiation D von Vektorfeldern einzuführen. Dabei ist es offenbar zunächst aber unwichtig, daß diese Vektoren tatsächlich *Tangentialvektoren* sind. (Die Definition in 7.1 zeigt, daß Tangentialräume in natürlicher Weise mit der Struktur einer Mannigfaltigkeit X^n „mitgeliefert" sind.) Vielmehr genügt es, sich vorzustellen, daß an jedem Punkt $P \in X^n$ eine „Kopie" $\mathbf{V}_P$ (d. i. ein isomorphes Bild) irgendeines fest vorgegebenen Vektorraumes $\mathbf{V}$ angebracht ist. (Diese Verallgemeinerung wurde bereits 1919 von R. König (Jb. Dt. Math. Ver. **28**, 213) betrachtet.) Das typische Beispiel aus der Teilchenphysik ist der „Isospinraum".

Ein derartiges Gebilde heißt ein *Vektorraumbündel* (kürzer: *Vektorbündel*) über der Basis X^n mit Standardfaser $\mathbf{V}$, symbolisch $E(X^n, \mathbf{V})$; die Vektorräume $\mathbf{V}_P$ heißen seine *Fasern*. Die Verallgemeinerung des Tangentialvektorfeldes in diesem Rahmen ist der Begriff des *Schnittes* eines Bündels: ein Schnitt v ordnet jedem $P \in X^n$ einen Vektor $v(P) \in \mathbf{V}_P$ aus der Faser über P zu. Schnitte können wie Tangentialvektorfelder punktweise addiert und mit

[1] Die hier benötigten Hilfsmittel findet man z. B. in Sexl & Urbantke (1992).

Funktionen auf X^n multipliziert werden. Die *Faserdimension* $f = \dim \mathbf{V}$ kann durchaus von n verschieden sein, und selbst für $f = n$ hat $\mathbf{V}_P$ mit dem Tangentialraum T_P i. a. nichts zu tun. Im weiteren ist stets $f < \infty$ angenommen.

Spezialfälle aber sind: 1. Das *Tangentialbündel* $T(X^n)$ mit $\mathbf{V}_P := T_P$ und 2. Bündel, die mit $T(X^n)$ in natürlicher Weise „assoziiert" sind, etwa das *Kotangentialbündel* $T^*(X^n)$, wo $\mathbf{V}_P := T_P^*$, und allgemeiner Tensorbündel $T_b{}^a(X^n)$, wo $\mathbf{V}_P = T_P \otimes \ldots \otimes T_P^* \otimes \ldots$

In analoger Weise kann man mit einem gegebenen Vektorbündel $E(X^n, \mathbf{V})$ über X^n weitere Bündel $E^*(X^n, \mathbf{V}^*)$, $E_b^a(X^n, \mathbf{V}_b^a)$ usw. assoziieren und zu zwei Bündeln $E_1(X^n, \mathbf{V}_1)$, $E_2(X^n, \mathbf{V}_2)$ die direkte Summe $(E_1 \oplus E_2)(X^n, \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2)$ und das Tensorprodukt $(E_1 \otimes E_2)(X^n, \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2)$ bilden: die algebraischen Operationen erfolgen in allen diesen Fällen faserweise. Ist $\mathbf{V}$ ein *komplexer* Vektorraum, so ist hier auch die Bildung des *komplexkonjugierten Vektorraums* $\bar{\mathbf{V}}$ wichtig, der aus den (komplexwertigen) *anti*linearen Funktionalen auf $\mathbf{V}^*$ besteht, während $\mathbf{V}^*$ natürlich aus *komplexwertigen* linearen Funktionalen auf $\mathbf{V}$ besteht. Zu $v \in \mathbf{V}$ komplexkonjugiert ist per def. das antilineare Funktional $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, das jedem $a \in \mathbf{V}^*$ die zu $a(v)$ konjugiert-komplexe Zahl zuweist. (Vgl. mit der Einbettung $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}^{**}$, Abschnitt 7.3!)

Da in einem späteren Abschnitt von globalen Eigenschaften zu reden sein wird, soll bereits hier erwähnt werden, daß es wegen der im allgemeinen Fall nur „losen" Zuordnung $P \to \mathbf{V}_P$ nicht genügt, die Standardfaser $\mathbf{V}$ zu kennen, um das Bündel im Großen (d. h. über ganz X^n) zu charakterisieren, wie folgende Abbildung illustrieren möge, in der uns die Gesamtheit der Fasern als eigene Mannigfaltigkeit, die *Bündelmannigfaltigkeit* (hier als „Band") entgegentritt:

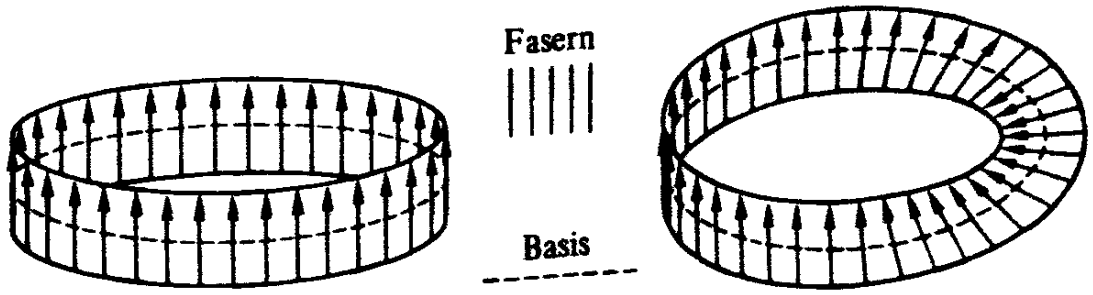

Abbildung 11.1: Die Bündel $E'(\mathbf{S}^1, \mathbf{R}^1)$ und $E''(\mathbf{S}^1, \mathbf{R}^1)$ sind als Ganzes in keinem brauchbaren Sinn gleichwertig ($\mathbf{S}^1$ = Einheitskreis). Dies ist nur bei Beschränkung auf Teilstücke der Basis $\mathbf{S}^1$ der Fall.

E' ist im Großen topologisch $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^1$ (sog. „triviales Bündel"), während E'' dagegen verdrillt ist. Das Tangentialbündel von $\mathbf{S}^1$ etwa ist vom trivialen Typ E', wie man sich leicht plausibel macht. Die genauen, die Topologie der Bündelmannigfaltigkeit mit erfassenden Definitionen für Vektorbündel und die oben erwähnten Operationen mit ihnen, wie sie in Lehrbüchern (vgl. Dieudonné

III + IV (1976)) zu finden sind, berücksichtigen automatisch Möglichkeiten der Art von Abbildung 11.1 und sorgen z. B. auch dafür, daß das duale Bündel zu E' wieder, wie man es intuitiv erwarten würde, vom Typ E' und nicht etwa vom Typ E'' wird, und umgekehrt.

Die Einführung einer (linearen) *Übertragung (Zusammenhang, Konnexion)* im Vektorbündel erfolgt wie in Abschnitt 7.6, wobei das dort verwendete n-Bein-Feld $\{e_j\}$ durch eine Basis von Schnitten $\{b_I, I = 1, \ldots, f\}$ zu ersetzen ist. (Eine Übertragung im Tangentialbündel von X^n nennen wir weiterhin kürzer lineare oder affine *Übertragung auf* X^n.) Basisfrei können Übertragungen durch Formalisierung der Eigenschaften der zugehörigen kovarianten Differentiation eingeführt werden. Axiomatisch ist eine *kovariante Differentiation* D in einem Vektorbündel eine Vorschrift, die jedem Tangentialvektorfeld u und jedem Schnitt ψ des Bündels einen Schnitt $\mathrm{D}_u\psi$ zuordnet, seine kovariante Ableitung nach u, wobei

$$\begin{aligned}
&1)\quad \mathrm{D}_u(\varphi+\psi) = \mathrm{D}_u\varphi + \mathrm{D}_u\psi && \text{(Additivität)}\\
&2)\quad \mathrm{D}_u(f\psi) = u(f)\psi + f\mathrm{D}_u\psi && \text{(Produktregel)}\\
&3)\quad \mathrm{D}_{fu+v}\psi = f\mathrm{D}_u\psi + \mathrm{D}_v\psi && \text{(Linearität der Übertragung).}
\end{aligned} \tag{11.1.1}$$

Dabei ist f eine Funktion auf X^n, φ ein weiterer Schnitt, v ein weiteres Tangentialvektorfeld. Das *kovariante* (oder *absolute*) Differential $\mathrm{D}\psi$ wird als „E-wertige 1-Form" definiert, wobei $(\mathrm{D}\psi)(u)$ für jedes Vektorfeld u der Schnitt

$$(\mathrm{D}\psi)(u) := \mathrm{D}_u\psi \tag{11.1.2}$$

ist. Daraus ergeben sich die Regeln

$$\begin{aligned}
&1')\quad \mathrm{D}(\varphi+\psi) = \mathrm{D}\varphi + \mathrm{D}\psi\\
&2')\quad \mathrm{D}(f\psi) = \mathrm{d}f\otimes\psi + f\mathrm{D}\psi.
\end{aligned} \tag{11.1.1'}$$

Konkret wird eine Übertragung oder Differentiation über ihre Wirkung auf eine Schnittbasis $\{b_I\}$ festgelegt durch Angabe der Zerlegung (vgl. (7.6.2))

$$\boxed{\mathrm{D}b_I = \omega^J{}_I \otimes b_J} \quad \text{oder} \quad \mathrm{D}_u b_I = \omega^J{}_I(u)\, b_J, \tag{11.1.3}$$

wo also $(\omega^J{}_I)$ eine Matrix von 1-Formen ist, die *Übertragungsmatrix*. Wie sofort aus 1'), 2') folgt, ändert sie sich bei Basiswechsel $\{b_I\} \to \{\bar{b}_I = S^J{}_I b_J\}$ analog zu (7.6.5). Wählen wir noch eine Tangentialbasis $\{e_i\}$ mit Kobasis $\{e^i\}$, so können wir $\omega^J{}_I$ zerlegen gemäß

$$\omega^J{}_I = A^J{}_{Ii}\, e^i \quad \text{oder} \quad \omega^J{}_I(e_i) = A^J{}_{Ii}, \quad \mathrm{D}_{e_i} b_I = A^J{}_{Ii}\, b_J \tag{11.1.4}$$

it den von $\{b_I\}$, $\{e_i\}$ und der vorliegenden Übertragung abhängigen *Über-*
agungskoeffizienten $A^J{}_{Ii}$ (vgl.(7.6.1)). Für einen beliebigen Schnitt ψ mit
er Komponentenzerlegung $\psi = \psi^I b_I$ sind die Komponenten ψ^I gewöhnliche
unktionen, und aus den Regeln 1), 2), 3) ergibt sich daher $D\psi = (D\psi)^I \otimes b_I$,
obei

$$\boxed{(D\psi)^I := d\psi^I + \omega^I{}_J\,\psi^J} \tag{11.1.5}$$

$$D_{e_i}\psi = \psi^I{}_{;i}\,b_I \quad \text{mit} \quad \psi^I{}_{;i} = e_i(\psi^I) + A^I{}_{Ji}\,\psi^J.$$

Wir dehnen nun die Operation D auf die zu $E(X^n, \mathbf{V})$ assoziierten Bündel
$\mathcal{T}^*$, E^a_b usw. aus. Im Prinzip könnte man ja in jedem dieser Bündel eine eige-
e Übertragung definieren, die von der in E definierten völlig unabhängig ist
nd wieder eine neue Struktur in die Theorie einführt. (Bei der Konstruktion
on Feldtheorien ist es stets wichtig, sich zu überlegen, wieviele unabhängige
trukturen man einführen will, und bei der Analyse einer vorgelegten Theorie
nuß man zunächst die vorhandenen Strukturen und etwaige Abhängigkeiten
wischen ihnen feststellen.) Im Sinn eines „Prinzips der Sparsamkeit bei der
Einführung neuer Strukturen" ist es nun interessant zu bemerken, daß es eine
natürliche Art gibt, aus D eindeutig eine entsprechende Operation in den as-
soziierten Bündeln zu konstruieren, die deshalb wieder mit D bezeichnet wird.
Dies geschieht durch die Forderung, daß „Übertragung in den Nachbarpunkt"
und „Bildung von inneren Produkten (Kontraktion), Tensorprodukten, direk-
ten Summen und komplex-Konjugiertem" *kommutieren* im Sinne von: „inneres
Produkt im Nachbarpunkt = inneres Produkt der dorthin übertragenen Fak-
toren", „Übertragung des Tensorprodukts = Tensorprodukt der übertragenen
Faktoren" etc. Aus unserer infinitesimalen Heuristik ergibt sich, daß wir axio-
matisch für direkte Summen Additivität und für Produkte stets Leibniz-Regeln
der Art

$$D_u(\psi_1 \otimes \psi_2) = ({}_1D_u\,\psi_1) \otimes \psi_2 + \psi_1 \otimes {}_2D_u\,\psi_2 \tag{11.1.6}$$

$$u(\langle \varphi, \psi \rangle) = \langle D_u\varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, D_u\psi \rangle$$

fordern werden. Dabei können im ersten Fall ψ_1, ψ_2 Schnitte zweier verschie-
dener Bündel E_1, E_2 mit Differentiationen ${}_1D$, ${}_2D$ sein, während im zweiten
Fall φ, ψ Schnitte dualer Bündel sind und $\langle\ ,\ \rangle$ das innere Produkt zwischen
Kovektor und Vektor bezeichnet. Daß dies die Operation D im dualen Bündel
festlegt, sieht man etwa mittels einer Schnittbasis $\{b_I\}$ und ihrer dualen Basis
$\{b^I\}$: (11.1.6) ergibt sofort

$$\langle D_u b^I, b_J \rangle = -\omega^I{}_J(u), \quad \text{d.h.} \quad D_u b^I = -\omega^I{}_J(u)\,b^J \tag{11.1.7}$$

oder $\boxed{\mathbf{D}b^I = -\omega^I{}_J \otimes b^J.}$

Schließlich benötigen wir noch die *äußere kovariante Ableitung* von *E-wertigen p-Formen*[2], die jedem Punkt $P \in X^n$ ein Element aus $\bigwedge^p(T_P^*) \otimes \mathbf{V}_P$ zuordnen und somit Summen von Produkten $\alpha \otimes v$ sind, wo α eine gewöhnliche p-Form und v ein Schnitt des Bündels E ist. Man gelangt nämlich über diesen Begriff am übersichtlichsten zur Krümmung und den Krümmungsidentitäten. Es genügt, die gewünschte Operation für solche Produkte zu definieren und im übrigen Additivität zu verlangen. Dazu ist es zuvor nötig, das äußere Produkt einer E-wertigen p-Form wie $\alpha \otimes v$ mit einer gewöhnlichen q-Form β zu definieren, was naheliegenderweise durch

$$\beta \wedge (\alpha \otimes v) := (\beta \wedge \alpha) \otimes v$$

und Bilinearität erfolgt. Damit ist erklärt, was $\alpha \wedge \mathrm{D}v$ bedeutet, und wir können nun D für $\alpha \otimes v$ definieren als die E-wertige $(p+1)$-Form

$$\boxed{\mathrm{D}\wedge(\alpha \otimes v) := (\mathrm{d} \wedge \alpha) \otimes v + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{D}v;} \tag{11.1.8}$$

für gewöhnliche p-Formen setzt man natürlich

$$\boxed{\mathrm{D}\wedge\alpha := \mathrm{d} \wedge \alpha.} \tag{11.1.9}$$

Für die so definierte Operation $\mathrm{D}\wedge$ (vielfach wird hierfür nur D geschrieben, während dann unser obiges D mit ∇ bezeichnet wird) gilt eine (7.5.5.2) und (11.1.6) verallgemeinernde Produktregel, wobei aber zu beachten ist, daß das Symbol $\wedge$ dabei nicht eindeutig ist (und besser etwa mit $\overset{\circ}{\wedge}$ zu bezeichnen wäre: sind v, φ Schnitte zweier Vektorbündel und α, β gewöhnliche Formen, so kann man für die bündelwertigen Formen $\alpha \otimes v$, $\beta \otimes \varphi$ als Produkt

$$(\alpha \otimes v) \overset{\circ}{\wedge} (\beta \otimes \varphi) := (\alpha \wedge \beta) \otimes (v \circ \varphi)$$

definieren; dabei bestehen für $v \circ \varphi$ neben der stets möglichen Interpretation $v \otimes \varphi$ häufig noch andere nützliche bilineare Möglichkeiten). Für E-wertige 1-Formen Φ läßt sich aus (7.5.6') und (11.1.8) die Formel

$$\boxed{(\mathrm{D} \wedge \Phi)(u, v) = \mathrm{D}_u(\Phi(v)) - \mathrm{D}_v(\Phi(u)) - \Phi([u, v])} \tag{11.1.10}$$

gewinnen (Aufgabe).

An dieser Stelle ist nun nachdrücklich auf eine Besonderheit des Tangentialbündels $T(X^n)$ hinzuweisen. Wir können zu jedem Vektorbündel das assoziierte Bündel E_1^1 mit Fasertyp $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ und Schnitte hiervon betrachten. Ein Element von $\mathbf{V}_P \otimes \mathbf{V}_P^*$ definiert (durch Kontraktion) eine lineare Abbildung $\mathbf{V}_P \to \mathbf{V}_P$. Im Fall $E = T(X^n)$ ist dies eine lineare Abbildung $T_P \to T_P$, und

[2] R. König, Jb. Dt. Math. Ver. **41**, 169 (1933).

ein Schnitt des Bündels $T^1_1(X^n) = T(X^n) \otimes T^*(X^n)$ kann in diesem Fall auch als vektorielle 1-Form interpretiert werden (und *nur* in diesem Fall, denn nur hier wird jedem *Tangential*vektor etwas in linearer Weise zugeordnet, was ja zur Definition der 1-Form gehört!) Nur in diesem Fall kann also für einen Schnitt Ψ neben dem kovarianten Differential $D\Psi$ (eine $E^1_1 = T^1_1$-wertige 1-Form!) auch das *äußere* kovariante Differential $D\wedge\Psi$ gebildet werden (eine vektorielle, d. h. T-wertige 2-Form!). Man sieht das auch am Indexbild der Komponenten: Ψ hat Komponenten Ψ^I_J, $D\Psi$ habe (holonome) Komponenten $\Psi^I_{J;k}$ dann können sich *nur* im Fall des Tangentialbündels die Indizes I, J ebenfalls auf die benutzte Tangentialbasis beziehen, $\Psi^I_J \to \Psi^i_j$, und nur dann hat es einen Sinn, die kovariante Ableitung $\Psi^i_{j;k}$ bezüglich j und k zu antisymmetrisieren ($\Psi^i_{[j;k]}$ unterscheidet sich von den holonomen Komponenten von $D\wedge\Psi$ nur um einen Torsionsterm, siehe Aufgabe).

Betrachten wir nun insbesondere den Schnitt $\delta := \delta^J_I b^I \otimes b_J = b^I \otimes b_I$, der die identische Abbildung $\mathbf{V}_P \to \mathbf{V}_P$ vermittelt. Es ist leicht zu sehen (Aufgabe), daß die zweite Bedingung von (11.1.6) gleichwertig ist mit

$$\boxed{D\delta = 0.} \tag{11.1.11}$$

Fürs Bündel $T^1_1(X^n)$ kann $\delta = e^i \otimes e_i$ auch als vektorielle 1-Form gedeutet werden (sogenannte *kanonische (Verschmelzungs)form:* das Tangentialbündel ist mit X^n verschmolzen, das heißt X^n kanonisch zugeordnet), und $D\delta = 0$ impliziert nun keineswegs $D\wedge\delta = 0$. Vielmehr ist die vektorielle 2-Form

$$\boxed{\Theta := D \wedge \delta} \tag{11.1.12}$$

eine wichtige, den Affinzusammenhang auf X^n charakterisierende Größe, seine sogenannte *Torsionsform*. Aus Formel (11.1.10) folgt

$$\boxed{\Theta(u, v) = D_u v - D_v u - [u, v].} \tag{11.1.13}$$

Setzen wir $\Theta = \Theta^i \otimes e_i$ mit gewöhnlichen, nach (7.6.8) transformierenden 2-Formen Θ^i (derartige „partielle Komponentenzerlegungen" mit skalaren p-Formen als Komponenten sind sehr nützlich für praktische Rechnungen), so ergeben obige Regeln aus $\delta = e^i \otimes e_i$

$$\boxed{\Theta = \Theta^i \otimes e_i, \qquad \Theta^i = d \wedge e^i + \omega^i{}_j \wedge e^j} \tag{11.1.14}$$

(1. Cartansche *Strukturgleichung*, vgl. (7.6.7)). Wegen der geometrischen Bedeutung der Torsion siehe z. B. Raschewski (1959) oder Bishop-Crittenden (1964), wegen einer physikalischen Anwendung (Kontinuumstheorie der Versetzungen in Kristallen) etwa Kröners Vortrag zum Deutschen Physikertag 1963.

Aufgaben

1. Beweise Formel (11.1.10).

2. Beweise Formel (11.1.11).

3. $\Phi = \Phi^I_J \otimes b^J \otimes b_I$ sei eine p-Form mit Werten in E^1_1, so daß die Komponenten Φ^I_J gewöhnliche p-Formen sind. Berechne die in der Zerlegung $\mathrm{D}\wedge\Phi = (\mathrm{D}\wedge\Phi)^I_J \otimes b^J \otimes b_I$ aufscheinende Matrix von $(p+1)$-Formen.
Lösung: Bezeichnen wir diese Matrix mit $\mathbf{D}\wedge\mathbf{\Phi}$, so ist

$$\boxed{\mathbf{D}\wedge\mathbf{\Phi} = \mathrm{d}\wedge\mathbf{\Phi} + \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{\Phi} - (-1)^p\mathbf{\Phi}\wedge\boldsymbol{\omega}.} \tag{11.1.15}$$

4. Wodurch unterscheiden sich für eine vektorielle 1-Form Φ die Größen $\mathrm{D}\wedge\Phi$ und $\mathrm{Alt}\,\mathrm{D}\Phi$ (d. i. die Antisymmetrisierung von $\mathrm{D}\Phi$)?
Lösung:

$$\mathrm{D}\wedge\Phi = \mathrm{Alt}\,\mathrm{D}\Phi + C(\Phi\otimes\Theta), \tag{11.1.16}$$

wo C eine Kontraktion bedeutet (Komponenten $\Phi^i_k\Theta^k$).

5. u sei ein Vektorfeld auf X^n und v ein Schnitt eines beliebigen Vektorbündels $E(X^n, \mathbf{V})$. Kann man den Begriff der *Lie-Ableitung* von Tensorfeldern verallgemeinern und $\mathcal{L}_u v$ sinnvoll definieren?

6. Ein Schnitt v von $E(X^n, \mathbf{V})$ sei nur längs einer Teilmannigfaltigkeit $X^m \subset X^n$ definiert. Man überlege sich, daß $\mathrm{D}_u v$ sinnvoll ist, wenn u tangential zu X^m bleibt.

11.2 Parallelverschiebung und Krümmungsform

Heuristisch gesprochen gestattet eine Übertragung in $E(X^n, \mathbf{V})$ zunächst, einen Vektor aus $\mathbf{V}_P$ in eine infinitesimal benachbarte Faser $\mathbf{V}_Q$ zu übertragen. Ein Schnitt v, dessen Werte v_P, v_Q, ... im Sinn der Übertragung *parallel* sind, erfüllt $\mathrm{D}v = 0$ ((Wert in P) = (Wert in Q, nach P übertragen)); man sagt auch, v sei *kovariant konstant*. Diese Gleichung hat im allgemeinen jedoch keine nichttrivialen Lösungen, aus ihr folgen nämlich die nichttrivialen *Integrabilitätsbedingungen*

$$\mathrm{D}\wedge\mathrm{D}v = 0. \tag{11.2.1}$$

Es ist nun bemerkenswert, daß die E-wertige 2-Form $\mathrm{D}\wedge\mathrm{D}v$ (bzw. $(p+2)$-Form $\mathrm{D}\wedge\mathrm{D}\wedge v$, falls v eine E-wertige p-Form ist) in jedem Punkt P nicht von

den Ableitungen von ψ in P, sondern nur vom Schnittwert ψ_P selbst linear-homogen abhängt: ist f eine Funktion auf X^n, so gilt nach unseren Regeln

$$\begin{aligned} \mathrm{D} \wedge \mathrm{D}(f\psi) &= \mathrm{D} \wedge (\mathrm{d}f \otimes \psi + f\,\mathrm{D}\psi) = \mathrm{d} \wedge \mathrm{d}f \otimes \psi - \mathrm{d}f \wedge \mathrm{D}\psi \\ &\quad + \mathrm{d}f \wedge \mathrm{D}\psi + f\mathrm{D} \wedge \mathrm{D}\psi = f\,\mathrm{D} \wedge \mathrm{D}\psi. \end{aligned} \tag{11.2.2}$$

Die Operation D∧D definiert daher eine 2-Form Ω mit Werten in E^1_1 (d.h., in jedem Punkt gehören die Werte $\Omega(u,v)$ zu $\mathbf{V}_P \otimes \mathbf{V}^*_P$) derart, daß ihre Kontraktion mit ψ gleich

$$\boxed{\Omega(\psi) := \mathrm{D} \wedge \mathrm{D}\psi} \tag{11.2.3}$$

ist (bzw. $C(\Omega \wedge \psi)$, falls ψ eine E-wertige p-Form ist – dabei deutet C wie in (11.1.16) die Kontraktion an). Ω heißt die *Krümmungsform* der Übertragung. Für jedes Paar von Tangentialvektorfeldern u, v ist also $\Omega(u,v) = -\Omega(v,u)$ ein Schnitt von E^1_1, und Formel (11.1.10) mit $\Phi = \mathrm{D}\psi$ liefert die hier gültige Version der *Ricci-Identität*

$$\boxed{\Omega(u,v)(\psi) = \mathrm{D}_u(\mathrm{D}_v\psi) - \mathrm{D}_v(\mathrm{D}_u\psi) - \mathrm{D}_{[u,v]}\psi.} \tag{11.2.4}$$

egen wir Ω nach der Schnittbasis $\{b^I \otimes b_J\}$ von E^1_1,

$$\boxed{\Omega = \Omega^J{}_I \otimes b^I \otimes b_J,} \tag{11.2.5}$$

so erhalten wir als Komponenten $\Omega^I{}_J$ gewöhnliche 2-Formen, die die *Krümmungsmatrix* $\mathbf{\Omega}$ der Übertragung bezüglich der Basis $\{b_J\}$ bilden und bei Basiswechsel analog zu (7.6.10) transformieren, wie man sofort aus (11.2.5) abliest. Sie können über $\Omega(b_I) = \Omega^J{}_I \otimes b_J$ ausgewertet werden:

$$\Omega(b_I) = \mathrm{D} \wedge \mathrm{D}b_I = \mathrm{D} \wedge (\omega^J{}_I \otimes b_J) = (\mathrm{d} \wedge \omega^J{}_I) \otimes b_J - \omega^J{}_I \wedge \omega^K{}_J \otimes b_K,$$

also nach Umbenennung der Indizes

$$\boxed{\Omega^J{}_I = \mathrm{d}\omega^J{}_I + \omega^J{}_K \wedge \omega^K{}_I} \quad \text{oder} \quad \boxed{\mathbf{\Omega} = \mathrm{d} \wedge \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}} \tag{11.2.6}$$

(2. Cartansche *Strukturgleichung*, vgl. (7.6.9); in der Matrixversion von (11.2.6) ist zu beachten, daß für „matrixwertige" 1-Formen wie $\boldsymbol{\omega} = (\omega^I{}_J)$ natürlich nicht mehr $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} = 0$ gilt.)

Von fundamentaler Bedeutung ist die 2. *Bianchi-Identität*

$$\boxed{\mathrm{D}\wedge\Omega \equiv 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\mathbf{D}\wedge\mathbf{\Omega} := \mathrm{d}\wedge\mathbf{\Omega} + \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\wedge\boldsymbol{\omega} \equiv 0.} \tag{11.2.7}$$

die man gewinnt, indem man (11.2.6) in $\mathbf{D}\wedge\mathbf{\Omega}$ einsetzt, $\mathrm{d}\wedge\mathbf{\Omega}$ aus der äußeren Ableitung der 2. Strukturgleichung entnimmt und mit deren Hilfe schließlich $\mathrm{d}\wedge\boldsymbol{\omega}$ wieder eliminiert. (Alternativ: $\mathrm{D}\wedge(\mathrm{D}\wedge\mathrm{D}\psi) \equiv (\mathrm{D}\wedge\mathrm{D})\wedge\mathrm{D}\psi$.)

In analoger Weise erhält man für den Spezialfall des Tangentialbündels unter Benutzung der 1. Strukturgleichung (w 11.1.14) die 1. *Bianchi-Identität*

$$\boxed{\mathrm{D}\wedge\Theta \equiv C(\Omega\wedge\delta),\ \text{d. h. } (\mathrm{D}\wedge\Theta)^i \equiv \Omega^i{}_j\wedge e^j} \tag{11.2.8}$$

für die Torsion, die im Fall der Riemanngeometrie (verschwindende Torsion!) eine der Symmetrien des Riemanntensors liefert. Eine derartige Identität hat aber in allgemeinen Bündeln ebensowenig ein Analogon wie die Bildung des Ricci-Tensors aus den in der Zerlegung

$$\Omega^I{}_J = \tfrac{1}{2}\,\Omega^I{}_{Jmn}\,e^m\wedge e^n \quad \text{oder} \quad \mathbf{\Omega} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{\Omega}_{mn}\,e^m\wedge e^n \tag{11.2.9}$$

aufscheinenden *Krümmungskomponenten*: nur wenn auch I, J sich aufs Tangentialbündel und die dort verwendete (Ko)basis $\{e^i\}$ beziehen, ist die zum Ricci-Tensor (2.7.7) führende Kontraktion sinnvoll! (Wenn die Faserdimension $f = n$ ist, kann man auch in allgemeineren Bündeln versuchen, statt der kanonischen Form δ des Tangentialbündels eine *Verschmelzungsform* $\vartheta = \vartheta^I{}_i e^i \otimes b_I$ als *neue Struktur* einzuführen, deren Komponenten $\vartheta^I{}_i$ eine nichtsinguläre $n\times n$-Matrix bilden, und dadurch das Bündel effektiv mit dem Tangentialbündel identifizieren. Die Hindernisse dagegen sind globaler Natur - grob gesprochen kann es sein, daß sich die beiden Bündel im Großen zueinander ähnlich wie E' und E'' in Abbildung 11.1 verhalten: dann kann keine derartige überall stetig variierende Form ϑ existieren).

Wir kommen nun wieder auf die Parallelverschiebung zurück, zunächst in allgemeinen Vektorbündeln. Ein Schnitt ψ, dessen Werte in je zwei Nachbarpunkten zueinander parallel sind, muß die Definitionsgleichung der Parallelität und die zugehörige Integrabilitätsbedingung erfüllen:

$$\mathrm{D}\psi = 0, \qquad \Omega(\psi) = 0 \qquad (\text{d. h. } \Omega^I{}_J\,\psi^J = 0). \tag{11.2.10}$$

Genauer: sollen die Schnittwerte ψ_P parallel sein längs einer Kurve $P = P(\tau)$ in X^n mit Tangentialvektoren $u(\tau)$ (wo $u(f) = \mathrm{d}f(P(\tau))/\mathrm{d}\tau$), so muß

$$\mathrm{D}_{u(\tau)}\psi = 0,\ \text{d. h. } u^i(\tau)\,\psi^I{}_{;i}(x(\tau)) = \frac{\mathrm{d}\psi^I(x(\tau))}{\mathrm{d}\tau} + A^I{}_{Ji}(x(\tau))\,u^i(\tau)\,\psi^J = 0 \tag{11.2.11}$$

gelten. Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist zu jedem vorgegebenen Anfangswert $v^I(\tau = 0)$ längs der ganzen Kurve $P(\tau)$ eindeutig lösbar, die Integrabilitätsbedingung $\Omega(v) = 0$ ist längs der Kurve trivial: $\Omega(u, u) = 0$. Für Parallelität längs einer höherdimensionalen Teilmannigfaltigkeit $X^m \subset X^n$ muß entsprechend gelten

$$\mathrm{D}_u v = 0 \text{ für alle } u \text{ tangential zu } X^m \tag{11.2.12}$$

mit der Integrabilitätsbedingung

$$\Omega(u, v)(v) = 0 \text{ für alle } u, v \text{ tangential zu } X^m. \tag{11.2.13}$$

Es kann sein, daß auf X^m gilt: $\Omega(u, v) \equiv 0$; dann ist die Parallelverschiebung längs X^m für *beliebige* Anfangswerte eindeutig, d. h. wegunabhängig, möglich („*integrabel*"). Es kann auch sein, daß zwar $\Omega(u, v) \not\equiv 0$ auf X^m, aber $\mathbf{\Omega}(u, v)(v) = 0$ nichttriviale Lösungen für v zuläßt (det $\mathbf{\Omega}(u, v) \equiv 0$ auf X^m). In diesem Fall muß für solche Lösungen nachgeprüft werden, ob sie auch $\mathrm{D}_u v = 0$ auf X^m erfüllen (dies kann sogar für $m = n$, d. h. $X^m = X^n$, zutreffen), die Maximalzahl von unabhängigen Lösungen dieser Art ist jedoch kleiner als f. Diese Aussagen gelten allerdings nur lokal: Das Bündel E'' von Abbildung 11.1 hat, wie anschaulich klar ist, keinen stetigen Schnitt ohne Nullstelle; andererseits hat ein linear-homogenes Gleichungssystem wie (11.2.11) bekanntlich Lösungen, die entweder überall oder nirgends verschwinden (Eindeutigkeitssatz!), die Parallelverschiebung eines Faservektors $\neq 0$, einmal herum ausgeführt, kann daher nicht zum Originalwert zurückführen, obwohl auf der eindimensionalen Basismannigfaltigkeit trivialerweise $\Omega \equiv 0$ ist. (Dabei ist hier wichtig zu bemerken, daß Übertragungen stets global existieren (siehe z. B. Dieudonné III, IV (1976)) – die Ursache für die notwendigerweise auftretende Unstetigkeit eines parallelen Schnitts liegt also nicht in einer Unstetigkeit der Übertragung selbst). Im allgemeinen wird jedoch für ein gegebenes X^m mit $m \geq 2$ auch lokal kein paralleler Schnitt existieren, d. h., die Parallelverschiebung zwischen zwei (nicht „infinitesimal benachbarten") Punkten, gemäß (11.2.11) durchgeführt, hängt vom benutzten Weg ab, oder auch: die Verschiebung eines Faservektors längs einer geschlossenen Kurve führt nicht zum Originalwert zurück, selbst wenn der Weg in einer genügend kleinen Umgebung des Ausgangspunktes verbleibt (im Gegensatz zum eben erwähnten Beispiel mit $\Omega \equiv 0$, wo einmal ganz um die Basis $\mathbf{S}^1$ herum verschoben, also ein nichtzusammenziehbarer Weg benutzt werden mußte, um diesen Effekt zu erzielen).

Spezialisieren wir schließlich auf Affinzusammenhänge in X^n, so können wir Tangentialvektoren längs Kurven parallelverschieben. Insbesondere kann man nach Kurven fragen, deren Tangenten $u(\tau)$ längs der Kurve parallel sind (beachte Aufgabe 6 von Abschnitt 11.1):

$$\boxed{\mathrm{D}_{u(\tau)}\, u(\tau) = 0.} \tag{11.2.14}$$

Die so definierten „selbstparallelen" Kurven heißen *Affingeodätische* der Übertragung, bezogen auf den *affinen Parameter* τ, der durch (11.2.14) bis auf „affine" Transformationen $\tau \to a\tau + b$ mitbestimmt ist. Für beliebige Parameter ist statt (11.2.14)

$$u \wedge \mathrm{D}_u u = 0 \tag{11.2.15}$$

zu verwenden (siehe Aufgabe).

Aufgaben

1. Verifiziere die beiden Bianchi-Identitäten (11.2.7), (11.2.8) im Detail.

2. Zeige, daß eine allgemeine Parametertransformation von (11.2.14) zu (11.2.15) führt.

3. Zeige: Eine Nullgeodätische bezüglich der (pseudo-) Riemannmetrik g ist auch Nullgeodätische bezüglich jeder dazu konformen Metrik $\bar{g} = F^2 g$, jedoch nicht bezogen auf einen affinen Parameter. Welche Transformation führt zu einem solchen?

4. Welche Symmetrie des Riemanntensors folgt aus (11.2.8)?

11.3 Fasermetrik, G-Strukturen

Wir sahen, daß einige Begriffe der Riemanngeometrie eine unmittelbare Verallgemeinerung auf beliebige Vektorbündel haben. Dazu gehört auch der Begriff der Riemannmetrik auf X^n, die ja in jedem Tangentialraum T_P ein Skalarprodukt definiert. Die Verallgemeinerung ist zunächst der Begriff einer *Fasermetrik* γ: für jedes $P \in X^n$ sei in $\mathbf{V}_P$ ein *Skalarprodukt* definiert. Wie bereits in der Riemanngeometrie angedeutet, kann man dann auf zweierlei Weise vorgehen: *Entweder* man führt das metrische Tensorfeld (Schnitt des assoziierten Bündels $E_2^0(X^n, \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*)$ explizit mit, *oder* man beschränkt sich auf die ausschließliche Verwendung von Orthonormalbasen $\{b_A\}$, d. h. $\gamma(b_A, b_B) = \gamma_{AB} = \text{const.} = \pm\delta_{AB}$. Dabei sind in jedem Punkt zwei Orthonormalbasen $\{b_A\}$, $\{\bar{b}_A\}$ durch eine Transformation $b_A = S_A^{\bar{B}} \bar{b}_B$ verbunden, wobei nun die Matrix $\mathbf{S}$ nicht mehr eine beliebige nichtsinguläre $f \times f$-Matrix ist, sondern der durch die Invarianz des Skalarprodukts definierten (pseudo-) orthogonalen Untergruppe G der Gruppe $GL(f)$ aller nichtsingulären $f \times f$ Matrizen angehört. Von Ort zu Ort kann $\mathbf{S}$ beliebig innerhalb G variieren. Eine Fasermetrik kann also auch so definiert werden, daß in jedem Punkt $P \in X^n$ eine Basis $\{b_A\}$ für $\mathbf{V}_P$ gewählt und als orthonormal erklärt wird; alle anderen Orthonormalbasen ergeben sich dann durch Anwendung von (ortsabhängigen) Transformationen $\mathbf{S} \in G$.

Dieser zweite Standpunkt ist nur scheinbar „spezieller" oder „weniger kovariant". Tatsächlich ermöglicht er sogar eine Verallgemeinerung, die in der Physik benötigt, aber vom ersten Standpunkt nicht nahegelegt wird. Wir betrachten nämlich jetzt statt der orthogonalen Gruppe irgend eine andere fest gewählte Liesche Untergruppe $G \subset GL(f)$ – und nicht jedes solche G kann durch Invarianz eines oder auch mehrerer Tensoren über $\mathbf{V}$ gekennzeichnet werden, es gibt sogar Fälle, wo $G \subset GL(f)$ überhaupt nicht durch algebraische Bedingungen an die Matrixelemente $S_A^{\bar{B}}$ charakterisierbar ist. [Bei den sog. „Ausnahmegruppen" (exceptional groups) unter den einfachen Liegruppen sind die sie charakterisierenden invarianten Tensoren kompliziert, aber im Prinzip angebbar. Die Gruppe aller Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} e^t & te^t & x \\ 0 & e^t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (t, x, y \text{ reell}),$$

ist ein Beispiel einer „nicht-algebraischen" Gruppe in dem Sinn, daß *keine* treue Matrixdarstellung algebraisch charakterisierbar ist. Die Gruppe der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^\epsilon \end{pmatrix}$ ($t > 0$; ϵ fest, irrational) ist innerhalb $GL(2, \mathbf{R})$ nicht algebraisch charakterisierbar, hat aber offensichtlich andere, algebraisch charakterisierbare treue Matrixdarstellungen.[3]]

Wählen wir nun in jedem Punkt P für $\mathbf{V}_P$ eine Basis $\{b_A\}$ und wenden darauf je alle Transformationen $\mathbf{S} \in G$ an, so erhalten wir eine Klasse von *G-Basen* in jeder Faser $\mathbf{V}_P$. Die Gesamtheit dieser Basen – keine G-Basis ist vor einer anderen ausgezeichnet! – definiert eine *G-Struktur* im Vektorbündel. (Geht man von einem Basissystem aus, das nicht zu *diesen* G-Basen gehört, und wiederholt die Prozedur, erhält man die G-Basen einer *anderen* G-Struktur im Bündel.) Eine Fasermetrik entspricht also einer G-Struktur, wo G eine (pseudo-) orthogonale Untergruppe von $GL(f)$ ist. Eine G-Struktur im Tangentialbündel $T(X^n)$ von X^n heißt kürzer G-Struktur auf X^n.

Die in der Riemanngeometrie verwendete Übertragung hat die Eigenschaft, die Orthonormalität von Vektoren nicht zu zerstören. Wir verallgemeinern dies zunächst auf beliebige Vektorbündel mit Fasermetrik γ. In basisunabhängiger Schreibweise ergibt sich die Bedingung der Erhaltung der Orthonormalität als Leibniz-Regel für das Skalarprodukt:

$$u(\gamma(\varphi, \psi)) = \gamma(\mathrm{D}_u\varphi, \psi) + \gamma(\varphi, \mathrm{D}_u\psi). \tag{11.3.1}$$

Gleichwertig dazu (Aufgabe) ist das Postulat ($\gamma = \gamma_{AB}\, b^A \otimes b^B$)

$$\boxed{\mathrm{D}\gamma = 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\mathbf{D}\gamma := \mathrm{d}\gamma - \boldsymbol{\omega}^T\gamma - \gamma\boldsymbol{\omega} = 0.} \tag{11.3.2}$$

[3]Wir danken den Herren B. Kostant, V. Losert und G. Mack für Diskussionen dieses Punkts.

Dazu gehört die Integrabilitätsbedingung

$$\boxed{\mathrm{D}\wedge\mathrm{D}\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{\Omega}^T\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{\Omega} = 0.} \tag{11.3.3}$$

Definiert man $\Omega_{AB} := \gamma_{AC}\,\Omega^C{}_B$, so sieht man, daß (11.3.3) eine der Symmetrieeigenschaften des Riemanntensors verallgemeinert. (Die verschiedenen Symmetrieeigenschaften sind also völlig verschiedenen strukturellen Ursprungs!)

Wie ist das Vorstehende nun auf beliebige G-Strukturen in Vektorbündeln zu verallgemeinern? Die der Differentiation D zugrundeliegende Übertragung soll also mit einer vorgegebenen G-Struktur verträglich sein, d. h., ist $\{b_A\}$ ein G-Basisfeld, und wird $\{b_A|_Q\}$ in den infinitesimal benachbarten Punkt P übertragen, so soll dabei eine G-Basis, heuristisch $\{b_A|_P + \mathrm{D}_{\epsilon u} b_A\}$, in P entstehen, sie darf sich also von $\{b_A|_P\}$ nur um eine infinitesimal von der Identität abweichende Transformation $\mathbf{S} = \mathbf{1} + \epsilon\boldsymbol{\omega}$ aus G unterscheiden. Aus dieser Heuristik ergibt sich folgendes Postulat für D: Wenn $\mathrm{D}_u b_A = \omega^B{}_A(u)\, b_B$, so gehört die Matrix $\boldsymbol{\omega}(u)$ für jedes u und jede G-Basis $\{b_A\}$ zur Liealgebra von G, oder:

$$\boxed{\text{Bezüglich } G\text{-Basen ist } \boldsymbol{\omega} \text{ eine Liealgebra-wertige 1-Form.}} \tag{11.3.4}$$

Eine solche Übertragung wollen wir kurz als *G-Übertragung* bezeichnen. Für $G = GL(f)$ selbst ergibt sich dadurch keine Einschränkung, die Liealgebra von $GL(f)$ besteht aus allen $f \times f$-Matrizen. Ist G aber eine orthogonale Gruppe, so besteht die Liealgebra nur aus den antisymmetrischen Matrizen, und (11.3.4) stimmt in diesem Fall mit (11.3.2) überein: für eine orthonormale Basis ist $\gamma_{AB} = \delta_{AB} = \text{const.}$, $\mathrm{d}\gamma = 0$, also $\boldsymbol{\omega}^T = -\boldsymbol{\omega}$. (Analog für pseudoorthogonale Gruppen mit $\gamma_{AB} = \pm\delta_{AB}$: $\mathbf{S} = \mathbf{1} + \mathbf{\Sigma}$ läßt γ invariant, wenn $\mathbf{\Sigma}^T\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{0}$, d. h. wegen $\boldsymbol{\gamma}^T = \boldsymbol{\gamma}$: $\boldsymbol{\gamma}\mathbf{\Sigma}$ ist antisymmetrisch). Der „radikalste" Spezialfall für G ist $G = \{\mathbf{1}\}$, wobei für die (in diesem Fall einzige) G-Basis einer derartigen Struktur $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$ gilt (die Liealgebra dieser Gruppe verschwindet ja). Daraus folgt auch $\mathbf{\Omega} \equiv \mathbf{0}$, die Krümmung verschwindet identisch: nach unserer Diskussion der Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung ist eine $\{\mathbf{1}\}$-Übertragung im Bündel ein *Fernparallelismus*, für die G-Basis $\{b_A\}$ ist jedes b_A kovariant konstant. Man beachte aber, daß umgekehrt ein Fernparallelismus (Übertragung mit $\Omega \equiv 0$) nicht eindeutig eine $\{\mathbf{1}\}$-Struktur bestimmt: ist $\{b_A\}$ die G-Basis einer solchen $\{\mathbf{1}\}$-Struktur und $\mathbf{S}$ eine auf X^n konstante Matrix, so ist $\{\bar{b}_A = S_A^B b_B\}$ die G-Basis einer anderen („konjugierten") $\{\mathbf{1}\}$-Struktur, die mit dem Fernparallelismus verträglich ist (und man erhält so auch jede von ihnen). Bei einem Fernparallelismus im Tangentialbündel von X^n – kurz: Fernparallelismus auf X^n – ist zu beachten, daß die Übertragung trotz $\Omega \equiv 0$ im allgemeinen eine nichtverschwindende Torsion aufweist. Die Zusatzforderung $\mathbf{\Theta} \equiv 0$ bewirkt, daß für eine kovariant konstante Kobasis $\{e^i\}$ gilt: $\mathrm{d}e^i = 0$, $e^i = \mathrm{d}x^i$, oder geometrisch: die (natürlich affingeodätischen) Integralkurven

der kovariant konstanten Vektorfelder e_i (d.s. Kurven mit e_i als Tangenten) erzeugen Hyperflächen x^k = const., die mit den Hyperebenen eines flachen affinen Raumes identifiziert werden können.

An dieser Stelle ist wieder auf unser Beispiel von Abbildung 11.1 hinzuweisen. Für E'' kann, wie wir sahen, ein kovariant konstanter und *überall* glatter Schnitt $\not\equiv 0$ gar nicht existieren. Andererseits bedeutet die Angabe einer $\{\mathbf{1}\}$-Struktur ja gerade die Angabe der $\{\mathbf{1}\}$-Basis, so daß in E'' eine $\{\mathbf{1}\}$-Struktur global gar nicht existieren kann. In diesem Sinn sind es durchaus nichttriviale Resultate, daß *in jedem Vektorbündel nicht nur global definierte Übertragungen, sondern im reellen Fall auch global definierte $O(f)$-Strukturen (Riemann-Metriken) existieren* (für pseudoorthogonale Gruppen ist dies bereits nicht mehr der Fall); *zu jeder globalen G-Struktur in einem Vektorbündel (wenn sie existiert) gibt es auch global eine G-Übertragung.* Wir illustrieren anhand von Abbildung 11.1 noch den Begriff der *Orientierung* in einem reellen Vektorbündel, einer G-Struktur, wo $G = GL_+(f)$ die Gruppe aller $f \times f$-Matrizen positiver Determinante ist. Wird (lokal) ein Basissystem $\{b_A\}$ für „rechtshändig" erklärt, so sind per definitionem alle daraus via G erhältlichen Basen rechtshändig, und wenn sich diese Konvention über ganz X^n glatt „ausbreiten" läßt[4], heißt E *orientierbar*. In Abbildung 11.1 ist E' orientierbar, E'' dagegen nicht: beginnt man bei E'' ausgehend von einer Faser die Linien mit gleichgerichteten Pfeilen zu versehen, so kommt man nach einem Umlauf mit verkehrter Pfeilrichtung zur Ausgangslinie zurück. Eine Mannigfaltigkeit X^n heißt orientierbar, wenn es ihr Tangentenbündel ist. Von diesem *inneren* Orientierungsbegriff zu unterscheiden ist die *äußere* Orientierung eingebetteter Teilmannigfaltigkeiten (Orientierung des Normalenbündels).

Wir kommen nun noch zur Analyse der Krümmung Ω einer G-Übertragung. Für eine $O(f)$-Struktur zeigt (11.3.3), daß $\mathbf{\Omega}$ antisymmetrisch ist, also Werte in der Liealgebra von $O(f)$ annimmt. Allgemein zeigen wir nun, daß bezüglich einer G-Basis die Krümmungsmatrix $\mathbf{\Omega}$ ihre Werte $\mathbf{\Omega}(u, v)$ in der Liealgebra von G annimmt wie $\boldsymbol{\omega}$. Dazu führen wir in der Liealgebra von G eine Basis $\{\boldsymbol{G}_a,\ a = 1, \ldots, \dim G\}$ von Erzeugenden ein (d.s. $\dim G$ *konstante* Matrizen). Bekanntlich gelten dann Vertauschungsrelationen der Gestalt

$$[\boldsymbol{G}_a, \boldsymbol{G}_b] := \boldsymbol{G}_a\boldsymbol{G}_b - \boldsymbol{G}_b\boldsymbol{G}_a = C^c{}_{ab}\boldsymbol{G}_c, \tag{11.3.5}$$

wo $C^c{}_{ab}$ die Strukturkonstanten von G bezüglich der gewählten Erzeugendenbasis sind. Dann können wir entwickeln

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^a\boldsymbol{G}_a, \quad \text{d.h. } \omega^A{}_B = \omega^a G^A_{aB}, \tag{11.3.6}$$

wo ω^a $(a = 1, \ldots, \dim G)$ gewöhnliche 1-Formen sind. Für die Krümmungsmatrix ergibt sich

[4] Man beachte, daß für diesen Vorgang – ebenso wie beim Versuch, andere G-Strukturen global zu definieren – im allgemeinen keineswegs eine einzige, überall definierte Schnittbasis benötigt wird, ihre Existenz aber stets für den Erfolg hinreicht.

$$\Omega^A{}_B = \mathrm{d}\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B = \mathrm{d}\omega^a\, G^A_{aB} + \omega^b \wedge \omega^c\, G^A_{bC}\, G^C_{cB},$$

und wegen $\omega^b \wedge \omega^c = -\omega^c \wedge \omega^b$ können wir das auch schreiben

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{d}\omega^a\, \boldsymbol{G}_a + \omega^b \wedge \omega^c\, \boldsymbol{G}_b\, \boldsymbol{G}_c = \mathrm{d}\omega^a \boldsymbol{G}_a + \tfrac{1}{2}\, \omega^b \wedge \omega^c [\boldsymbol{G}_b, \boldsymbol{G}_c],$$

oder wegen (11.3.5) schließlich

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = \Omega^a \boldsymbol{G}_a, \qquad \Omega^a := \mathrm{d}\omega^a + \tfrac{1}{2}\, C^a{}_{bc}\, \omega^b \wedge \omega^c.} \tag{11.3.7}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ ist also ebenfalls Kombination der Basiserzeugenden $\boldsymbol{G}_a$, mithin Liealgebrawertig. (Wir stellen nachträglich etwas überrascht fest, daß bereits in (11.2.6) die Vertauschungsrelationen der linearen Gruppe $GL(f)$ stecken!)

Wir hatten schon zuvor mit einem Vektorbündel durch algebraische Operationen andere Bündel assoziiert und in ihnen Übertragungen definiert. Das allgemeine Prinzip dahinter kann jetzt ohne Auszeichnung des ersten dieser Bündel folgendermaßen beschrieben werden. G sei eine gegebene Lie-Gruppe („Eichgruppe"; dieser Name wird später erklärt; in der Mathematik: Strukturgruppe), $\rho', \rho'', \ldots$ seien Darstellungen von G in den Vektorräumen $\mathbf{V}', \mathbf{V}'', \ldots$, welche als Standardfasern für Vektorbündel $E^{(\rho')} = E', E'', \ldots$ über X^n fungieren, in denen eine $\rho'(G)$-, $\rho''(G)$-, ... -Struktur vorliege, $\rho'(G) \subset GL(f'), \ldots$ vertritt also die vorher von $G \subset GL(f)$ eingenommene Rolle. Wie sind Übertragungen bzw. kovariante Ableitungen $\mathrm{D}', \mathrm{D}'', \ldots$ zu definieren, so daß für Tensorproduktdarstellungen wie $\rho''' = \rho' \otimes \rho''$ stets gilt: Übertragung des Produkts = Produkt der übertragenen Faktoren? Die schon geläufige Heuristik führt zu dem Postulat

$$\mathrm{D}'''(\psi' \otimes \psi'') = (\mathrm{D}'\psi') \otimes \psi'' + \psi' \otimes (\mathrm{D}''\psi''), \tag{11.3.8}$$

wenn ψ', ψ'' Schnitte von E', E'' sind (Leibniz-Regel). Wählen wir nun eine Basis in der (abstrakten) Liealgebra von G und bezeichnen wir ihre Darstellungen via $\rho', \rho'', \ldots$ mit $\{\boldsymbol{G}'_a\}, \{\boldsymbol{G}''_a\}, \ldots$, dann gehört zu ρ''' die Basis $\{\boldsymbol{G}'''_a = \boldsymbol{G}'_a \otimes \mathbf{1}'' + \mathbf{1}' \otimes \boldsymbol{G}''_a\}$. Bei Verwendung einer $\rho'(G)$- bzw. $\rho''(G)$-Basis in E' bzw. E'' und der Produktbasis in $E''' = E' \otimes E''$ haben wir einerseits

$$\boldsymbol{\omega}' = \omega'^a \boldsymbol{G}'_a, \quad \boldsymbol{\omega}'' = \omega''^a \boldsymbol{G}''_a, \quad \boldsymbol{\omega}''' = \omega'''^a (\boldsymbol{G}'_a \otimes \mathbf{1}'' + \mathbf{1}' \otimes \boldsymbol{G}''_a),$$

andererseits ergibt sich aus (11.3.8)

$$\boldsymbol{\omega}''' = \boldsymbol{\omega}' \otimes \mathbf{1}'' + \mathbf{1}' \otimes \boldsymbol{\omega}''.$$

Dies läßt sich nur vereinen, wenn wir $\omega'^a = \omega''^a = \omega'''^a = \ldots = \omega^a$ setzen, d. h.

$$\boldsymbol{\omega}' = \omega^a \boldsymbol{G}'_a, \quad \boldsymbol{\omega}'' = \omega^a \boldsymbol{G}''_a, \ldots, \boldsymbol{\omega}^{(\rho)} = \omega^a \boldsymbol{G}^{(\rho)}_a. \tag{11.3.9}$$

Daraus folgt für die Krümmungsformen Ω', Ω'', ...

$$\boldsymbol{\Omega}' = \Omega^a \boldsymbol{G}'_a, \quad \boldsymbol{\Omega}'' = \Omega^a \boldsymbol{G}''_a, \ldots, \boldsymbol{\Omega}^{(\rho)} = \Omega^a \boldsymbol{G}^{(\rho)}_a, \tag{11.3.10}$$

wo Ω^a aus ω^a gemäß (11.3.7) zu bilden ist. Aus (11.3.10) ergibt sich etwa sofort, wie die Ricci-Identität in assoziierten Bündeln aussieht, etc. Statt D', D'', ... schreiben wir, wie schon früher, einfach D. Die fundamentalen Größen sind also die $\dim G$ Stück 1-Formen ω^a und 2-Formen Ω^a (und nicht die $(\dim \mathbf{V}')^2$, $(\dim \mathbf{V}'')^2$, ... Elemente der Matrizen $\boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\omega}''$, ... und $\boldsymbol{\Omega}'$, $\boldsymbol{\Omega}''$, ..., zwischen denen ja Abhängigkeiten bestehen können). Aus der Spaltenmatrix $\boldsymbol{\Psi}$ der partiellen Komponenten jeder $E^{(\rho)}$-wertigen p-Form Ψ ergibt sich die Spaltenmatrix zu $\mathrm{D}\wedge\Psi$ als $\mathbf{D}\wedge\boldsymbol{\Psi}$, wobei der Matrix-Operator $\mathbf{D} = \mathrm{d} + \boldsymbol{\omega}^{(\rho)} = \mathrm{d} + \omega^a \boldsymbol{G}^{(\rho)}_a$ denselben formalen Regeln genügt wie D.

Für G-Übertragungen auf X^n (d. h. im Tangentialbündel $T(X^n)$) ist neben der Krümmung auch die Torsion definiert. Dabei kann man in Anlehnung an die Riemann-Geometrie fragen, ob es torsionsfreie G-Übertragungen gibt. Für (pseudo-)orthogonale Gruppen G legt diese Bedingung die G-Übertragung *eindeutig* in Termen der G-Struktur allein fest. (Siehe Abschnitt 7.6). Für manche Gruppen G ist Torsionsfreiheit im allgemeinen *nicht* erreichbar (G-Strukturen mit „wesentlicher Torsion"), bei anderen wieder existieren mehrere torsionsfreie G-Übertragungen. Unter den Gruppen G mit[5] $\det \mathbf{S} = 1$ für $\mathbf{S} \in G$ sind die pseudoorthogonalen die einzigen mit eindeutig bestimmter torsionsfreier G-Übertragung (É. Cartan, C. R. **175**, 82 (1922)). Diese Eigenschaft hat wohl dazu geführt, daß Metrik und Übertragung zur Zeit der Aufstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie begrifflich noch nicht getrennt waren. Umgekehrt ermöglichte die Trennung, daß Cartan 1922 auch die Newtonsche Gravitationstheorie unter Inkorporierung des Äquivalenzprinzips geometrisieren konnte („Eichtheorie der Galilei-Gruppe").

Abschließend sei bemerkt, daß die hier gegebene basisabhängige Formulierung von G-Strukturen in Vektorbündeln vermieden werden kann. Wir mußten darauf verzichten, dies auszuführen, da der begriffliche Mehraufwand beträchtlich ist (siehe z. B. Dieudonné III, IV (1976)), wobei aber die globalen Aspekte des „Assoziierens" voll berücksichtigt werden können und vor allem die wesentliche Beziehung zwischen Strukturgruppe und Topologie der Bündelmannigfaltigkeit untersucht wird, die z. B. für die Existenz einer (glatten) Übertragung *auf ganz* X^n notwendig ist.

Aufgaben

1. Zeige (11.3.2) und folgere daraus für den metrischen Faservolumstensor ϵ

[5] Für $n > 2$ kann nach H. Freudenthal (Archiv f. Math. 1960, p. 107) die Forderung $\det \mathbf{S} = 1$ unterbleiben, für $n = 2$ ist $G = \{e^{\Lambda}\mathbf{1}, \Lambda \in \mathbf{R}\}$ Gegenbeispiel.

$$\boxed{D\epsilon = 0.} \tag{11.3.11}$$

(Vgl. Aufgabe 4 von Abschnitt 3.4).
Hinweis: Benutze $\sigma(\epsilon, \epsilon) = \pm 1$ und die Eindimensionalität von $\Lambda^f(\mathbf{V})$.

2. Zu jedem vertikalen Homomorphismus $E' \to E''$ zweier Vektorbündel über X^n (d. h. in jedem $P \in X^n$ eine lineare Abbildung $\mathbf{V}'_P \to \mathbf{V}''_P$) gehört ein Schnitt σ des Bündels $E'^* \otimes E''$ (vgl. das Quotiententheorem!). D′, D″ seien kovariante Ableitungen in E', E'' und D sei die in $E'^* \otimes E''$ gemäß (11.1.6) definierte Ableitung. Man zeige in Verallgemeinerung von (11.1.11), (11.3.2): $D\sigma = 0$ ist gleichwertig damit, daß die zu D′, D″ gehörenden Übertragungen mit dem Homomorphismus kommutieren („Übertragenes Bild = Bild des übertragenen Urbildes").

3. Zeige, daß ω durch Schnittbasiswahl in einem herausgegriffenen Punkt P zum Verschwinden gebracht werden kann, wobei im Falle einer G-Übertragung eine G-Basiswahl ausreicht. Für den Fall eines Tangentialbündels zeige weiter, daß diese Basis genau dann in P holonom ist, wenn in P die Torsion verschwindet. – Vergleiche mit der Realisierung des Äquivalenzprinzips in der Allgemeinen Relativitätstheorie!
Anleitung: $\{b_A(P)\}$ sei Basis in $\mathbf{V}_P$, $\{x^i\}$ ein in der Umgebung von P definiertes Koordinatensystem mit $x^i(P) = 0$. In allen anderen Umgebungspunkten Q werde $\{b_A(Q)\}$ durch Parallelverschiebung von $\{b_A(P)\}$ längs der „radialen" Kurven $x^i(\tau) = \tau x^i(Q)$, $0 \leq \tau \leq 1$, definiert. Dies leistet das Gewünschte (*„radiale Eichung"*).

4. Die geometrische Bedeutung der Liealgebrawertigkeit von $\mathbf{\Omega}$ beruht auf der Parallelverschiebung von Faservektoren längs infinitesimaler geschlossener Kurven. Wie wird die Verallgemeinerung des Resultats von Aufgabe 2, Abschnitt 2.7, lauten?

5. Die (eigentliche) Lorentzgruppe $SO(3,1)$ operiert im komplexdreidimensionalen Raum der selbstdualen antisymmetrischen Tensoren 2. Stufe über den Minkowskiraum bekanntlich (vgl. z. B. Sexl & Urbantke (1992)) wie die komplexe orthogonale Gruppe $SO(3, \mathbf{C})$. Interpretiere nun Aufgabe 4 von Abschnitt 7.6 im Sinn des vorliegenden Abschnitts!

11.4 Topologische Quantenzahlen

Die bisher in Vektorbündeln betrachteten Strukturen (Schnitte, Übertragungen, G-Strukturen) stellen nur einen möglichen *kinematischen* Rahmen dar, in dem physikalische Theorien formulierbar sind. Auf die Bewegungsgleichungen,

denen diese Strukturen zu unterwerfen sind, kommen wir in den nächsten Abschnitten zu sprechen. Hier besprechen wir noch einige differentielle Identitäten und deren Integrale, die unabhängig von jeder Bewegungsgleichung gelten und tatsächlich Konsequenzen der Bianchi-Identität sind. Das Bemerkenswerte daran ist, daß aus ihnen nichttriviale Information über die Bündelstruktur gewonnen werden kann. Betrachtungen dieser Art haben in den letzten Jahren bei gewissen Spekulationen sowohl der Elementarteilchenphysik als auch der Quantentheorie der Gravitation Verwendung gefunden. Aber auch bei der Diskussion möglicher Lagrangefunktionen spielen diese Identitäten eine Rolle, wie wir sehen werden.

Wir beginnen mit einem Scheinparadoxon. Wir betrachten das Tangentenbündel der Kugelfläche $\mathbf{S}^2$ mit der gewöhnlichen Metrik in Polarkoordinaten, $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, und der üblichen Riemannschen Übertragung. Als orthonormale Kobasis nehmen wir $e^1 = d\theta$, $e^2 = \sin\theta d\phi$. Wegen der Zweidimensionalität gibt es zu dieser Basis nur eine einzige unabhängige Übertragungsform $\omega_{12} = -\omega_{21}$, die hier leicht zu $\omega_{12} = -\mathrm{ctg}\,\theta e^2 = -\cos\theta d\phi$ berechnet wird. Daraus ergibt sich die einzige unabhängige Krümmungsform $\Omega_{12} = d \wedge \omega_{12} + 0 = \sin\theta d\theta\, d\phi = e^1 \wedge e^2$. Integrieren wir dies über die Kugeloberfläche $\mathbf{S}^2$, so ergibt sich $\int \sin\theta d\theta\, d\phi = 4\pi$. Andererseits folgt aber aus $\Omega_{12} = d \wedge \omega_{12}$ nach dem Stokesschen Satz

$$4\pi = \int_{\mathbf{S}^2} \Omega_{12} = \int_{\mathbf{S}^2} d \wedge \omega_{12} = \int_{\partial \mathbf{S}^2} \omega_{12} = 0, \tag{11.4.1}$$

weil $\mathbf{S}^2$ leeren Rand hat. Worauf beruht der Widerspruch? Bei der Anwendung des Stokesschen Satzes ist darauf zu achten, daß die Integranden genügend stetig sind. In diesem Beispiel ist die verwendete Kobasis für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ unbrauchbar. Daher ist ω_{12} nicht überall definiert, obwohl z. B. die Metrik $g = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2$, das Volumselement $e^1 \wedge e^2$ und die Riemannsche kovariante Differentiation global erklärt sind. (Dies kann für $\theta = 0$ etwa durch Übergang zur „stereographischen" Karte gemäß $u + iv = e^{i\phi}\,\mathrm{tg}\,\theta/2$ nachgeprüft werden, ist aber auch aus Symmetriegründen klar.) Aus unserer basisunabhängigen Definition (11.2.3) der Krümmungsform folgt deren globale Existenz; nicht aber a priori müßte eine Komponente davon wie Ω_{12} global existieren. Für $n = 2$ ist dies jedoch der Fall, da $\Omega_{12} = \frac{1}{2}\epsilon^{ik}\Omega_{ik}$ tatsächlich basisunabhängig ist (ebenso wie das Oberflächenelement $e^1 \wedge e^2 = \frac{1}{2}\epsilon_{ik} e^i \wedge e^k$) und nur von der Wahl einer Orientierung abhängt.

Von (11.4.1) bleibt also nur

$$\int \Omega_{12} = \int \tfrac{1}{2}\epsilon^{ik}\Omega_{ik} = 4\pi \tag{11.4.2}$$

bestehen, und der Widerspruch in (11.4.1) liefert einen indirekten Beweis dafür, daß auf der Kugeloberfläche $\mathbf{S}^2$ überhaupt kein überall brauchbares orthonormales Basissystem existieren kann: denn bezüglich eines solchen wäre ω_{12} überall definiert und überall $\Omega_{12} = d\omega_{12}$, d. h., der Stokessche Satz wäre anwendbar.

(Daraus folgt wegen der globalen Existenz der Metrik und der Orientierbarkeit der $\mathbf{S}^2$, daß auch kein einzelnes Vektorfeld ohne Nullstellen auf $\mathbf{S}^2$ existieren kann.) Anschaulich ist klar, daß eine derartige Existenz oder Nichtexistenz unter Deformationen der Kugel unverändert bleibt, also eine „topologische" Eigenschaft ist. Selbst der Zahlwert (11.4.2) ist deformationsinvariant, was allerdings intuitiv weniger klar ist.

Zu obigem Paradoxon gibt es ein scheinbares Analogon, das üblicherweise auf andere Art „repariert" wird: im $\mathbf{R}^3$ könnte aus $\triangle 1/r = 0$ (Laplace-Gleichung) ähnlich wie oben für ein Kugelgebiet K mit Rand $\mathbf{S}^2$ = Einheitskugel irrigerweise geschlossen werden

$$0 = \int_K \triangle \frac{1}{r}\, \mathrm{d}^3x = \int_K \vec{\nabla}\vec{\nabla}\frac{1}{r}\, \mathrm{d}^3x = \int_{\mathbf{S}^2} \vec{\nabla}\frac{1}{r}\, \mathrm{d}\vec{O} = \int_{\mathbf{S}^2} -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{x}}{r}\, \mathrm{d}\vec{O} = -4\pi.$$

Hier berichtigt man üblicherweise, indem man die außerhalb $r = 0$ überall glatte (identisch verschwindende) Funktion $\triangle 1/r$ nicht glatt in den Nullpunkt fortsetzt, sondern $\triangle 1/r = -4\pi\delta(\boldsymbol{x})$ setzt, und diese auftretende „Punktquelle" ist physikalisch sinnvoll. Im obigen Beispiel spricht *gegen* die Einführung von Distributionen, daß wegen der Symmetrie des Beispiels kein Kugelpunkt als Sitz einer Quelle ausgezeichnet wäre, die Singularität also ein Koordinateneffekt ist. Wegen des nichtlinearen Terms $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}$ in $\boldsymbol{\Omega}$ wäre zudem die Verwendung von Distributionen für $n > 2$ nicht uneingeschränkt möglich.

Wir wenden uns nun Integranden zu, die ähnlich zu obigem für Vektorbündel E über einer X^n aus der Krümmungsform einer auf E definierten Übertragung gebildet werden. Dabei ist die früher gemachte Bemerkung wichtig, daß eine Übertragung und daher auch Ω stets global definierbar sind. Bezüglich einer Basis von Schnitten sei Ω durch die Matrix $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega^A{}_B)$ gegeben. Wir bilden deren k-te äußere Potenz

$$\boldsymbol{\Omega}^k := \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\Omega} = \left(\Omega^A{}_{J_1} \wedge \Omega^{J_1}{}_{J_2} \wedge \ldots \wedge \Omega^{J_{k-1}}{}_B\right)$$

und ihre Spur, die gewöhnliche $2k$-Form

$$\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega}^k = \Omega^{J_k}{}_{J_1} \wedge \ldots \wedge \Omega^{J_{k-1}}{}_{J_k}. \tag{11.4.3}$$

wo k eine natürliche Zahl $\leq n/2$ ist. Aus dem Transformationsgesetz von $\boldsymbol{\Omega}$ bei Basiswechsel folgt, daß $\mathrm{Sp}\boldsymbol{\Omega}^k$ basisunabhängig ist, also nur von Ω selbst abhängt und somit *global definiert* ist. Benutzen wir die schon festgestellte Tatsache, daß $\mathbf{D}$ dieselben Rechenregeln erfüllt wie D, so finden wir aufgrund von Produktregel und Bianchiidentität

$$\mathrm{d} \wedge \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega}^k \equiv \mathbf{D} \wedge \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega}^k = \mathrm{Sp}\Big(\mathbf{D} \wedge \boldsymbol{\Omega}^k\Big) = 0. \tag{11.4.4}$$

Diese Relation ist zwar notwendig für die Exaktheit der auf ganz X^n definierten Form $\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega}^k$, aber nicht hinreichend: i. a. existiert keine auf ganz X^n definierte

$(2k-1)$-Form, deren äußere Ableitung $\mathrm{Sp}\boldsymbol{\Omega}^k$ ergibt. Lokal, d. h. im Gültigkeitsbereich der Basis $\{b_A\}$, auf die sich die Matrizen beziehen, kann man etwa schreiben (siehe Aufgabe)

$$\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{d}\wedge\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\omega}, \qquad \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{d}\wedge\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\omega}\wedge(\mathrm{d}\wedge\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\Omega})),\ldots \tag{11.4.5}$$

doch sind die rechts hinter d$\wedge$ aufscheinenden „Chern-Simons"-Formen wegen des Transformationsgesetzes von $\boldsymbol{\omega}$ nicht basisunabhängig, somit nicht a priori global definiert (außer im Fall eines Bündels mit globaler $\{1\}$-Struktur). Global definierte Formen mit verschwindender äußerer Ableitung heißen *geschlossen*.

Eine weitere Eigenschaft von $\mathrm{Sp}\boldsymbol{\Omega}^k$ ergibt sich durch Betrachtung einer anderen globalen Übertragung $\bar{\mathrm{D}}$ auf demselben Bündel. Analog wie bei (11.2.2) schließen wir aus

$$\bar{\mathrm{D}}(f\psi) - \mathrm{D}(f\psi) = f(\bar{\mathrm{D}}\psi - \mathrm{D}\psi) \tag{11.4.6}$$

(f = Funktion, ψ = Schnitt), daß $\bar{\mathrm{D}}\psi - \mathrm{D}\psi$ in jedem Punkt P nur vom Schnittwert ψ_P linear-homogen abhängt; also definiert $\bar{\mathrm{D}} - \mathrm{D}$ eine $E\otimes E^*$-wertige 1-Form Δ auf ganz X^n gemäß

$$(\bar{\mathrm{D}} - \mathrm{D})\,\psi = \Delta(\psi). \tag{11.4.7}$$

Umgekehrt können wir durch Wahl geeigneter $E\otimes E^*$-wertiger 1-Formen von D ausgehend alle anderen Übertragungen erhalten und speziell durch

$$\mathrm{D}_\tau := \mathrm{D} + \tau\Delta, \qquad 0\le\tau\le 1 \tag{11.4.8}$$

zwischen D und $\bar{\mathrm{D}}$ „interpolieren"; d. h., D_τ ist eine kovariante Ableitung in E. Für die zugehörigen Krümmungsformen gilt, wie man leicht nachrechnet (Aufgabe: alle Matrizen beziehen sich auf eine feste Basis),

$$\boldsymbol{\Omega}_\tau = \boldsymbol{\Omega} + \tau\mathbf{D}\wedge\boldsymbol{\Delta} + \tau^2\boldsymbol{\Delta}\wedge\boldsymbol{\Delta}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Omega_\tau = \mathrm{D}_\tau\wedge\boldsymbol{\Delta}. \tag{11.4.9}$$

Mit diesen Hilfsformeln kann die Differenz $\mathrm{Sp}\,\bar{\boldsymbol{\Omega}}^k - \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega}^k$ folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,\bar{\boldsymbol{\Omega}}^k - \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega}^k &\equiv \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega}_\tau^k\right)\mathrm{d}\tau = k\int_0^1 \mathrm{Sp}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{\Omega}_\tau\right)\wedge\boldsymbol{\Omega}_\tau^{k-1}\right]\mathrm{d}\tau \\ &= k\int_0^1 \mathrm{Sp}\left[(\mathbf{D}_\tau\wedge\boldsymbol{\Delta})\wedge\boldsymbol{\Omega}_\tau^{k-1}\right]\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\wedge k\int_0^1 \mathrm{Sp}\left(\boldsymbol{\Delta}\wedge\boldsymbol{\Omega}_\tau^{k-1}\right)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{11.4.10}$$

(Zuletzt wurde die Bianchi-Identität ausgenutzt.) Da der Integrand rechts überall definiert ist, ist die Differenz links eine *exakte* Form!

Nützlich sind auch die mit $\tau \to \delta\tau$, $\delta\tau\mathbf{\Delta} =: \delta\boldsymbol{\omega}$ entstehenden infinitesimalen Versionen von (11.4.9, 10):

$$\boxed{\delta\mathbf{\Omega} = \mathbf{D} \wedge \delta\boldsymbol{\omega}} \tag{11.4.9'}$$

$$\delta\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^k = \mathrm{d} \wedge k\,\mathrm{Sp}\Big(\delta\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{\Omega}^{k-1}\Big)\,. \tag{11.4.10'}$$

die folgendes zeigen. Benützte man für gerades n

$$W := \int\limits_{V \subset X^n} \mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^{n/2} \tag{11.4.11}$$

als Wirkungsintegral, um daraus Feldgleichungen für $\mathbf{\Omega}$ herzuleiten, so ergäben sich aufgrund des Stokesschen Satzes triviale Feldgleichungen $0 = 0$ ($\delta\boldsymbol{\omega} = 0$ am Rand des willkürlichen Gebietes $V \in X^n$).

Aus (11.4.10) folgt für geschlossene X^n durch Anwendung des Stokesschen Satzes, daß $\int_{X^n} \mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^{n/2}$ nicht von der gewählten Übertragung abhängt. Die gleichen Aussagen gelten auch für die Formen $\Big(\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^{k_1}\Big)^{l_1} \wedge \Big(\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^{k_2}\Big)^{l_2} \wedge \ldots$ (äußere Potenzen mit $2\sum k_i l_i = n$), weil allgemein bei geschlossenen Formen α, β, $\bar\alpha$, $\bar\beta$, für die $\bar\alpha - \alpha = \mathrm{d} \wedge \mu$, $\bar\beta - \beta = \mathrm{d} \wedge \nu$ exakt sind, auch $\bar\alpha \wedge \bar\beta - \alpha \wedge \beta \equiv \mathrm{d}\,(\mu \wedge \beta + (-1)^{\mathrm{st}\,\alpha}\alpha \wedge \nu + \mu \wedge \mathrm{d} \wedge \nu)$ exakt ist. Tatsächlich hängen die so erhaltenen Zahlen wie auch die Äquivalenzklassen dieser Integranden modulo exakter Formen nur von der Topologie des Vektorbündels ab und verschwinden z. B. in sogenannten „trivialen" Bündeln der Topologie $X^n \times \mathbf{V}$ (z. B. E in Abbildung 11.1), in denen ja ein globaler Fernparallelismus möglich ist. Im physikalischen Jargon nennt man die erwähnten Integrale *topologische Quantenzahlen*. Für *komplexe* Vektorbündel ($\mathbf{V}$ = komplexer Vektorraum, z. B. Isospinraum) nennt man die $2k$-Formen $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^k$ (genauer: gewisse umkehrbar eindeutig aus ihnen gebildete Polynome) die *Chern-Formen* des Bündels.

Für *reelle* Vektorbündel sind die Formen $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^k$ bei ungeradem k *exakt*, weil sie nach Obigem bis auf eine exakte Form mit $\mathrm{Sp}\,\bar{\mathbf{\Omega}}^k$ übereinstimmen, wo $\bar{\mathbf{\Omega}}$ zu einer (global definierbaren) Übertragung gehört, die mit einer (global definierbaren) positiv-definiten Fasermetrik verträglich ist – $\bar{\mathbf{\Omega}}$ ist dann antisymmetrisch (vgl. (11.3.3)) und damit $\mathrm{Sp}\,\bar{\mathbf{\Omega}}^k = 0$ für ungerades k. Die $4l$-Formen $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^{2l}$ (genauer: gewisse aus ihnen umkehrbar eindeutig gewinnbare Polynome) heißen *Pontrjagin-Formen* des Bündels. Für das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit X^4 erhalten wir als einzige Möglichkeit also $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^2$: der bezüglich einer gegebenen Metrik dazu duale Skalar ist

$$*\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^2 = \tfrac{1}{4}\,R^i{}_{kmn}\,R^k{}_{ipq}\,\epsilon^{mnpq} \overset{\text{lokal}}{=} J^r{}_{;i}, \tag{11.4.12}$$

wo $J = *\mathrm{Sp}\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathrm{d} \wedge \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\right)$ (vgl. (11.4.5) und Aufgabe 5 von Abschnitt 7.5).

In jedem *reellen, orientierbaren* Vektorbündel *geradzahliger* Faserdimension f existiert ein Analogon zu (11.4.2): Wählt man eine Riemannsche (d. h. positiv-definite) Fasermetrik γ und eine mit ihr kompatible Übertragung mit Differentiation D und Krümmung Ω, so ist die f-Form (*Euler-Form* des Bündels, abgesehen von einem Normierungsfaktor)

$$\mathcal{E} := \epsilon^{A_1 \ldots A_f}\, \Omega_{A_1 A_2} \wedge \Omega_{A_3 A_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{A_{f-1} A_f} \tag{11.4.13}$$

unabhängig von der Basis, auf die sich die Indizes beziehen, hängt also nur von den global definierten Strukturen γ, D und der Orientierung ab ($\epsilon^{\cdots}$ ist analog zu Aufgabe 4 von Abschnitt 3.4 gebildet und erfüllt $\mathrm{D}\epsilon = 0$, vgl. Aufgabe 1 von Abschnitt 11.3; die Indizes sind mittels der Fasermetrik zu ziehen). Anwendung aller Regeln für D liefert wie oben $\mathrm{d}\wedge\mathcal{E} = 0$, $\mathcal{E}$ ist eine geschlossene Form, aber im allgemeinen nicht exakt, wie unser Beispiel (11.4.2) gezeigt hat. Lokal gilt, analog zu (11.4.5), aber mit Beschränkung auf *Orthonormalbasen*

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathrm{d} \wedge \left(\epsilon^{AB}\omega_{AB}\right) \text{ für } f = 2 \\ \mathcal{E} &= \mathrm{d} \wedge \tfrac{1}{3}\left(\epsilon^{ABCD}\omega_{AB} \wedge (\mathrm{d} \wedge \omega_{CD} + 2\Omega_{CD})\right) \text{ für } f = 4 \\ &\ldots \end{aligned} \tag{11.4.14}$$

(siehe Aufgabe). Wird γ festgehalten und D unter Beibehaltung von $\mathrm{D}\gamma = 0$ variiert, ändert sich $\mathcal{E}$ nur um eine exakte Form: es gelten die zu (11.4.10, 10') völlig analog herzuleitenden Formeln

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E} &= \mathrm{d}\frac{f}{2}\int_0^1 \epsilon^{A_1 \ldots A_f}\Delta_{A_1 A_2} \wedge \Omega_{\tau A_3 A_4} \wedge \ldots \mathrm{d}\tau \\ \delta\mathcal{E} &= \mathrm{d} \wedge \frac{f}{2}\epsilon^{A_1 \ldots A_f}\delta\omega_{A_1 A_2} \wedge \Omega_{A_3 A_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{A_{f-1} A_f}. \end{aligned} \tag{11.4.15}$$

Aber auch bei Einführung einer anderen (definiten) Fasermetrik $\bar{\gamma}$ wird $\mathcal{E}$ nur um eine exakte Form geändert: $\boldsymbol{h} := \boldsymbol{\gamma}^{-1}\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ definiert einen globalen Schnitt h von E^1_1, und h ist in jeder Faser ein bezüglich γ symmetrischer und positiv definiter Operator mit einer symmetrischen, positiv-definiten Quadratwurzel p, d. h. $h = p^2$; p definiert gemäß $\bar{\mathrm{D}}_u\psi := p^{-1}\mathrm{D}_u(p\psi)$ eine Übertragung mit $\bar{\mathrm{D}}\bar{\gamma} = 0$, wobei $\bar{\gamma}$, $\bar{\Omega}$ bezüglich der Basis $\{b_A\}$ dieselben Komponenten haben wie γ, Ω bezüglich der Basis $\{p(b_A)\}$, weshalb $\mathcal{E}$ bei Übergang zu $\bar{\gamma}$ und *diesem* $\bar{\mathrm{D}}$ überhaupt nicht geändert wird. (Details als Aufgabe). Die Formeln (11.4.15) gelten deshalb mit leicht geänderter Bedeutung von Δ allgemein, mit der entsprechenden Konsequenz für $\mathcal{E}$ als Variationsintegrand. Modulo exakter Formen hängt also $\mathcal{E}$ wieder nur von der Topologie des Bündels ab, und für

$f = n =$ gerade ergibt das Integral von $\mathcal{E}$ über eine geschlossene X^n wieder eine „topologische Quantenzahl".

Ist die Metrik nur pseudo-Riemannsch (γ habe bei Diagonalisierung p mal $+1$, q mal -1, $p+q = f =$ gerade), so ist ihre globale Existenz nicht stets gesichert (siehe Aufgabe). Setzen wir die Existenz aber voraus, kann $\mathcal{E}$ gemäß (11.4.13) global definiert werden. Dabei ist $\mathcal{E}$ für ungerades p stets exakt, wie man sieht, wenn man neben γ noch eine (immer global existierende positiv-definite) Riemannmetrik $\bar{\gamma}$ betrachtet: Die Basen, die im Sinne *beider* Metriken orthonormal sind, bilden dann eine G-Struktur mit $G = \{M \oplus N \mid M \in O(p),\ N \in O(q)\} \cong O(p) \times O(q)$. Ist D eine G-kovariante Ableitung (existiert stets global!), so muß nach (11.3.7) die Krümmungsmatrix $\mathbf{\Omega}$ bezüglich einer G-Basis die Blockgestalt $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{(p)} \oplus \mathbf{\Omega}_{(q)}$ haben, wo der $p \times p$- bzw. $q \times q$-Block je antisymmetrisch sind. Für ein solches Ω verschwindet aber $\mathcal{E}$ wie auch $\bar{\mathcal{E}}$, wenn p ungerade ist (vgl. $f = 2$: $\mathcal{E} \propto \Omega_{12} = 0$ bei 1.1-Blockgestalt; $f = 4$: rein algebraisch entspricht $\mathcal{E}$ der elektromagnetischen Invariante $\epsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = 4\vec{E}\vec{B}$, die bei Raum-Zeit-Blockgestalt von F_{ik}, i. e. $\vec{E} = 0$, verschwindet; ...). Bei geradem p unterscheiden sich $\mathcal{E}$ und $\bar{\mathcal{E}}$ für dieses D höchstens um ein Vorzeichen. (Siehe z. B. Greub (1978), Abschnitt 8.5 wegen der erforderlichen multilinearen Algebra für den allgemeinen Fall.)

Betrachten wir das Tangentialbündel einer X^4 mit einer pseudo-Riemannschen Metrik g wie in der Allgemeinen Relativitätstheorie, so ist also $\mathcal{E}$ exakt und bleibt dies auch, wenn man zu einer Riemann-Metrik übergeht. Da für letztere $\mathcal{E}$ nicht a priori exakt ist, sieht man, daß die globale Existenz der Metrik g *nicht* a priori garantiert ist. Probleme treten aber nur bei geschlossenen X^4 auf – eine eher unphysikalische Situation. (Vgl. dazu die Artikel von Lichnérowicz und Geroch in DeWitt & Wheeler (1968)). Der zu $\mathcal{E}$ duale Skalar ist

$$\boxed{*\mathcal{E} = \tfrac{1}{4}\,\epsilon^{ijkl}\,R_{ijmn}R_{klpq}\,\epsilon^{mnpq} = 4R^{pq}\,R_{qp} - R^2 - R^{ijkl}\,R_{klij}.} \qquad (11.4.16)$$

wie man mittels der Identität

$$\epsilon^{ijkl}\epsilon_{mnpq} = -\begin{vmatrix} \delta^i_m & \delta^j_m & \delta^k_m & \delta^l_m \\ \delta^i_n & \delta^j_n & \delta^k_n & \delta^l_n \\ \delta^i_p & \delta^j_p & \delta^k_p & \delta^l_p \\ \delta^i_q & \delta^j_q & \delta^k_q & \delta^l_q \end{vmatrix} \quad \text{(Signatur } + - - - \text{!)} \qquad (11.4.17)$$

und Laplace-Entwicklung der Determinante nach den Minoren der 1. + 2. Zeile sieht, $*\mathcal{E}$ ist lokal die Divergenz eines „Stromes" J, wo $*J$ die rechts in (11.4.14) für $f = 4$ hinter $d\wedge$ aufscheinende 3-Form ist. Diese Eigenschaft des Skalars

(11.4.16) wird gelegentlich bei der Diskussion von Alternativen zum Wirkungsintegral (3.4.1) der Einsteinschen Theorie benutzt.

Die Formen $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^k$ und $\mathcal{E}$ sind beide von der Gestalt

$$f(\Omega) = f^{A_1\ldots A_k}_{B_1\ldots B_k}\,\Omega^{B_1}{}_{A_1}\wedge\ldots\wedge\Omega^{B_k}{}_{A_k}, \tag{11.4.18}$$

sind also (äußere) Polynome in den Krümmungskomponenten $\Omega^B{}_A$, die aber von der speziellen Basis $\{b_A\}$, auf die sie sich beziehen, nicht abhängen, weil die Koeffizienten $f^{\cdots}_{\cdots}$ (die symmetrisch bezüglich Vertauschung zweier beliebiger Paare (A_i, B_i), (A_j, B_j) angenommen werden können) geeignete Invarianzeigenschaften hatten. Die $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^k$ gibt es für jedes Vektorbündel mit Übertragung. $\mathcal{E}$ kommt bei $SO(p,q)$-Übertragungen hinzu. Für G-Übertragungen in anderen G-Strukturen eines Bündels wird man (11.4.18) bezüglich G-Basen mit konstanten Koeffizienten $f^{\cdots}_{\cdots}$ ansetzen, die unter $\mathbf{S}\in G$ wie Komponenten eines invarianten Tensors vom Typ (k,k) transformieren. Es hängt von G ab, welche Möglichkeiten dafür neben Linearkombinationen von $\delta^{\cdot}_{\cdot}\delta^{\cdot}_{\cdot}\ldots$ (die zu Polynomen in den $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^k$ führen) noch bestehen. Setzen wir (11.3.7) in $f(\Omega)$ ein, erhalten wir

$$\boxed{f(\Omega) = f_{a_1\ldots a_k}\,\Omega^{a_1}\wedge\ldots\wedge\Omega^{a_k}} \tag{11.4.19}$$

$$f_{a_1\ldots a_k} := f^{A_1\ldots A_k}_{B_1\ldots B_k}\,G^{B_1}_{a_1A_1}\ldots G^{B_k}_{a_kA_k},$$

und man überlegt sich leicht, daß Invarianz gerade dann gegeben ist, wenn die $f_{a_1\ldots a_k}$ Komponenten eines unter der adjungierten Darstellung von G invarianten, totalsymmetrischen kovarianten Tensors über der Liealgebra von G sind – vgl. dazu die Transformationsformeln für Ω^a im nächsten Abschnitt. (Die Algebra dieser Tensoren ist für die wichtigsten Gruppen bekannt, vgl. Kobayashi & Nomizu (1969)). Die so gebildeten $f(\Omega)$ hängen dann wieder nur von Ω selbst ab, sind also global definierte, geschlossene $2k$-Formen, die sich bei Änderung der speziellen G-Übertragung analog zu $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^k$ verhalten: mit $\mathbf{\Delta} = \Delta^a\boldsymbol{G}_a$, $\mathbf{\Omega}_\tau = \Omega^a_\tau\,\boldsymbol{G}_a$ gilt

$$f(\bar\Omega) - f(\Omega) = \mathrm{d}\wedge k\int_0^1 f_{a_1\ldots a_k}\,\Delta^{a_1}\wedge\Omega^{a_2}_\tau\wedge\ldots\wedge\Omega^{a_k}_\tau\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{\delta f(\Omega) = \mathrm{d}\wedge(k f_{a_1\ldots a_k}\delta\omega^{a_1}\wedge\Omega^{a_2}\wedge\ldots\wedge\Omega^{a_k}).} \tag{11.4.20}$$

Wir beschließen damit den Teil unserer Betrachtungen, bei dem es auf globale Existenz der beteiligten Größen ankommt. In den folgenden Abschnitten sind also fast alle Überlegungen wieder rein lokal.

Aufgaben

1. Zeige mittels der angegebenen Transformation auf stereographische Koordinaten, daß die Kugelmetrik $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$ und das Flächenelement $\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$ bei $\theta = 0$ sinnvoll bleiben.

2. Zeige $\int \Omega_{12} = 0$ für einen Torus (selbstüberschneidungsfreie Kreisringfläche im $\mathbf{R}^3$ mit der vom $\mathbf{R}^3$ induzierten Metrik).

3. Verifiziere (11.4.9).

4. a) Verifiziere (11.4.5) und (11.4.14) direkt.
   b) Aus (11.4.20) leite man durch Vergleich von $f(\Omega)$ mit dem entsprechenden Ausdruck für die durch $\omega^a = 0$ i. a: nur lokal definierte krümmungsfreie Übertragung die lokale Formel („Transgressionsformel")

$$\begin{aligned} f(\Omega) &= d \wedge k \int_0^1 f_{a_1 \ldots a_k}\, \omega^{a_1} \wedge \beta_\tau^{a_2} \wedge \ldots \wedge \beta_\tau^{a_k}\, d\tau. \\ \beta_\tau^a &:= \tau(1-\tau)\, d \wedge \omega^a + \tau^2 \Omega^a \end{aligned} \tag{11.4.21}$$

   sowie die zu $\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^k$, $\mathcal{E}$ gehörigen Analoga ab und überprüfe damit a).

5. Kann man auf $X^4 = \mathbf{S}^4$ (Oberfläche der Einheitskugel im euklidischen $\mathbf{R}^5$) nach dem Gesagten eine globale Metrik der Signatur $+ - - -$ einführen? (Welche Rechnung kann die Entscheidung herbeiführen?)

6. Man überzeuge sich im Detail von den im Anschluß an (11.4.15) gegebenen Argumenten.

7. Welcher Verknüpfung $\Omega \overset{\circ}{\wedge} \Omega$ im Sinne der Bemerkungen im Anschluß an (11.1.8) entspricht $\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{\Omega}$?

8. Für $n = 4$ gilt trivialerweise $d \wedge \mathrm{Sp}\mathbf{\Omega}^2 \equiv 0$ (5-Formen verschwinden), also lokal $\delta\, \mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^2 = d \wedge$ (3-Form). Kann daraus bereits geschlossen werden, daß $\delta \int \mathrm{Sp}\,\mathbf{\Omega}^2 = 0$ triviale Feldgleichungen gibt?

11.5 Beispiele, Eichtheorien

Wir rekapitulieren hier zunächst die Transformationsformeln für Übertragungs- und Krümmungsmatrix bei Basiswechsel und führen dabei auch die in der Teilchenphysik geläufigere Terminologie ein. Sodann betrachten wir einige Beispiele, aus denen wir durch Analogiebildung die Standarddynamik der sogenannten Eichtheorie gewinnen.

Sei D die kovariante Ableitung in einem Vektorbündel $E(X^n, \mathbf{V})$, dann ist D bezüglich eines Basissystems $\{b_A\}$ von Schnitten festgelegt durch die

Übertragungsmatrix $\boldsymbol{\omega}$, und bei Basiswechsel gemäß $b_A = S_A{}^B\, b_B$ ist (vgl. (7.6.5)) $\boldsymbol{\omega}$ zu ersetzen durch

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{S}\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{S}^{-1} - (\mathrm{d}\mathbf{S})\mathbf{S}^{-1}. \tag{11.5.1}$$

die Krümmungsmatrix $\boldsymbol{\Omega}$ durch (vgl. (7.6.10))

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{S}\,\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{S}^{-1}. \tag{1.5.2}$$

Für einen Schnitt v schreiben wir $v = v^A b_A = v^{\bar{A}} b_{\bar{A}}$, fassen die v^A bzw. $v^{\bar{A}}$ zur Spaltenmatrix $\boldsymbol{\psi}$ bzw. $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ zusammen und schreiben die entsprechenden Spalten des kovarianten Differentials als

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{D}\boldsymbol{\psi}, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{D} = \mathbf{1}\cdot\mathrm{d} + \boldsymbol{\omega} \quad \text{etc.} \tag{11.5.3}$$

Die Spalten $\boldsymbol{\psi}$ und $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ hängen gemäß $\bar{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{S}\boldsymbol{\psi}$ zusammen, und da $\mathrm{D}v$ eine E-wertige 1-Form ist, gilt das gleiche Transformationsverhalten für die zugehörigen Spalten:

$$\bar{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{S}\boldsymbol{\psi} \Rightarrow \bar{\mathbf{D}}\bar{\boldsymbol{\psi}} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{S}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{S}\mathbf{D}\boldsymbol{\psi}, \tag{11.5.4}$$

was gelegentlich so ausgedrückt wird: Die kovariante Ableitung $\mathbf{D}$ vertauscht mit den Transformationen $\mathbf{S}$. Dies gilt nämlich wegen $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x)$ für die gewöhnliche Ableitung d nicht,

$$\mathrm{d}(\mathbf{S}\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{S}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\psi} + (\mathrm{d}\mathbf{S})\boldsymbol{\psi} \neq \mathbf{S}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}, \tag{11.5.5}$$

und man sagt, der Zusatzterm $\boldsymbol{\omega}$ in $\mathbf{D} = \mathrm{d} + \boldsymbol{\omega}$ sei ein *Kompensationsfeld*, es kompensiere das Auftreten von $(\mathrm{d}\mathbf{S})\boldsymbol{\psi}$, wenn es bei Basiswechsel gemäß (11.5.1) transformiert wird. Die ortsabhängigen Transformationen $\mathbf{S}(x)$ nennt man auch *Eichtransformationen 2. Art*, im Gegensatz zu ortsunabhängigen „Eichtransformationen erster Art".

Beschränken wir die Matrizen $\mathbf{S}(x)$ auf eine Untergruppe $G \subset GL(f)$, so ist zu bemerken, daß der die Kompensation herbeiführende „inhomogene" Term $(\mathrm{d}\mathbf{S})\mathbf{S}^{-1}$ im Transformationsgesetz (11.5.1) seine Werte in der Liealgebra von G annimmt. (In den zugehörigen Differenzenquotienten $\frac{1}{t}[\mathbf{S}(x(t)) - \mathbf{S}(x(0))]\mathbf{S}^{-1}(x(0))$ beschreibt die Matrix $\mathbf{S}(x(t))\mathbf{S}^{-1}(x(0))$ eine Kurve durch das Einselement $\mathbf{1}$ von G, also ist die Matrix $\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$ die Tangente an eine solche Kurve in G – und dies kann als Definition der Elemente der Liealgebra einer Matrixgruppe angesehen werden; (vgl. z. B. Sexl-Urbantke (1992)). Der Wertebereich von $\boldsymbol{\omega}$ wird also die Liealgebra von G enthalten müssen. Bezieht sich $\boldsymbol{\omega}$ auf die G-Basis einer G-Struktur in E, so bezieht sich $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ ebenfalls auf eine G-Basis. Liegt eine G-Übertragung vor, wissen wir bereits, daß $\boldsymbol{\omega}$ wie $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ Liealgebra-wertig sein müssen. Das ist konsistent mit (11.5.1), weil auch die (sogenannte adjungierte) Gruppenwirkung $\boldsymbol{\omega} \to \mathbf{S}\boldsymbol{\omega}\mathbf{S}^{-1}$ nicht aus der Liealgebra herausführt (siehe z. B. Sexl-Urbantke, l. c.; die Vertauschungseigenschaft

$\bar{\mathbf{D}}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{D}$ allein impliziert aber die Liealgebrawertigkeit von $\boldsymbol{\omega}$ bezüglich G-Basen keineswegs, man braucht nur zu bedenken, daß für jede G enthaltende Gruppe G' eine G-Übertragung a fortiori diese Eigenschaft hat!)

Ganz analog sind dann für $\mathbf{S}(x) \in G$ auch $\boldsymbol{\Omega}$ und $\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}^{-1}$ beide Liealgebra-wertig, und wenn wir $\boldsymbol{\Omega} = \Omega^a \boldsymbol{G}_a$, $\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \Omega^{\bar{a}} \boldsymbol{G}_a$ ansetzen, folgt daraus und aus der Relation

$$\mathbf{S}\boldsymbol{G}_a\mathbf{S}^{-1} = (\mathrm{Ad}\,\mathbf{S})_a^b\, \boldsymbol{G}_b \tag{11.5.6}$$

für die Matrizen der adjungierten Darstellung von G (vgl. Sexl-Urbantke, l. c.) das Transformationsgesetz

$$\Omega^{\bar{b}} = (\mathrm{Ad}\,\mathbf{S})_a^b\, \Omega^a. \tag{11.5.7}$$

Die Ω^a verhalten sich also bei Eichtransformation wie die Komponenten einer 2-Form mit Werten in einen assoziierten Vektorbündel, in dem G gemäß ihrer adjungierten Darstellung wirkt. Die in den Zerlegungen $\omega^a = \omega_i^a\, \mathrm{d}x^i$ bzw. $\Omega^a = \frac{1}{2}\Omega_{ik}^a \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k$ auftretenden Koeffizienten werden üblicherweise als *Eichpotentiale* bzw. *Eichfeldstärken* bezeichnet; diese Terminologie wird aus den nachfolgenden Beispielen klar werden. Zu beachten ist, daß $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ gemäß (11.5.1) eine eichabhängige (d. h. von der speziellen G-Basis abhängige) Aussage ist, während die Konsequenz $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ gemäß (11.5.2) eichunabhängig ist. Umgekehrt folgt aus $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ die Existenz einer G-Schnittbasis mit $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, denn eine solche Schnittbasis ist kovariant konstant und geht aus einer G-Basis in einem Punkt durch G-Parallelverschiebung hervor, was gerade für $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ eindeutig möglich ist. Wir erinnern noch, daß $\boldsymbol{\omega}$ in *einem* vorgegebenen Punkt stets weggeeicht werden kann (Aufgabe 3 zu Abschnitt 11.3).

1. Beispiel: X^n = Raum-Zeit, E = Tangentialbündel, G = Ähnlichkeitsgruppe $= \{e^{\Lambda}\boldsymbol{O} \mid \Lambda \in \mathbf{R},\ \boldsymbol{O} \in O(n)\}$ = direktes Produkt der orthogonalen Gruppe mit der multiplikativen Gruppe der positiven Zahlen; die Liealgebra ist $\{a \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{M} \mid a \in \mathbf{R},\ \boldsymbol{M} = -\boldsymbol{M}^T\}$ = {antisymmetrische Matrizen plus Vielfache der Einheitsmatrix}. Ist $\{e_a\}$ eine G-Basis mit Kobasis $\{\omega^a\}$, so bewirken die Maßstabstransformationen $e_a = e^{\Lambda(x)}\bar{e}_a$, $e^a = e^{-\Lambda}\bar{e}^a$. Setzen wir $g = \delta_{ab}\, e^a \otimes e^b$ und analog $\bar{g} = \delta_{ab}\, \bar{e}^a \otimes \bar{e}^b$, so gilt $\bar{g} = e^{2\Lambda(x)} g$: Diese G-Struktur zeichnet also eine Metrik bis auf einen konformen Faktor (eine *konforme Struktur* auf X^n) aus, bezüglich der die G-Basen orthogonal sind, die gemeinsame Normierung der e_a bleibt aber offen, eine spezielle Wahl derselben entspricht einer speziellen Eichung von Maßstäben und Uhren. (Von hier leitet sich die Bezeichnungsweise ab.) Eine G-Übertragung wird bezüglich $\{e_a\}$ festgelegt durch die Übertragungsmatrix $\boldsymbol{\omega} = \alpha \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{\omega}'$ mit der Krümmungsmatrix $\boldsymbol{\Omega} = \varphi \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{\Omega}'$, wo wir bereits die (eindeutig bestimmte) Zerspaltung in eine antisymmetrische Matrix plus ein Vielfaches der Einheitsmatrix ausgeführt haben; es gilt

$$\varphi = \mathrm{d} \wedge \alpha, \quad \boldsymbol{\Omega}' = \mathrm{d} \wedge \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}' \wedge \boldsymbol{\omega}'. \tag{11.5.8}$$

Reine Drehungen $\boldsymbol{O}$ bewirken

$$\boldsymbol{\omega} \to \bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{O}^{-1} - (\mathrm{d}\boldsymbol{O})\boldsymbol{O}^{-1}, \quad \boldsymbol{\Omega} \to \bar{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{O}^{-1}, \text{ d. h.}$$

$$\bar{\alpha} = \alpha, \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}' = \boldsymbol{O}\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{O}^{-1} - (\mathrm{d}\boldsymbol{O})\boldsymbol{O}^{-1} \tag{11.5.9a}$$

$$\bar{\varphi} = \varphi, \quad \bar{\boldsymbol{\Omega}}' = \boldsymbol{O}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{O}^{-1}, \tag{11.5.9b}$$

während Maßstabstransformationen $e^{\Lambda(x)} \cdot \mathbf{1}$ bewirken

$$\boldsymbol{\omega} \to \bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \mathrm{d}\Lambda \cdot \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\Omega} \to \bar{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}, \text{ d. h.}$$

$$\bar{\alpha} = \alpha - \mathrm{d}\Lambda, \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}' = \boldsymbol{\omega}' \tag{11.5.10a}$$

$$\bar{\varphi} = \varphi, \quad \bar{\boldsymbol{\Omega}}' = \boldsymbol{\Omega}'. \tag{11.5.10b}$$

Man sieht, daß (11.5.8), (11.5.10) formal Viererpotential und Feldstärkentensor der Elektrodynamik und ihr Transformationsverhalten unter den dort so bezeichneten „Eichtransformationen" imitiert (vgl. Aufgabe 1 von Abschnitt 3.9). Tatsächlich hat diese Beobachtung auch H. Weyl 1918 dazu veranlaßt, auf diese Weise eine „Geometrisierung" des Elektromagnetismus vorzunehmen, wobei er von einer torsionsfreien Übertragung $\boldsymbol{\omega}$ ausging. Der Versuch scheiterte jedoch wegen des dabei auftretenden 2. *Uhreneffekts*: die Nichtintegrabilität der Längenübertragung in dieser Theorie für $\varphi \neq 0$ ergäbe, daß sich in der Situation des Uhrenparadoxons die Uhren im 2. Treffpunkt nicht nur in ihrem Stand, sondern in ihrem Gang unterscheiden – eine an Atomen mit großer Genauigkeit nicht vorhandene Erscheinung.

2. Beispiel: X^n = Raum-Zeit, $E(X^n, \mathbf{C})$ ist ein Vektorbündel mit Standardfaser $\mathbf{C}$, d. h., durch Wahl eines Basisschnitts b kann man Schnitten komplexwertige Funktionen Φ zuordnen; $G = U(1) = \{e^{i\Lambda}, \Lambda \in \mathbf{R}\}$ = Gruppe der Phasenfaktoren. Die Liealgebra dieser einparametrigen Gruppe besteht aus den rein imaginären Zahlen, wobei alle Kommutatoren verschwinden. Dementsprechend schreiben wir für Übertragungs- und Krümmungsform einer $U(1)$-Übertragung bezüglich b

$$\omega = i\alpha, \quad \Omega = i\varphi = i\mathrm{d} \wedge \alpha \qquad (\alpha \text{ reell}, \quad \varphi \text{ reell}). \tag{11.5.11}$$

Unter der Eichtransformation $b = e^{i\Lambda}\bar{b}$ geht $\Phi \to e^{i\Lambda}\Phi$ und

$$\omega \to \bar{\omega} = \omega - i\,\mathrm{d}\Lambda, \quad \Omega \to \bar{\Omega} = \Omega, \text{ d. h.}$$

$$\bar{\alpha} = \alpha - \mathrm{d}\Lambda, \quad \bar{\varphi} = \varphi. \tag{11.5.12}$$

Wieder entspricht (11.5.11), (11.5.12) dem Verhalten von Viererpotential und Feldstärke in der Elektrodynamik. Die Nichtintegrabilität der Parallelverschiebung der Phase der Wellenfunktion (= Schnitt von E) führt ebenfalls zu Effekten, die aber tatsächlich beobachtet werden (Bohm-Aharanov-Effekt). Wir gehen daher hier erstmals auf die Formulierung einer Dynamik ein. Ohne Beeinflussung durch ein elektromagnetisches Feld genüge das komplexe skalare Feld Φ etwa der freien Klein-Gordon-Gleichung (9.2.2), die offensichtlich gegen die Transformation $\Phi \to e^{i\Lambda}\Phi$ mit konstantem Λ ebenso invariant ist wie die zugehörige Lagrangefunktion $\partial_k\Phi^\dagger\partial^k\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi$ (Eichtransformation 1. Art, $\dagger$ = komplexe Konjugation, $\hbar = c = 1$). Dabei sei die Raum-Zeitmetrik zunächst als flach angenommen. Um variables Λ zulassen zu können, müssen wir im 1. Term die kovariante Ableitung $\mathrm{D}_k := \mathrm{D}_{\partial_k}$ einführen, die mit $e^{i\Lambda(x)}$ vertauscht, so daß sich dieser Faktor im 1. Term ebenso weghebt wie im zweiten. Mit $\alpha = eA_k\,\mathrm{d}x^k$ führt $\mathrm{D} = \mathrm{d} + i\alpha$ zu $\mathrm{D}_k = \partial_k + ieA_k$, und dies ist die übliche „minimale Substitution", mit der bekanntlich (siehe z. B. Bjorken-Drell (1966)) elektromagnetische Wechselwirkungen eingeführt werden, wenn e die Teilchenladung bedeutet. Um die volle Dynamik zu erhalten, ergänzen wir die obige Lagrangefunktion durch die Lagrangefunktion (9.3.1) des freien elektromagnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} L &= (\mathrm{D}_k\Phi)^\dagger\,\mathrm{D}^k\Phi - m^2\,\Phi^\dagger\,\Phi - \tfrac{1}{4}\,F_{kl}\,F^{kl} \quad \text{oder} \\ L\,\mathrm{d}^4x &= (\mathrm{D}\Phi)^\dagger \wedge *\mathrm{D}\Phi - m^2\Phi^\dagger * \Phi - \frac{1}{2e^2}\,\varphi \wedge *\varphi. \end{aligned} \tag{11.5.13}$$

In der Differentialformenversion haben wir $\varphi =: \frac{e}{2}F_{kl}\,\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l = \mathrm{d} \wedge \alpha$ verwendet. Die zugehörigen Feldgleichungen ergeben sich durch Variation von $W = \int L\,\mathrm{d}^4x$ nach $\Phi^\dagger$ und A_k:

$$\eta^{ik}\,\mathrm{D}_i\,\mathrm{D}_k\Phi + m^2\Phi = 0 \quad \text{oder} \quad *\,\mathrm{D} \wedge *\mathrm{D}\Phi + m^2\Phi = 0. \tag{11.5.14a}$$

$$\begin{aligned} F^{kl}{}_{;l} &= -j^k := -ie\left[\left(\mathrm{D}^k\Phi^\dagger\right)\Phi - \Phi^\dagger\,\mathrm{D}^k\Phi\right] \quad \text{oder} \\ \mathrm{d} \wedge *\varphi &= -ie^2 * \left(\left(\mathrm{D}\Phi^\dagger\right)\Phi - \Phi^\dagger\,\mathrm{D}\Phi\right). \end{aligned} \tag{11.5.14b}$$

Bei der Ausführung der Variation ist die Verträglichkeit von D mit dem durch die $U(1)$-Struktur definierten invarianten „hermitischen" Produkt $\Phi^\dagger\Phi$ zu beachten, um die übliche partielle Integration anwenden zu können.

Die entsprechende minimale Version dieses, des folgenden und auch anderer Eichmodelle im gekrümmten Raum ergibt sich durch Ersetzen der flachen Metrik durch die Riemannsche und durch Bildung kovarianter Ableitungen gemäß (11.1.6). Besonders zu beachten ist dabei, daß die A_k stets als Komponenten der Übertragungsform α anzusehen sind und $\varphi = \mathrm{d} \wedge \alpha$ gilt, so daß die holonomen Komponenten von φ durch $F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k}$ gegeben sind. Diese

unterscheiden sich (vgl. Aufg.4 zu Abschnitt 11.1) bei Raum-Zeit-Übertragungen mit Torsion von den *nicht* eichinvarianten Komponenten $A_{k,l} - A_{l,k}$, die zu bilden man in Versuchung käme, faßte man die A_k als Komponenten eines gewöhnlichen Kovektorfeldes ohne Eichcharakter (= Abhängigkeit von einer $U(1)$-Basiswahl) auf. Bei der Differentialformenversion obiger Gleichungen, bei der nur die Bedeutung von $*$ abzuändern ist, unterliegt man dieser Versuchung weniger leicht: sie ist „geometrischer".

Unter geeigneten Umständen gibt es hier zu Abbildung 11.1b) analoge nichttriviale Bündel, für die dann die basisunabhängig *nicht* definierbare Form α nicht global existiert und φ somit nur geschlossen (Bianchi-Identität), aber nicht exakt ist. Ein Beispiel dafür liefert die Wechselwirkung von Φ mit festgehaltenen (hypothetischen) ***magnetischen Monopolen*** im flachen Raum. Im Ruhsystem eines punktförmigen Monopols ist fürs elektromagnetische Feld

$$\vec{E} = 0, \qquad \vec{B} = g\,\vec{x}/r^3, \qquad \text{also} \qquad \varphi = e\vec{B}\,\mathrm{d}\vec{O} = eg\vec{x}/r^3\,\mathrm{d}\vec{O} = eg\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}o.$$

Sucht man im Außenraum des Monopols, $X^4 = \{$Minkowskiraum minus Weltlinie der magnetischen Ladung$\}$, ein Viererpotential, so ergibt etwa der axialsymmetrische Ansatz $\alpha = a(r,\theta)\,\mathrm{d}\phi$ sofort

$$\alpha = e\,g(K - \cos\theta)\,\mathrm{d}\phi = \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{x}, \qquad \text{entsprechend} \qquad \vec{A} = g\,\frac{K - \cos\theta}{r\sin\theta}\,\vec{e}_\phi$$

mit Singularitäten, deren Ort von der Wahl der Konstanten K abhängt. *Eine* Singularität für jedes α *muß* auf jeder den Monopol umgebenden Kugel $\mathbf{S}^2$ auftreten, sonst ergäbe sich $4\pi eg = \int_{\mathbf{S}^2}\varphi = \int_{\partial\mathbf{S}^2}\alpha = 0$: für $g \neq 0$ ist φ geschlossen, aber nicht exakt. Eine Lokalisierung dieser Singularität ist jedoch physikalisch bedeutungslos, weil eichabhängig. Etwa erhalten wir aus obigem α für $K = \pm 1$ zwei Potentiale $\alpha_\pm$ mit Singularität im $\begin{smallmatrix}\text{Süd-}\\ \text{Nord-}\end{smallmatrix}$ Pol jeder $\mathbf{S}^2$, die sich im Restgebiet um die Eichtransformation $\alpha_+ - \alpha_- = 2eg\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\Lambda$ unterscheiden. Fassen wir $i\alpha_\pm$ tatsächlich als Übertragungsformen eines Vektorbündels auf, so sind sie als auf 2 Schnittbasen $\{b_\pm\}$ (jeweils nur 1 Vektor!) bezogen zu denken, die (bei Einschränkung des Bündels auf $\mathbf{S}^2$, wo sich alles Nichttriviale abspielt) überall außer im $\begin{smallmatrix}\text{Süd-}\\ \text{Nord-}\end{smallmatrix}$ Pol definiert sind. Im Restgebiet $\{\mathbf{S}^2$ minus Pole$\}$ muß also die Umeichung $b_+ = e^{i\Lambda(x)}b_- = e^{2ieg\varphi}b_-$ eindeutig möglich sein. Wegen der Mehrdeutigkeit des Azimuts φ ist das aber nur für ganzzahlige Werte von $2eg$ der Fall. Dies führt, wenn man nicht wie hier Einheiten mit $\hbar = c = 1$ verwendet, zur *Diracschen Quantisierungsbedingung* $\frac{2eg}{\hbar c}$ = ganzzahlig. Die Chern-Form des auf $\mathbf{S}^2$ eingeschränkten Bündels (mit dem in der Mathematik üblichen Zahlfaktor) ist $\frac{-i}{2\pi}\Omega = \frac{1}{2\pi}\varphi$: ihr Integral über $\mathbf{S}^2$ ist also jene *ganze* Zahl, die in der Diracschen Bedingung auftritt. (Man kann zeigen, daß sie das Bündel in topologischer Hinsicht charakterisiert.)

3. Beispiel: X^n = Raum-Zeit, $G = SU(2)$, $E(X^n, \mathbf{V})$ sei ein Vektorbündel, wo $\mathbf{V}$ ein Darstellungsraum von $SU(2)$ ist. Dies liefert das historisch erste (Yang, Mills 1954) Beispiel, wo E nichts mit dem Tangentialbündel zu tun hat und gleichzeitig G *nicht abelsch* ist. Die Heuristik, die dazu und zu den Verallgemeinerungen mit anderer Wahl von G führt, ist grob die folgende. Die bekannte Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte gab Anlaß dazu, bei Vernachlässigung elektromagnetischer, schwacher und gravischer Wechselwirkungen Proton und Neutron als Zustände *eines* Teilchens, des Nukleons, aufzufassen. Diese Zustände gehen durch formale „Drehungen" in einem „inneren" Raum *(Isospinraum)* ineinander über, und die „starken" Wechselwirkungen der Nukleonen sind invariant unter Isospindrehungen anzusetzen. (Ebenso werden die drei π-Mesonen als drei Ladungszustände eines Teilchens aufgefaßt, die auseinander durch Drehungen in einem inneren Isovektorraum hervorgehen.) Gäbe es die übrigen Wechselwirkungen nicht, wäre es eine reine Konvention, welcher Zustand des Nukleons als Protonzustand, welcher als Neutronzustand anzusprechen sei: Physiker in benachbarten Zimmern, die sich untereinander nicht verständigen, würden verschiedene Konventionen treffen. Physikalische Aussagen sollten aber von solchen Willkürlichkeiten nicht abhängen – eine Art „Relativitätsprinzip" in diesem Bereich! Der Formalismus von Vektorbündeln und Übertragungen darin kodifiziert gerade nur solche Aussagen. Das hier bei Ableitungen zu benutzende Kompensationsfeld *(Yang-Mills-Feld)* sollte in Analogie zum elektromagnetischen Fall des vorigen Beispiels die starke Wechselwirkung vermitteln. (Im heutigen Standardmodell der Teilchenphysik geschieht Ähnliches, mit größeren Gruppen als $SU(2)$, auf dem Niveau der Quarks und Gluonen, etc.)

Für eine $SU(2)$-Übertragung setzen wir, wenn $\mathbf{V} = \mathbf{C}^2$ die definierende Darstellung (Isospinordarstellung) von $SU(2)$ trägt, bezüglich einer $SU(2)$-Basis im Isospinorbündel

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{i}{2}\vec{\omega}\vec{\tau}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = -\frac{i}{2}\vec{\Omega}\vec{\tau} \tag{11.5.15}$$

an, wo $\vec{\tau}$ die drei Paulimatrizen sind, so daß $-\frac{i}{2}\vec{\tau}$ eine Basis im Raum der antihermitischen spurlosen Generatoren von $SU(2)$ ist. Wegen

$$\tau_a \tau_b = \delta_{ab} \cdot \mathbf{1} + i\,\epsilon_{abc}\,\tau_c \tag{11.5.16}$$

erhalten wir aus $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{d} \wedge \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}$ leicht

$$\Omega^c = \mathrm{d} \wedge \omega^c + \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{abc}\,\omega^a \wedge \omega^b \quad \text{oder} \quad \vec{\Omega} = \mathrm{d} \wedge \vec{\omega} + \tfrac{1}{2}\,\vec{\omega} \times \vec{\omega} \tag{11.5.17}$$

in Übereinstimmung damit, daß die Strukturkonstanten dieser zur Drehgruppe $SO(3)$ lokal isomorphen Gruppe bezüglich der gewählten Erzeugendenbasis $C^c{}_{ab} = \epsilon_{abc}$ sind. Aus der Dynamik der freien Nukleonen entsteht die unter der „geeichten Isospingruppe" kovariante Dynamik durch die Substitution

$\mathrm{d} \to \mathbf{D} = \mathrm{d} + \boldsymbol{\omega}$, und wie im vorigen Beispiel ist zur Vervollständigung noch die Lagrangefunktion für das freie Yang-Mills-Feld hinzuzufügen. In Analogie zu vorher setzt man dafür (bis auf eine Kopplungskonstante)

$$L_{\mathrm{Y.M.}}\,\mathrm{d}^4x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{\Omega} \wedge *\boldsymbol{\Omega}) = \tfrac{1}{4}\,\delta_{ab}\,\Omega^a \wedge *\Omega^b = -\tfrac{1}{4}\,\vec{\Omega}_{ik}\,\vec{\Omega}^{ik}\,\mathrm{d}^4x. \qquad (11.5.18)$$

Die Spur mußte gegenüber (11.5.13) noch hinzugefügt werden, um die Isospin-indizes abzusättigen. Was wäre neben (11.5.18) noch infrage gekommen? An $SU(2)$-invarianten 4-Formen, die aus $\vec{\Omega}$ gebildet werden, käme noch $(\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega})^2$, $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\Omega}) \wedge *\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\Omega})$, $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\Omega}^2)$ infrage, aber $\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\Omega} \equiv 0$, und $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\Omega}^2)$ gibt als Chern-Form triviale Feldgleichungen. Etwas systematischer hat man

$$L_{\mathrm{Y.M.}}\,\mathrm{d}^4x = f_{ab}\,\Omega^a \wedge *\Omega^b \qquad (11.5.18')$$

anzusetzen, wo f_{ab} ein unter der adjungierten Darstellung von $G = SU(2)$ d. h. unter $SO(3)$ invarianter symmetrischer Tensor ist. (Die Dualenbildung an einem Faktor ist nötig, sonst ergibt sich ja eine „topologische" Form mit trivialen Feldgleichungen.) Alle solchen Tensoren sind aber zu δ_{ab} proportional, was auch die Anzahl der auftretenden Kopplungskonstanten zu 1 festlegt (siehe Aufgabe).

Aufgrund der Nichtkommutativität der Gruppe ist in (11.5.17) ein in $\boldsymbol{\omega}$ nichtlinearer Term aufgetreten, der eine Nichtlinearität auch in den aus (11.5.18) durch Variation nach $\boldsymbol{\omega}$ folgenden Gleichungen des freien Yang-Mills-Feldes bewirkt. Aufgrund der Bianchi-Identität und der Invarianz von f_{ab} (hier gleich allgemeiner für beliebiges G angesetzt und als Schnitt eines in offensichtlicher Weise zu bildenden Bündels aufgefaßt) folgt mittels (11.4.9') durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\delta\frac{1}{2}\int f_{ab}\,\Omega^a \wedge *\Omega^b &= \int f_{ab}\,\delta\Omega^a \wedge *\Omega^b = \int f_{ab}(\mathrm{D} \wedge \delta\omega^a) \wedge *\Omega^b \\ &= \int f_{ab}\,\delta\omega^a(\mathrm{D} \wedge *\Omega^b) + \int \mathrm{d} \wedge \left(f_{ab}\,\delta\omega^a \wedge *\Omega^b\right).\end{aligned} \qquad (11.5.19)$$

Wir finden daher, wenn f_{ab} (wie im vorliegenden Beispiel mit $f_{ab} \propto \delta_{ab}$) nicht entartet ist, als Feldgleichung $\mathrm{D} \wedge * \vec{\Omega} = 0$, oder bei Mitberücksichtigung des „Nukleonenteils" der Lagrangefunktion, wo $\vec{\omega}$ über die kovariante Ableitung eingeht,

$$\mathrm{D} \wedge *\Omega^a = f^{-1\,ab} * J_b, \qquad (11.5.20)$$

worin die Isospinstrom-1-Form J_a durch

$$\delta\left(L_{\mathrm{Nukl.}}\,\mathrm{d}^4x\right) = \delta\omega^a \wedge *J_a + \delta\,(\text{„Nukleonfeld"}) \times \ldots \qquad (11.5.21)$$

definiert ist. Die durch die Nichtlinearität zum Ausdruck kommende Selbstkopplung nichtabelscher Eichfelder wird auch in der Stromerhaltung deutlich: aufgrund der Ricci-Identität für schnittwertige 2-Formen erhalten wir

$$\mathrm{D} \wedge *J_a = f_{ab}\, \mathrm{D} \wedge \mathrm{D} \wedge *\Omega^b = f_{ab}\, \Omega^c\, C^b{}_{cd} \wedge *\Omega^d \equiv 0. \tag{11.5.22}$$

$$\text{d.h.}\ \ \mathrm{D}_i \vec{J}^i = 0.$$

(Wir benutzten die Tatsache, daß die Matrixelemente der Basiserzeugenden in der adjungierten Darstellung, nach der $\vec{\Omega}$ transformiert, durch $(\boldsymbol{G}_c)^a_b = C^a{}_{cb} = -C^a{}_{bc}$ gegeben sind.) Natürlich kann $\mathrm{D} \wedge * J_a = 0$ direkt aus der Eichinvarianz von $L_{\mathrm{Nukl.}}\mathrm{d}^4x$ gefolgert werden, wie als Aufgabe gezeigt werden möge. In Analogie zum Gravitationsfall verschwindet nur die *kovariante* Divergenz des Isospinstromes: in gewissem Sinn trägt das Yang-Mills-Feld selbst Isospin. (Eichinvariante „Nukleon"-Lagrangefunktionen erhält man z. B. allgemein durch die „minimale Substitution" $\mathrm{d} \to \mathrm{D}$ aus der unter ortsunabhängigen Isospindrehungen invarianten Lagrangefunktion. Minimale Substitution garantiert eine Art „Äquivalenzprinzip", wie aus Aufgabe 3 von Abschnitt 11.3 hervorgeht. Verletzung der Eichinvarianz des Nukleonteils der Wirkung würde, ähnlich wie in Kapitel 10 diskutiert, eine Inkonsistenz hervorrufen.)

Damit haben wir den Prototyp einer nichtabelschen Eichtheorie vom Yang-Mills-Typ vor uns. Die Gruppe G sowie den Darstellungsraum $\mathbf{V}$ kann man dabei ohne weiteres abändern. Ist G kompakt und einfach, kann man zeigen (siehe Aufgabe), daß f_{ab} stets Vielfaches der Cartan-Killingschen „Gruppenmetrik" $C^d{}_{ac}\, C^c{}_{bd}$ ist: für G kompakt – halbeinfach sind die Möglichkeiten im gegebenen Fall ebenfalls überblickbar. Für nichthalbeinfaches G sei daran erinnert, daß die Gruppenmetrik entartet ist: ein f_{ab} dieser Art hätte die unerwünschte Konsequenz, daß Teile der Krümmung Ω^a nicht durch Feldgleichungen eingeschränkt wären, während der Strom J_a einige linear-homogene Bedingungen zu erfüllen hätte (nämlich $\tilde{f}^{ab} J_b = 0$, wo $\tilde{f}^{ab}$ die Matrix der zu den Elementen f_{ab} komplementären Minoren ist).

In den letzten Jahren sind Eichtheorien dieser Art im Sinne klassischer Feldtheorien stark untersucht worden: insbesondere wurde auf die Bedeutung von nichttrivialen Bündeln und deren topologischen Quantenzahlen hingewiesen („Instantonen", Monopole, „Solitonen"). Die physikalische Hauptbedeutung von Eichtheorien liegt aber wohl darin, daß die zugehörige Quantenfeldtheorie („definiert" über das Feynmansche Wegintegral; s. Nash (1978)) eine renormierbare Störungsentwicklung hat, wie in den frühen 70er Jahren erkannt wurde (siehe etwa E. S. Abers, B. W. Lee, Phys. Reports **9C**, 1 (1973)). Dies ermöglichte es, eine vereinheitlichte Theorie der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen auf eichtheoretischer Grundlage zu formulieren (siehe etwa Becher, Böhm & Joos (1980); Taylor (1976)). Für die Theorie der starken Wechselwirkungen war schließlich eine weitere Eigenschaft gewisser nichtabelscher Eichmodelle entscheidend, die „asymptotische Freiheit"

(vgl. Nash (1978)). So entstand der Eindruck, daß der richtige eichtheoretische Gesichtspunkt nicht nur die Beschreibung der Wechselwirkungen in der Natur zu vereinheitlichen helfen wird, sondern automatisch gewisse ohne die Eichsymmetrie auftretende Probleme beseitigt. Dies und die Tatsache, daß Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie viele eichtheoretische Züge trägt, ließ die Hoffnung entstehen, daß eine möglichst eichtheoretische Formulierung der Gravitationstheorie eines Tages auch die Quantisierung derselben in Reichweite rückt. Im nächsten Abschnitt wollen wir die Parallelen und Unterschiede zwischen Gravitationstheorie und dem Prototyp der Eichtheorie beleuchten.

4. Beispiel: Spinoren in der Allgemeinen Relativitätstheorie: Im Falle der Dirac-Spinorfelder handelt es sich um Schnitte des Spinorbündels $E(X^4, \mathbf{C}^4)$ mit der Strukturgruppe Spin(3,1), einer 2-blättrigen Überlagerungsgruppe der Lorentzgruppe $O(3,1)$. Eine entsprechende kovariante Differentiation wurde bereits in (9.4.7, 8, 11) eingeführt und entspricht natürlich genau den Ausführungen am Ende von Abschnitt 11.3. Hierbei macht die Zweiwertigkeit der Darstellung keine Schwierigkeit, da nur die Liealgebra benötigt wird. Hingegen treten bei globaler Betrachtungsweise Schwierigkeiten durch die Zweiwertigkeit schon *vor* der Einführung der Differentiation auf. Dies rührt daher, daß das Spinorbündel insofern mit der Basismannigfaltigkeit *verschmolzen* ist, als Ausdrücke wie $(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)\, e_\alpha$ Tangentialvektoren sein sollen und das Tangentialbündel schon durch die Mannigfaltigkeit fixiert ist. Am übersichtlichsten ist die Situation, wenn man sich auf Spinorfelder ψ mit $\gamma^5\psi = +\psi$ oder $\gamma^5\psi = -\psi$ beschränkt ($\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$), mit denen masselose Neutrinos beschrieben werden können. In einem Bündel $E(X^4, \mathbf{C}^2)$ solcher effektiv zweikomponentiger Weyl-Spinoren ist der Zusammenhang zwischen Spinoren und Vektoren besonders einfach (vgl. Sexl & Urbantke (1992), oder F. Pirani in Deser & Ford (1965)): Zu jeder raum- und zeitorientierten orthonormalen Tangentialbasis gehören genau zwei Spinorbasen, wobei sich entsprechende Basisspinoren nur ums Vorzeichen unterscheiden. Damit ein Spinor unter Lorentzdrehungen der Vektorbasis ein wohldefiniertes Transformationsverhalten hat, muß man sich per Konvention für eine der beiden Spinorbasen entscheiden als jene, auf die sich die Spinorkomponenten beziehen. (Daß die Relation zwischen Vektoren und Spinoren – anders als jene zwischen Vektoren und Tensoren – nicht ohne Zwischenschaltung des Begriffs der Orthonormalbasis auskommt, folgt aus dem Fehlen zweiwertiger (endlichdimensionaler) Darstellungen der vollen linearen Gruppe, unter der sich Vektoren noch wohlverhalten. Der Spinorbegriff ist ein metrischer Begriff, der nur noch auf die Ähnlichkeitsgruppe – siehe Beispiel 1 – ausdehnbar ist.) Damit diese Konvention von Punkt zu Punkt auf X^4 stetig „ausgebreitet" werden kann, ohne daß man je bei der Wiederkehr zu einem Punkt in Widerspruch mit der bereits gemachten Konvention gerät, muß X^4 nicht nur raum- und zeitorientierbar sein, sondern noch eine weitere topologische Eigenschaft – eine Spinstruktur – besitzen. Hinreichend, aber nach

Geroch (J. Math. Phys. **9**, 1739 (1968)) für eine *nichtkompakte*[6] Raumzeit X^4 auch notwendig ist die globale Existenz eines stetigen Systems orthonormaler Tangentialbasen – X^4 muß also auch noch parallelisierbar sein. (In höheren Dimensionen ist die Bedingung nicht mehr notwendig.) Ansonsten können keine überall stetigen Spinorfelder existieren. Der Nachweis dieser Eigenschaft ist allerdings nicht immer einfach. (In J. Math. Phys. **11**, 343 (1970) diskutiert R. Geroch praktikablere Kriterien, denen gemäß etwa die Schwarzschildgeometrie und Friedmann-Kosmologien eine Spinstruktur besitzen.)

Aufgaben

1. Man gebe die infinitesimale Version zu (11.5.1), (11.5.2), (11.5.7) sowie das Verhalten der ω^a dabei an!

2. $\boldsymbol{\omega} = \alpha \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{\omega}'$ definiere wie in Beispiel 1 eine torsionsfreie G-Übertragung bezüglich einer festen G-Basis $\{\omega^i\}$ (G = Ähnlichkeitsgruppe, $\boldsymbol{\omega}'$ antisymmetrisch). Dann definiert $\boldsymbol{\omega}'$ eine bezüglich $g := \eta_{ik}\,\omega^i \otimes \omega^k$ metrische Übertragung mit der Torsion

$$\Theta'^i = -\alpha \wedge \omega^i.$$

$\boldsymbol{\omega}''$ definiere in der gleichen $O(n)$-Struktur den eindeutig bestimmten torsionsfreien Zusammenhang. Dann ist ($\omega_i := \eta_{ik}\,\omega^k$)

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}'' + \boldsymbol{\Delta}, \qquad \Delta_{ik} = -\Delta_{ki} = A_k\,\omega_i - A_i\,\omega_k.$$

Von den zugehörigen Krümmungen ist $\boldsymbol{\Omega}'$ maßstabsinvariant, aber aus $\{\omega^i\}$ *und* α gebildet, d. h. von der G-Übertragung abhängig; $\boldsymbol{\Omega}''$ ist nur aus $\{\omega^i\}$ gebildet, aber nicht maßstabsinvariant. Einsetzen in (11.4.9) ergibt für $\Omega'_{ik} - \Omega''_{ik}$ einen Ausdruck der Gestalt $B_{[i} \wedge \Omega_{k]}$ mit gewissen 1-Formen B_i. Bildet man die zugehörigen Ricci-Formen $R'_i := R'_{ik}\,\omega^k$, R''_i und die Krümmungsskalare $R' = \eta^{ik} R'_{ik}$, $R'' = \eta^{ik} R''_{ik}$, so kann B_i zwischen den Differenzen $\Omega'_{ik} - \Omega''_{ik}$, $R'_i - R''_i$, $R' - R''$ eliminiert werden, wobei eine Gleichung der Gestalt $C'_{ik} = C''_{ik} = \frac{1}{2} C''_{ikmn}\,\omega^m \wedge \omega^n$ entsteht. Dabei ist $C''_{\cdots}$ der Weyltensor (2.8.8) der Metrik g, und $C'_{\cdots}$ ist analog aus $\boldsymbol{\Omega}'$ gebildet. $C'_{ik} = C''_{ik}$ ist daher nicht nur maßstabsinvariant, sondern auch von α unabhängig, also *allein* durch die *konforme* Struktur bestimmt. – Man führe die Details aus.

3. Man folgere (11.5.22) direkt aus der Eichinvarianz der „Nukleon"-Lagrangefunktion! (Vgl. Aufgabe 2 von Abschnitt 3.4.).

[6] Kompakte Raum-Zeiten enthalten nach R. Geroch, J. Math. Phys. **8**, 782 (1967) geschlossene zeitartige Linien.

Hinweis: Für Variationen $\delta\omega^a$, die von infinitesimalen „aktiven" Eichtransformationen $\boldsymbol{S} \approx \mathbf{1} + \delta\tau\, g^a\, \boldsymbol{G}_a$ stammen, ergibt sich aus Aufgabe 1

$$\delta\omega^a = +\delta\tau \left(\mathrm{d}g^a + \omega^b\, C^a_{bc}\, g^c\right).$$

Berücksichtigt man, daß sich die g^a wie Vektorkomponenten unter „passiver" Anwendung der adjungierten Darstellung verhalten, hat man einfach $\delta\omega^a = \mathrm{D}g^a\delta\tau$. Nun kann leicht partiell integriert werden.

4. Man überlege sich, daß die Elemente der Matrizen γ^a in der Dirac-Gleichung Komponenten eines Vektor-Spinors sind, der nach Aufgabe 2, Abschnitt 11.3 kovariant konstant ist. $\gamma_a\, e^a = \gamma_i\, \mathrm{d}x^i$ fungiert als Verschmelzungsform des Spinorbündels. Ebenso sind die Elemente der Ladungskonjugationsmatrix C und der Dirac-Adjunktionsmatrix β (vgl. Sexl-Urbantke (1992)) ($\bar{\psi} = \psi^\dagger\beta$) Komponenten kovariant konstanter Spinoren.
Zeige $\frac{1}{4!}\,(\gamma_\alpha\, e^\alpha)^4 = -i\,\gamma^5\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$.

5. Sei G eine kompakte einfache Liegruppe und f_{ab} ein symmetrischer kovarianter Tensor über der Liealgebra $\mathbf{g}$ von G, der unter der adjungierten Darstellung invariant ist. Man zeige, daß f_{ab} Vielfaches der Killing-Cartan-Metrik ist. Wie ist diese Aussage für kompakte ***halbeinfache*** Gruppen abzuändern, und was folgt daraus für die Anzahl der Kopplungskonstanten in diesem Fall?
Anleitung: Aufgrund der Einfachheit von G ist die adjungierte Darstellung irreduzibel und die Killing-Cartan-Metrik g_{ab} invertierbar. Der Tensor $g^{-1\,ac} f_{cb}$ kommutiert mit den Operatoren der adjungierten Darstellung. Das Schursche Lemma kann noch nicht angewendet werden, weil dazu komplexe Zahlen Voraussetzung wären, während $\mathbf{g}$ reell und die adjungierte Darstellung nur im Reellen irreduzibel ist. Die Kompaktheit garantiert aber eine negativ definite Matrix g_{ab}, in geeigneter Erzeugendenbasis also $g_{ab} = -\delta_{ab}$, so daß die eben gebildeten Tensorkomponenten in dieser Basis eine symmetrische Matrix bilden. Es existiert also ein vollständiges System reeller Eigenräume, die unter der adjungierten Darstellung invariant sind und daher mit $\mathbf{g}$ übereinstimmen müssen. Es folgt $f_{ab} \propto \delta_{ab}$ in dieser Basis, also $f_{ab} \propto g_{ab}$ in jeder anderen. – Im halbeinfachen Fall ist die adjungierte Darstellung auszureduzieren.

11.6 Ist die Gravitationstheorie eine Eichtheorie?

Wir untersuchen nun die Frage, inwieweit die Gravitationstheorie als Eichtheorie aufgefaßt werden kann. Dabei wird wieder – vgl. die Bemerkung zu Beginn von Abschnitt 4.1 – das kinematische Niveau (welche Feldvariable? – bestimmt

durch die Materiekopplungen) und das dynamische Niveau (welche Feldgleichungen bzw. Lagrangefunktion?) zu trennen sein. Dennoch werden wir nicht einen der beiden Aspekte vor dem anderen vollständig erledigen, sondern auf beide immer wieder zurückkommen müssen. Bis zu Kapitel 7 arbeiteten wir mit Feldvariablen $g_{ik}(x)$, wobei die Theorie gegen die Transformationen

$$x^i \to \bar{x}^i = \bar{x}^i(x), \qquad g_{ik} \to g_{\bar{i}\bar{k}} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{\bar{k}}} g_{mn} \tag{11.6.1}$$

kovariant sein mußte. Die Christoffelsymbole (1.3.11), (1.3.6), die Komponenten des Riemann- und Riccitensors sowie der Krümmungsskalar waren zunächst nützliche Abkürzungen für Kombinationen von Ableitungen der Feldvariablen $g_{ik}(x)$ mit gewissen Kovarianzeigenschaften (man beachte aber die physikalische Deutung des Riemanntensors, die in der Deviationsgleichung zutage tritt, vgl. Aufgabe 3d) zu Abschnitt 8.4), mit deren Hilfe Feld- und Bewegungsgleichungen bzw. Lagrangefunktionen leicht gebildet werden können. Daß der metrische Tensor kovariant konstant ist, (2.6.19), folgt als Konsequenz der gemachten Definitionen. Dies ist in rein formaler Hinsicht der Standpunkt, den die Differentialgeometrie vor 1917 bezog und den auch Einstein verwendete.

In Kapitel 7 brachten wir die (ab 1917 von Levi-Cività, Weyl, Schouten vollzogene) begriffliche Trennung von Metrik $g_{ik}(x)$ und Übertragung $L^i{}_{jk}(x)$, wobei sich die Frage ergibt, warum für die Gravitationstheorie $L^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk}$ gelten sollte. Zugleich zeigten wir, wie man die Theorie (gemäß Cartan, 1922) in Termen von Differentialformen schreiben kann, so daß die Frage der Kovarianz unter Koordinatentransformationen trivial wird (die p-Formen sind ja vom Koordinatensystem unabhängig) und ersetzt wird durch die Frage nach der Kovarianz unter (ortsabhängigen) Vierbeintransformationen

$$e_a \to \bar{e}_a = p^b_{\bar{a}}(x)\, e_b. \tag{11.6.2}$$

Wir betonten im weiteren allerdings mehr die rechentechnischen Vorteile, die sich daraus (insbesondere bei Verwendung orthonormaler Basisformen) ergeben, während uns jetzt die daraus resultierenden eichtheoretischen Gesichtspunkte interessieren.

Gemäß Abschnitt 11.3 können wir zunächst die Metrik als $O(3,1)$-Struktur im Tangentialbündel auffassen und vermuten, daß eine Eichtheorie der Lorentzgruppe vorliegt. Nach dem Muster der Beispiele 2, 3 des vorigen Abschnittes wären dann die unabhängigen Feldvariablen die Konnexionsformen $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$. (Wir bezeichnen wie in Abschnitt 9.4 Indizes, die sich auf eine $O(3,1)$-Basis beziehen, mit griechischen Buchstaben.) Dies trifft aber auch in der Differentialformenversion der ART[7] *nicht* zu, hier werden die 6 Formen $\omega_{\alpha\beta}$ aus den vier orthonormalen Basisformen e^α unter Beachtung von $d\wedge e^\alpha - \omega^\alpha{}_\beta \wedge e^\beta = 0$ berechnet (vgl. (7.6.7'); wir schreiben hier e^α statt ω^α). Sie können daher auch nicht unabhängig variiert werden. Betrachten wir als

[7] Im Folgenden als Abkürzung für Allgemeine Relativitätstheorie verwendet.

nächstes das Wirkungsintegral (3.4.1), das bei Verwendung von Formen bis auf eine Konstante als

$$W = \int \Omega_{\alpha\beta} \wedge * \left(e^\alpha \wedge e^\beta\right) \tag{11.6.3}$$

geschrieben werden kann (Aufgabe). Im Gegensatz zu (11.5.18) tritt hier nicht nur die aus den $\omega_{\alpha\beta}$ allein gebildete Krümmungsmatrix $\Omega_{\alpha\beta}$ auf, sondern auch die e^α erscheinen explizit als Feldvariable, und zwar als partielle Komponenten der kanonischen Verschmelzungsform δ (vgl. Ende von Abschnitt 11.1; manche Autoren betrachten statt einer Eichtheorie von $O(3,1)$ eine Eichtheorie der zugehörigen Spinorgruppe Spin (3,1) oder $SL(2,\mathbf{C})$. Sie müssen dann statt e^α die Verschmelzungsform des Spinorbündels, $\gamma_\alpha e^\alpha$ oder $\sigma_\alpha^{AA'} e^\alpha$, verwenden; vgl. die Bemerkungen zum Beispiel 4 im vorigen Abschnitt.) Die $*$-Operation bezieht sich auf die Raum-Zeit-Metrik $g = \eta_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta$, die aber hier via Verschmelzung gleichzeitig Fasermetrik ist – im Gegensatz zu (11.5.18). Der Schönheitsfehler, daß die Variationen der $\omega_{\alpha\beta}$ von jenen der e^α abhängen, kann für (11.6.3) übrigens in jenen Fällen ignoriert werden, wo die $\omega_{\alpha\beta}$ nicht in die Lagrangefunktion der angekoppelten Materie eingehen. Variiert man nämlich (11.6.3) nach $\omega_{\alpha\beta}$ und e^α so, als wären sie unabhängig, erhält man mittels (11.4.9')

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int \delta\Omega_{\alpha\beta} \wedge * \left(e^\alpha \wedge e^\beta\right) + \int \Omega_{\alpha\beta} \wedge \delta * \left(e^\alpha \wedge e^\beta\right) \\
&= \int (\mathrm{D} \wedge \delta\omega_{\alpha\beta}) \wedge * \left(e^\alpha \wedge e^\beta\right) + \frac{1}{2} \int \Omega_{\alpha\beta}\, \epsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \delta \left(e^\mu \wedge e^\nu\right) \\
&= \int \mathrm{d} \wedge \left(\delta\omega_{\alpha\beta} \wedge * \left(e^\alpha \wedge e^\beta\right)\right) + \int \delta\omega_{\alpha\beta} \wedge \mathrm{D} \wedge * \left(e^\alpha \wedge e^\beta\right) \\
&+ \int \Omega_{\alpha\beta} \wedge \epsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\, e^\mu \wedge \delta e^\nu .
\end{aligned} \tag{11.6.4}$$

daher als Feldgleichungen $\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\, \Omega_{\alpha\beta} \wedge e^\mu = 0$ (bzw. = Quellterm) und $\mathrm{D} \wedge * \left(e^\alpha \wedge e^\beta\right) = 0$. Die ersteren entsprechen gerade den Einstein-Gleichungen in Formenschreibweise (Aufgabe), während die zweiten wegen der kovarianten Konstanz des ϵ-Tensors äquivalent zu $\mathrm{D} \wedge \left(e^\alpha \wedge e^\beta\right) = 0$ sind. Beachten wir, daß bei der hier verwendeten partiellen Komponentenschreibweise (s.o.) $\mathrm{D} \wedge e^\alpha$ soviel wie $(\mathrm{D} \wedge \delta)^\alpha = \Theta^\alpha$ (Torsion) bedeutet, finden wir zunächst $\Theta^\alpha \wedge e^\beta - \Theta^\beta \wedge e^\alpha = 0$, und dies ist (für $n \geq 4$) gleichwertig (Aufgabe) mit $\Theta^\alpha = \mathrm{d} \wedge e^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta \wedge e^\beta = 0$, jener Gleichung, die die Abhängigkeit der $\omega_{\alpha\beta}$ von den e^α angibt. Andere Lagrangefunktionen für $\omega_{\alpha\beta}$, e^α, oder Materie-Lagrangefunktionen, die $\omega_{\alpha\beta}$ enthalten (z. B. Dirac-Feld), liefern $\Theta^\alpha \neq 0$. Will man also im kinematischen Rahmen der ART (metrische, torsionsfreie Übertragung, „Riemann-Kinematik") bleiben, darf i. a. nicht so variiert werden. Tut man es dennoch („Riemann-Cartan-Kinematik"), hat man mit dem Auftreten von Torsion zu rechnen. Bei

dieser Auffassung der Variation (vielfach als *Palatini-Prinzip* bezeichnet) wird also nicht a priori $\Theta^\alpha = 0$ gesetzt, sondern auch die Torsion ist erst durch die Dynamik bestimmt.

Da die e^α (d. h. die kanonische Verschmelzung) für die Raum-Zeit-Interpretation von Übertragung und Krümmung wie für die Aufstellung geeigneter Lagrangefunktionen der Gravitation unumgänglich scheinen, kann man sich als nächstes fragen, ob sie sich nicht ebenfalls als Eichpotentiale auffassen lassen, indem man von der homogenen Lorentzgruppe $O(3,1)$ zu einer größeren Gruppe übergeht. Diese muß nach unseren allgemeinen Überlegungen vier weitere Parameter enthalten, was sofort die Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ (= inhomogene Lorentzgruppe mit Translationen) suggeriert; aber auch andere Gruppen wurden bereits in der Literatur diskutiert. Wir halten dann aber sogleich als erste Besonderheit fest, daß die e^α linear unabhängig sein müssen, während für Übertragungsformen eine solche Forderung im allgemeinen nicht gestellt wird. Bleiben wir bei $\mathcal{P}$, so ist als nächstes zu untersuchen, wie das Transformationsverhalten der Übertragungsformen bei geeichten Poincaré-Transformationen aussieht, und wie es sich mit dem Transformationsverhalten der e^α, $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ vergleicht. Dazu betrachten wir – zunächst als rein formales Hilfsmittel – die folgende 5-dimensionale treue Matrixdarstellung von $\mathcal{P}$: jedem Paar $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{a})$, bestehend aus der Lorentztransformation $\boldsymbol{L} \in O(3,1)$ und der nachfolgenden Translation $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^4$, ordnen wir die 5×5-Matrix

$$(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{a}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{11.6.5}$$

zu: die Menge dieser Matrizen bildet eine zur Poincarégruppe isomorphe Untergruppe $G \subset GL(5)$. Für infinitesimales $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{a})$ hat dies die Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{l} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

wo $\boldsymbol{l} = (l^\alpha{}_\beta)$ mit $l_{\alpha\beta} = -l_{\beta\alpha}$ (alle Indizes werden mit $\eta_{..}$, $\eta^{..}$ gezogen). Daher hat die Übertragungsmatrix für eine G-Übertragung in jedem Vektorbündel mit 5-dimensionalen Fasern bezüglich G-Basen die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \omega^\alpha{}_\beta & \omega^\gamma \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.6.6}$$

wobei wir bewußt noch nicht e^γ statt ω^γ geschrieben haben. Das Eichverhalten ergibt sich nun aus (11.5.1) mit (11.6.5) statt $\boldsymbol{S}$. Es genügt natürlich, reine Lorenzrotationen $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{o})$ und reine Translationen $(\mathbf{1}, \boldsymbol{a})$ getrennt zu betrachten. Unter ersteren erhalten wir ein Verhalten für ω^α, $\omega^\alpha{}_\beta$, das genau einer Lorentzrotation des Vierbeins e^γ und der zugehörigen Transformation von $O(3,1)$-Übertragungsformen entspricht; unter letzteren haben wir aber

$$\overline{\omega^\alpha{}_\beta} = \omega^\alpha{}_\beta, \qquad \overline{\omega^\gamma} = \omega^\gamma - \mathrm{d}a^\gamma - \omega^\gamma{}_\beta\, a^\beta. \tag{11.6.7}$$

Auf geeichte Translationen reagieren die $\omega^\alpha{}_\beta$ also nicht, weshalb wir sie auch gleich mit demselben Symbol bezeichneten wie die vorher betrachteten $O(3,1)$-Übertragungsformen, für die ja ein Translationsverhalten gar nicht definiert war. Die ω^γ hingegen zeigen ein nichttriviales Translationsverhalten, während ein solches für die Basisformen e^γ ebenfalls nicht definiert war. Die e^γ können also mit den zum Translationsteil der Gruppe gehörenden Übertragungsformen bestenfalls (nämlich nur bei linearer Unabhängigkeit) in einer bestimmten Translationseichung identifiziert werden. Mit anderen Worten, die Eichkovarianz unter der geeichten Poincaré-Gruppe ist mit dieser Identifizierung bereits auf kinematischem Niveau gebrochen und besteht nur unter der Untergruppe $O(3,1)$.

Um die Kovarianz von Ansätzen für die Dynamik beurteilen zu können, benötigen wir noch die Strukturgleichungen und das Eichverhalten der Krümmungsmatrix, die die Gestalt $\begin{pmatrix} \Omega^\alpha{}_\beta & \Omega^\gamma \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$ haben muß. Die Strukturgleichung (11.2.6) ergibt mittels (11.6.6) für $\Omega^\alpha{}_\beta$ die gewohnte $O(3,1)$-Krümmungsmatrix, und zusätzlich erhalten wir

$$\Omega^\gamma = \mathrm{d} \wedge \omega^\gamma + \omega^\gamma{}_\beta \wedge \omega^\beta, \tag{11.6.8}$$

was erfreulicherweise formal mit der Strukturgleichung (11.1.14) für die Torsion Θ^γ übereinstimmt, wenn ω^γ mit e^γ identifiziert wird. Die Eichabhängigkeit dieser Identifizierung bewirkt auch eine Eichabhängigkeit von Ω^γ unter Translationen,

$$\overline{\Omega^\alpha{}_\beta} = \Omega^\alpha{}_\beta, \qquad \overline{\Omega^\gamma} = \Omega^\gamma - \Omega^\gamma{}_\beta\, a^\beta, \tag{11.6.9}$$

so daß $\Omega^\gamma = \Theta^\gamma$ nur in den Eichungen mit $\omega^\gamma = e^\gamma$ gilt. Das Rotationsverhalten von $\Omega^\alpha{}_\beta$, Ω^γ stimmt wieder mit jenem von $\Omega^\alpha{}_\beta$, Θ^γ von früher überein – daher auch das gleiche Symbol $\Omega^\alpha{}_\beta$. Ein weiterer eleganter Zug der $\mathcal{P}$-Übertragung ist, daß die Bianchi-Identität für die $\mathcal{P}$-Krümmung die Bianchi-Identitäten (11.2.7) und (11.2.8) für $O(3,1)$-Krümmung und Torsion zusammenfaßt (Aufgabe).

Ersetzen wir nun probeweise die e^γ im Wirkungsintegral (11.6.3) durch die ω^γ, so zeigt ein Blick auf (11.6.7), (11.6.9), daß die Translationseichinvarianz auch auf dynamischem Niveau gebrochen ist. Man beachte dabei, daß die e^γ auch an der $*$-Operation beteiligt sind. Daher sind nicht nur Wirkungsintegrale wie $\int \Theta_\alpha \wedge \Theta^\alpha$, $\int \Omega_{\alpha\beta} \wedge \Omega^\alpha \wedge \omega^\beta$ nicht translationsinvariant, sondern auch so unschuldig aussehende wie $\int \Omega^\alpha_\beta \wedge *\Omega^\beta_\alpha$ (der Unterschied zu eichinvarianten Dynamiken wie (11.5.18) besteht hier darin, daß dort die Eichtransformationen nicht an der $*$-Operation angreifen, da dort keine Verschmelzung vorliegt). Dennoch sind Wirkungsintegrale dieser Art und weitere, sowie geeignete Kombinationen von ihnen, die die experimentellen Tests überleben, betrachtet worden. Ein Argument dafür ist, daß es gelegentlich als unbefriedigend empfunden wird, daß die Feldgleichungen zu (11.6.3) allein (plus Materieterme) $\omega_{\alpha\beta}$ *algebraisch*

durch e^α, de^α und eventuell Materieterme (Spindichte) auszudrücken gestatten (siehe oben), also $\omega_{\alpha\beta}$ „undynamisch" ist: Torsion wird hier nicht abgestrahlt. (Wegen dieser sogenannten Einstein-Cartan-Theorie siehe die Überblicksartikel von F. Hehl et al., A. Trautman in Held (1980), Vol. I, in Bergmann & de Sabbata (1980) und die dort zitierte Literatur). Die einzigen einfachen $\mathcal{P}$-invarianten Ansätze sind $\int \Omega^\alpha{}_\beta \wedge \Omega^\beta{}_\alpha$ und $\int \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\, \Omega^{\alpha\beta} \wedge \Omega^{\mu\nu}$, die aber (vgl. Abschnitt 11.4: Pontrjagin- und Eulerformen) zu trivialen Feldgleichungen führen.

Akzeptiert man einmal die Idee, mit den Variablen der Eichtheorie einer gewissen Gruppe G zu arbeiten, die Eichkovarianz aber in der einen oder anderen Art zu brechen – dies geschieht in vielen und auch in bewährten Modellen der Teilchenphysik –, so eröffnen sich natürlich viele weitere Möglichkeiten, die ART oder Modifikationen davon als Eichtheorien zu interpretieren. Ein allgemeiner Gesichtspunkt, den man vielleicht herausheben kann, ist der, daß die Gruppe G dabei stets eine Untergruppe H enthalten muß, bezüglich der Kovarianz herrscht, wobei der Quotientenraum $K = G/H$ die Dimension der Basismannigfaltigkeit (d. i. $= 4$) hat. (Bisher: $G = \mathcal{P}$ 10-dimensional, $H = O(3,1)$ 6-dimensional). Ohne weitere Komplikationen kommt man so nur weiter, wenn $K = G/H$ eine sogenannte *reduktive Struktur* (vgl. Kobayashi & Nomizu (1969); manchmal auch schwach reduktive Struktur genannt, vgl. Dieudonné (1976) IV) gestattet, d. h. wenn für die Liealgebren $\mathsf{g} \supset \mathsf{h}$ von $G \supset H$ eine Zerlegung $\mathsf{g} = \mathsf{h} \oplus \mathsf{k}$ existiert, bei der nicht nur h (wegen der Untergruppeneigenschaft), sondern auch der Teilraum k unter der adjungierten Wirkung von H invariant ist. Die adjungierte Darstellung von G soll also bei Einschränkung auf H zerfallen. Denken wir uns G durch eine treue Matrixdarstellung gegeben, so bedeutet das für die k aufspannenden Generatoren $\boldsymbol{K}_\alpha$ und für $\boldsymbol{S} \in H$, daß $\boldsymbol{S}\boldsymbol{K}_\alpha\boldsymbol{S}^{-1} = L^\beta_\alpha(\boldsymbol{S})\boldsymbol{K}_\beta$ ohne Beiträge mit Generatoren $\boldsymbol{H}_\mu$ von H gilt – i. a. werden ja rechts alle Generatoren von g benötigt. k muß weder ein Ideal noch eine Teilalgebra sein, wie es für $G = \mathcal{P}$, $H = O(3,1)$, $\mathsf{k} =$ (Algebra der Translationen) der Fall ist. Genau dann verhalten sich in der Zerlegung (11.3.6), $\omega^a\boldsymbol{G}_a = \sum \omega^\mu \boldsymbol{H}_\mu + \sum \omega^\alpha \boldsymbol{K}_\alpha$ die ω^α unter H tensoriell wie zuvor die Kobasisformen unter $O(3,1)$ (Aufgabe). Da die ω^α in der Eichung, in der sie mit den Kobasisformen $e^\alpha = h^\alpha_i\, dx^i$ identifiziert werden, als linear unabhängig vorauszusetzen sind, kann h^α_i invertiert werden, und mit der inversen Matrix h^i_α können nun auch kovariante Ableitungen $D_i v$ in Objekte verwandelt werden, die unter H tensoriell transformieren. Dies ermöglicht die Anwendung der Darstellungs- und Invariantentheorie der jeweiligen Gruppe H bei der Konstruktion von Lagrangefunktionen. (Die Reduktivitätsbedingung scheint in Zusammenhang mit Überlegungen dieser Art bereits auf bei É. Cartan, Annals of Math. **38**, 1 (1937), und ist etwa für kompakte, oder zusammenhängende halbeinfache, oder diskrete Untergruppen H stets erfüllt. k braucht übrigens nicht eindeutig bestimmt zu sein).

Es ist hier nicht der Ort, um die in der Literatur gemachten Versuche dieser Art systematisch durchzubesprechen, zumal sich keiner von ihnen endgültig durchgesetzt hat. Wir wollen nur einen von ihnen im Ansatz erläutern, um zu

zeigen, wie sehr sich dabei das von der ART geläufige Vokabular ändern kann. (Leider ist auch die in der Literatur gebrauchte Terminologie nicht einheitlich). Um anzudeuten, worum es bei dieser sogenannten Fernparallelismus-Version der Gravitationstheorie geht, formen wir zunächst (11.6.3) unter Verwendung der Definition von $\Omega_{\alpha\beta}$ wie folgt um:

$$\begin{aligned} W &= \int (\mathrm{d}\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega^{\gamma}{}_{\beta}) \wedge * (e^{\alpha} \wedge e^{\beta}) = \int \mathrm{d} \wedge (\omega_{\alpha\beta} \wedge * (e^{\alpha} \wedge e^{\beta})) \\ &\quad + \int \omega_{\alpha\beta} \wedge \mathrm{d} * (e^{\alpha} \wedge e^{\beta}) + \int \omega_{\alpha\beta} \wedge \omega^{\gamma}{}_{\beta} \wedge * (e^{\alpha} \wedge e^{\beta}) \\ &=: \int \mathrm{d} \wedge (\omega_{\alpha\beta} \wedge * (e^{\alpha} \wedge e^{\beta})) + W'. \end{aligned}$$

Da $\int \mathrm{d} \wedge (\ldots)$ in ein Oberflächenintegral umgeformt werden kann, gibt W' dieselben Feldgleichungen wie W (diese Umformung entspricht jener von (3.4.2) zu (3.4.5, 6)). Wie in der Standard-ART und im Gegensatz zu der oben als Palatini-Prinzip bezeichneten Betrachtungsweise betrachten wir nun in W' die $\omega^{\alpha}{}_{\beta}$ als gemäß $\mathrm{d}e^{\alpha} + \omega^{\alpha}{}_{\beta} \wedge e^{\beta} = 0$ durch die e^{α} ausgedrückt (vgl. (7.6.14, 15)):

$$\omega^{\alpha\beta} = * \left[e^{\alpha} \wedge *\mathrm{d} \wedge e^{\beta} - e^{\beta} \wedge *\mathrm{d} \wedge e^{\alpha} - \tfrac{1}{2} e^{\alpha} \wedge e^{\beta} \wedge * (e^{\mu} \wedge \mathrm{d} \wedge e^{\nu}) \eta_{\mu\nu} \right]. \tag{11.6.10}$$

Das gibt $W' = \int L(e^{\alpha}, \mathrm{d}e^{\alpha})$. Hier interpretieren wir nun wie oben die e^{α} als Übertragungsformen ω^{α} im Sinne einer Eichtheorie der Translationsgruppe T *allein*. Das Translationsverhalten der ω^{α} ergibt sich aus (11.6.7) mit $\omega^{\alpha}{}_{\beta} = 0$, daher wieder $e^{\alpha} = \omega^{\alpha}$ nur in einer bestimmten Eichung, die Translationskovarianz ist bereits kinematisch bis zur trivialen Untergruppe (Einheitselement) gebrochen. Die Translationskrümmung $\Omega^{\alpha} = \mathrm{d}\omega^{\alpha}$ ist zwar nunmehr translationsinvariant ((11.6.9) mit $\Omega^{\alpha}{}_{\beta} \equiv 0$) und stimmt also mit $\mathrm{d}e^{\alpha}$ überein, doch ist W' nicht translationsinvariant (dynamische Symmetriebrechung). Da Rotationen der e^{α} bei dieser Betrachtung ausgeschlossen wurden und T kinematisch gebrochen ist[8], sind die e^{α} nun ausgezeichnet und definieren eine Parallelisierung der Raum-Zeit (Parallelisierbarkeit ist dabei vorauszusetzen). Wir erinnern nun, daß mit einer Parallelisierung (1-Struktur) auf der Mannigfaltigkeit eine 1-Übertragung (Fernparallelismus) im Tangentialbündel verbunden ist, deren Krümmung verschwindet und deren Torsion $\Theta^{\alpha} = \mathrm{d}e^{\alpha}$, also gleich der obigen Translationskrümmung ist. In diesem Sinn wird also die Gravitation „nicht durch die Krümmung, sondern durch die Torsion" beschrieben. Da nicht nur in obigem W', sondern bei jeder Wahl von $L(e^{\alpha}, \mathrm{d}e^{\alpha}) = L(e^{\alpha}, \Theta^{\alpha})$ mit abgesättigten Lorentzindizes Invarianz unter *ortsunabhängigen* Vierbeindrehungen besteht, ist tatsächlich in Theorien dieser Art nicht die Parallelisierung durch spezielle e^{α}, sondern nur der durch sie definierte Fernparallelismus

[8] Es sei erwähnt, daß es auch andere Interpretationen des Fernparallelismus gibt, die ohne kinematische Brechung der *Translationssymmetrie* auskommen.

relevant. Dazu kommt noch die durch $\eta_{\alpha\beta}e^\alpha \otimes e^\beta$ definierte, im Sinn des Fernparallelismus kovariant konstante pseudo-riemannsche Metrik. Eine derartige Struktur wird als *Weitzenböck-Raum* bezeichnet. Das Einsteinsche Wirkungsintegral W' ist „zufällig" auch unter ortsabhängigen Vierbeindrehungen invariant und erlaubt daher auch die Interpretation mit reiner Riemanngeometrie (Torsion $= 0$, Krümmung $\neq 0$). Modifikationen desselben im eben beschriebenen Sinn wurden tatsächlich untersucht (vgl. Hehl, loc. cit.), sie gestatten die rein riemanngeometrische Alternativinterpretation nicht mehr. Quelle für die Torsion ist in diesen Theorien $\delta L_{\text{Materie}}/\delta e^\alpha$, was – wie wir nicht im Detail ausführen wollen – eine Version des Energie-Impulstensors der Materie ist. (Die Variation nach den metrischen Koeffizienten bei fester Basis $\{dx^i\}$ führte uns in (3.4.24) auf den Belinfante-symmetrisierten Energie-Impulstensor).

Wenn wir wieder zur umfassenderen Riemann-Cartan-Kinematik (e^α, $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ primär unabhängig) zurückkehren, stellen wir fest, daß es auf die gewählte Lagrangefunktion der Gravitation ankommt, ob $\delta L_{\text{Materie}}/\delta e^\alpha$ oder $\delta L_{\text{Materie}}/\delta\omega_{\alpha\beta}$ Quelle für Krümmung (= Rotationskrümmung) oder Torsion (= Translationskrümmung) ist, oder ein noch komplizierterer Fall eintritt. Manche Autoren (vgl. Hehl, loc. cit.) versuchten hier eine Entscheidung mittels der Bemerkung zu treffen, daß diese Quellterme im Limes des flachen Raumes in die Noetherströme zu Translationen bzw. Rotationen (vgl. Sexl & Urbantke (1992)) übergehen. Um die Noetherströme auch ohne den flachen Limes zu erhalten, wurden noch weitere kinematische Betrachtungen angestellt, die auch für sich gesehen eine nützliche Illustration der geometrischen Sachlage bieten.

Wir schließen dazu an die in (11.6.5) formal eingeführte 5-dimensionale Darstellung von $\mathcal{P}$ an. Der Vektorraum $\mathbf{V}^5 = \{(y^\alpha, y^5)\} = \mathbf{R}^5$ dieser Darstellung hat als $\mathcal{P}$-invarianten Teilraum $\mathbf{V}^4 = \{(y^\alpha, 0)\}$, auf dem $\mathcal{P}$ wie $O(3,1)$, T also trivial wirkt. Die Darstellung ist aber nicht zerfällbar. Vektoren der Form $(y^\alpha, 1)$ etwa gehen wieder in Vektoren dieser Form über: $(y^\alpha, 1) \to (L^\alpha_\beta y^\beta + a^\alpha, 1)$. Diese Vektoren bilden zusammen die Hyperebene $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}^5$ mit der Gleichung $y^5 = 1$, die selbst kein Vektorraum ist (Addition und Zahlenmultiplikation führt aus $\mathbf{A}$ heraus). Die Differenzen von Vektoren aus $\mathbf{A}$ gehören zu $\mathbf{V}^4$, und man kann zu jedem festen Vektor $\in \mathbf{A}$ alle Vektoren von $\mathbf{V}^4$ addieren, um ganz $\mathbf{A}$ zu erhalten. Das charakterisiert $\mathbf{A}$ als affinen *Punktraum* (mit Pseudometrik), dessen *Verbindungsvektoren* (gerichtete Strecken) den Vektorraum $\mathbf{V}^4$ bilden. $\mathbf{A}$ ist ein homogener Raum der Gruppe $\mathcal{P}$, die transitiv auf ihm wirkt (jeder Punkt kann mittels $\mathcal{P}$ in jeden übergeführt werden), alle seine Punkte sind gleichberechtigt, und erst nach willkürlicher Wahl eines „Ursprunges" ist er mit $\mathbf{V}^4$ begrifflich gleich. Haben wir nun ein Vektorbündel mit $\mathbf{V}^5$ als Standardfaser, und darin eine $\mathcal{P}$-Struktur mit $\mathcal{P}$-Übertragung, so liefert dies automatisch 1. ein Vektorbündel mit $\mathbf{V}^4$ als Standardfaser und einer $O(3,1)$-Struktur mit $O(3,1)$-Übertragung ($\mathbf{V}^4_P \subset \mathbf{V}^5_P$ wird durch die ersten vier Vektoren einer $\mathcal{P}$-Basis $(b_\alpha, b_5)_{|P}$ von $\mathbf{V}^5_P$ aufgespannt), sowie 2. ein Bündel affiner Räume $\mathbf{A}_P = \{b_5 + a^\alpha b_\alpha\}_{|P}$; bei der $\mathcal{P}$-Übertragung

$\mathbf{V}^5_Q \to \mathbf{V}^5_P$ geht $\mathbf{V}^4_Q \to \mathbf{V}^4_P$ und $\mathbf{A}_Q \to \mathbf{A}_P$. (Man kann dieses Bündel affiner Räume (alle $\cong \mathbf{A} \cong \mathcal{P}/O(3,1)$) sowie eine Übertragung darin auch selbständig, also ohne seine Einbettung in ein Vektorbündel, definieren (vgl. Kobayashi & Nomizu (1963)); umgekehrt können aber die meisten praktisch wichtigen Bündel homogener Räume G/H, die in der Theorie der sogenannten „spontanen Symmetriebrechung" auftreten (vgl. A. Trautman, in Held (1980), Vol. I), in geeignete Vektorbündel eingebettet werden.) Man gelangt so zur folgenden Cartanschen Auffassung einer (metrisch-)*affinen Übertragung* auf X^4, die den Namen „affin" statt „linear" mehr rechtfertigt. Jede affine Faser $\mathbf{A}_P$ (Kopie des flachen Minkowski-Raumes (= Ereignisraum = Punktraum!)) soll ein „lokales Modell" der Basismannigfaltigkeit X^4 im Punkt P sein, d.h. dort X^4 approximieren. Dazu muß aber auch in $\mathbf{A}_P$ ein Punkt (= Vektor in $\mathbf{V}^5_P$) ausgezeichnet werden, nahe dem die Approximation am besten ist: diesen „Berührpunkt" denkt man sich mit P identifiziert (Berührung „0. Ordnung"). Dadurch wird die Translationssymmetrie kinematisch gebrochen (während sie, im Teilchenphysik-Jargon, durch die Verwendung eines $\mathbf{A}$ ($\cong \mathcal{P}/O(3,1)$)-Bündels nur „spontan" gebrochen war) und effektiv $\mathbf{A}_P = P + \mathbf{V}^4_P$ in leicht verständlicher Symbolik. Die Übertragung gestattet, für beliebige infinitesimal benachbarte $P, Q \in X^4$ die Fasern $\mathbf{A}_P$, $\mathbf{A}_Q$ durch $\mathcal{P}$-Transformation aufeinander zu beziehen gemäß $\mathrm{D}b_\alpha = \omega^\beta{}_\alpha \otimes b_\beta$, $\mathrm{D}b_5 = \omega^\gamma \otimes b_\gamma$. Wir wählen nun $b_{5|P} = P$ (Identifizierung) und haben damit die Translationseichung der Situation entsprechend fixiert. Heuristisch heißt $\mathrm{D}b_5 = \mathrm{D}P = \omega^\gamma \otimes b_\gamma$, daß $Q \in \mathbf{A}_Q$ nach $\mathbf{A}_P$ übertragen einen Punkt $Q' \in \mathbf{A}_P$ ergibt, dessen Differenzvektor zum Ursprung $P \in \mathbf{A}_P$, $\vec{PQ'} = \mathrm{D}P \in \mathbf{V}^4_P$, die Zerlegung $\omega^\gamma b_\gamma$ hat. Die „sparsamste" Art, dies präzise zu machen, ist es, wie gewohnt vom Paar P, Q zu einem Tangentialvektor $u \in T_P$ überzugehen, und gleichzeitig $\mathrm{D}P \in \mathbf{V}^4_P$ mit u zu identifizieren – so wird die „Berührung" (1. Ordnung[9]) ausgedrückt. Damit wird natürlich $\mathbf{V}^4_P$ zum Tangentialraum T_P und $\mathbf{A}_P$ zum (metrisch-)*affinen Tangentialraum* $P + T_P$ (= T_P als Punktraum): die Übertragung von Vektoren $\in \mathbf{A}_P \subset \mathbf{V}^5_P$ wird zur Übertragung von Punkten desselben.

$\{b_\alpha\}$ wird so zu einer orthonormalen Tangentialbasis $\{e_\alpha\}$, und obige Gleichungen gehen über in $\mathrm{D}_u e_\alpha = \omega^\beta{}_\alpha(u) e_\beta$, $u = \omega^\alpha(u) e_\alpha$ oder

$$\mathrm{D}e_\alpha = \omega^\beta{}_\alpha e_\beta, \qquad \delta = \omega^\alpha \otimes e_\alpha, \tag{11.6.11}$$

wo δ wie früher die kanonische Verschmelzungsform des Tangentialbündels ist. Dann muß aber $\omega^\alpha = e^\alpha$, wo $\{e^\alpha\}$ die duale Kobasis zu $\{e_\alpha\}$ ist.

Die $\mathcal{P}$-Beziehung benachbarter $\mathbf{A}_P$, $\mathbf{A}_Q$ interpretiert Cartan als Verkörperung des Äquivalenzprinzips: lokal gilt die spezielle Relativitätstheorie, benachbarte Bezugssysteme $(e_{\alpha|P}, P)$ und $(e_{\alpha|Q}, Q)$ müssen durch eine infinitesimale $\mathcal{P}$-Transformation verbunden sein. Wie aus Aufgabe 4b zu Abschnitt 11.4 hervorgeht, ist diese Version etwas schwächer als die Einsteinsche.

[9] Bei Verwendung größerer Gruppen G statt $\mathcal{P}$ kann Berührung höherer Ordnung gefordert werden, um die „sparsamste" Struktur zu erzielen.

Man kann auch unter Beibehaltung der Interpretation der $\mathbf{A}_P$ als affine Tangentialräume $\omega^\alpha \neq e^\alpha$ wählen (verallgemeinerter Affinzusammenhang, vgl. Kobayashi & Nomizu (1963)), so daß dann $u = \overline{\omega^\alpha}(u)\, e_\alpha$ nur bei einer geeigneten anderen Translationseichung (Ursprungswahl P in $\mathbf{A}_P$) gelten kann. Man hat dann, was die $\omega^\alpha{}_\beta$, ω^γ anlangt, wieder volle $\mathcal{P}$-Kovarianz, aber ein zusätzliches Feld K in der Theorie ($\omega^\alpha = K^\alpha{}_\beta e^\beta$), die Eichinterpretation der e^α entfällt wieder. Dennoch wurde diese Situation in Verbindung mit der Gravitationstheorie diskutiert, wohl, um die zu diesen geeichten Translationen gehörenden Noetherströme einführen zu können. (Siehe z. B. R. J. Petti, GRG **7**, 869 (1976); ibid. **8**, 887 (1978)). Will man letzteres bei gebrochener Translationskovarianz tun, kann man *infinitesimale* geeichte Translationen (diese genügen für die Aufstellung der Noetherströme), die von obiger Ursprungswahl wegführen, umdeuten als Tangentialvektoren, wobei das entstehende Vektorfeld gemäß (2.10.1) eine infinitesimale „aktive" Koordinatentransformation definiert – unter solchen ist der Formalismus kovariant. Die vom flachen Raum gewohnte Wirkung von Translationen (und auch Rotationen) auf Felder $\varphi(x)$ über deren x-Abhängigkeit wird dabei durch infinitesimalen Paralleltransport längs dieses Vektorfeldes gedeutet (vgl. F. Hehl et al., Rev. Mod. Phys. **48**, 393 (1976). All diese Deutungen ändern jedoch nichts an der gewählten Kinematik, die wohl am klarsten in Termen von Hauptfaserbündeln beschrieben wird (vgl. A. Trautman, in Held (1980), Vol. I) und in diesem Bündelbild automatisch untergebracht sind, sofern sie überhaupt geometrisch und natürlich (frei von neuen Strukturelementen) sind. Ihre Rolle ist es wohl zum Teil, wie schon erwähnt, über die zugehörigen Noether-Theoreme Anhaltspunkte für die Wahl der Dynamik zu liefern, wobei man aber über ästhetische Argumente bisher kaum hinausgelangt ist.

Eine Möglichkeit besteht daher darin, zu gegebener Kinematik die allgemeinste mit den klassischen Experimenten verträgliche Dynamik anzusetzen und die Konsequenzen auszudiskutieren. Zugunsten der modifizierten Theorien ist anzuführen, daß in ihnen die erwähnten allgemeinen Theoreme über das Auftreten von Singularitäten nicht mehr gelten[10]; die bisher angegebenen Umstände, unter denen die Singularitäten vermieden werden, erscheinen jedoch physikalisch noch etwas künstlich[11].

11.7 Ausblick

Vom Standpunkt des Quantisierungsprogramms (via Feynman-Wegintegral), dessenthalben ja Eichversionen der Gravitationstheorie hauptsächlich propa-

[10] A. Trautman, loc. cit. und Nature (Phys. Sci.) **242**, 7 (1973); W. Kopczyński, Phys. Lett. **43A**, 63 (1973).

[11] J. Stewart, P. Hajicek, Nature (Phys. Sci.) **244**, 96 (1973).

giert wurden, hat sich dabei[12] ein Impaß ergeben: die erwähnten Ansätze haben entweder eine renormierbare Störungstheorie, oder eine unitäre S-Matrix, aber nicht beides zugleich. Andererseits ist vom physikalischen Standpunkt aus die Herstellung einer renormierbaren Störungstheorie nicht als das vorrangige Ziel anzusehen – jedenfalls ist nicht zu erwarten, daß höhere Quantenkorrekturen störungstheoretischer Art bald experimentell verifizierbar werden. Dennoch ist die Frage nach der Quantisierung des Gravitationsfeldes von prinzipieller Bedeutung, und vielfach erwartet man sich sogar von der Lösung des Problems auch die Lösung von Problemen, die in den Quantenfeldtheorien der Teilchenphysik nach wie vor bestehen; d.h., nur eine TOE („theory of everything") sollte frei von Kosistentproblemen aller Art sein. (Es entsteht bei diesem Begriff allerdings das Gefühl, daß sich dahinter ernstere erkenntnistheoretische Probleme verbergen.) Vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie sind es freilich ihre eigenen inneren Probleme – das Auftreten von Singularitäten in der Kosmologie und beim Gravitationskollaps –, welche nach einer möglichen Behebung durch Quantenbetrachtungen rufen.

Die diesbezüglichen Hoffnungen richten sich derzeit auf drei Möglichkeiten: 1. Superstrings und „nichtkommutative Differentialgeometrie", 2. Kanonische Quantisierung in geeigneten Variablen, 3. Feynman-Wegintegralquantisierung mit Integration über positiv-definite oder sogar komplexe Metriken. Es ist hier nicht der Ort, diese Zugänge zu diskutieren, zumal keiner von ihnen derzeit mit dem Experiment in Verbindung gebracht ist oder allgemein zeigen würde, wie das Problem der Singularitäten in der klassischen Theorie dabei gelöst wird. (Als Auswahlkriterium für die ungemein phantasievollen Ansätze in allen drei genannten Richtungen dient meist die Bedingung, daß die Hawkingstrahlung und Entropie der schwarzen Löcher sowie die erwähnte inflationäre Phase des frühesten Universums als Grenzfälle resultieren sollen.)

Als philosophische Herausforderung sei hier dazu nur angeführt, daß die berühmten Interpretationsprobleme der Quantenmechanik bei Anwesenheit schwarzer Löcher, vor allem aber im Zusammenhang mit der Kosmologie eine wesentliche Verschärfung erfahren, ja möglicherweise eine Änderung im grundlegenden Schema der Quantentheorie erfordern. Von W. Pauli soll die Vorhersage stammen, es würde noch mindestens 100 Jahre (von seinen Lebzeiten an gerechnet) brauchen, um der Vereinigung von Quantentheorie und allgemeiner Relativitätstheorie entscheidend näherzukommen. Es ist spannend, ob diese Vorhersage unterboten werden kann.

Aufgaben

1. Zeige, daß bei verschwindender Torsion $\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\,\Omega_{\alpha\beta}\wedge e^{\gamma} \propto *(G_{\delta\rho}\,e^{\rho})$, wo $G_{\delta\rho}$ der Einsteintensor (2.7.14) ist.

[12] P. van Nieuwenhuizen, in Isham, Penrose & Sciama (1981); Proc. GRG9 Conference, Jena 1980.

2. Zeige, daß für jede vektorielle p-Form A^α die Gleichung $A^{[\alpha} \wedge e^{\beta]} = 0$ für $n \geq p + 2$ $A^\alpha = 0$ impliziert.

3. Wie sieht die Bianchi-Identität für $\mathcal{P}$-Übertragungen aus?

4. $\mathsf{g} = \mathsf{h} \dot{+} \mathsf{k}$ sei eine die Reduktivitätsbedingung erfüllende Liealgebra und $\omega^a \boldsymbol{G}_a = \sum \omega^\mu \boldsymbol{H}_\mu + \sum \omega^\alpha \boldsymbol{K}_\alpha$ die entsprechende Zerlegung der Konnexionsmatrix. Zeige, daß die ω^α unter H tensoriell transformieren.

5. Stelle die Differentialgleichung für die „Parallelverschiebung" von Punkten des affinen Tangentialbündels längs einer gegebenen Kurve im Sinn der affinen Übertragung auf!

Anhang A

Bibliographie

A.1 Zitierte Bücher

Adler, R., Bazin, M., Schiffer, M. (1965): Introduction to General Relativity. New York: McGraw-Hill.

Anderson, J. (1967): Principles of Relativity Physics. New York: Academic Press.

Ashby, N., Bartlett, D., Wyss, W., Eds. (1990): Proceedings of the 12th International Conference on General Relativity and Gravitation. Cambridge: University Press.

Audretsch, J., Mainzer, K., Hrsg. (1988): Philosophie und Physik der Raumzeit. Grundlagen der exakten Naturwissenschaften, Bd. 7. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Audretsch, J., de Sabbata, V., Eds. (1990): Quantum Mechanics in Curved Space-Time. New York: Plenum Press.

Becher, P., Böhm, M., Joos, H. (1980): Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung. Stuttgart: Teubner.

Bergmann, P. G., de Sabbata, V., Eds. (1980): Cosmology and Gravitation Spin, Torsion, Rotation, and Supergravity. Nato Advanced Study Institutes Series. New York: Plenum Press.

Bjørken, J., Drell, S. (1966): Relativistische Quantenmechanik. Mannheim: BI-Hochschultaschenbücher 98.

Bjørken, J., Drell, S. (1967): Relativistische Quantenfeldtheorie. Mannheim: BI-Hochschultaschenbücher 101.

Blair, D., Ed. (1991):The Detection of Gravitational Waves. Cambridge: University Press.

Börner, G. (1992): The Early Universe. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Breuer, R. A. (1975):Gravitational Perturbation Theory and Synchrotron Radiation. Lecture Notes in Physics, Vol. 44. Berlin: Springer.

Brillouin, L. (1956): Science and Information Theory. New York: Academic Press.

Carmeli, M., Fickler, S., Witten, L., Eds. (1970): Relativity (Proceedings of the Midwest Conference on Relativity).London: Plenum Press.

Cartan, É. (1966):The Theory of Spinors. Cambridge: M. I. T. Press.

Chandrasekhar, S. (1983): The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford: Clarendon Press.

Ciufolini, I., Wheeler, J.A. (1995): Gravitation and Inertia. Princeton: University Press.

Cline, D.B., Ed. (2001): Sources and Detection of Dark Matter and Dark Energy in the Universe. Berlin: Springer.

Coles, P., Lucchin, F. (1995): Cosmology. Chichester: Wiley.

Conn, G. K. T., Fowler, G. N., Eds. (1972): Essays in Physics, Vol. 4. London: Academic Press.

Courant, R., Hilbert, D. (1962): Methods of Mathematical Physics. New York: Interscience. (Die ältere deutsche Ausgabe, bei Springer in den Heidelberger Taschenbüchern neu aufgelegt, verwendet noch keine Distributionen.)

Demianski, M., Everitt, C., Eds. (1993): Relativistic Gravitational Experiments in Space. Singapore: World Scientific.

Deser, S., Lévy, M., Eds. (1979): Recent Developments in Gravitation (Cargèse 1978). New York: Plenum Press.

Deser, S., Ford, W., Eds. (1965): Brandeis Summer Institute 1964, Vol. 1. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.

Dieudonné, J. (1976): Grundzüge der modernen Analysis, Band 3,4. Braunschweig: Vieweg.

Duhem, D. (1954): The Aim and Structure of Physical Theory. Princeton: University Press.

Ehlers, J., Ed. (1972): Extended Gravitating Systems in General Relativity. Amsterdam: North Holland.

Eisenhart, L. (1960): Riemannian Geometry. Princeton: University Press. 4. Aufl. 1960. 6. Aufl. 1966.

Esposito, F. P., Witten, L., Eds. (1977): Asymptotic Structure of Space-Time. New York: Plenum Press.

Ferrara, S., Ellis, J., van Nieuwenhuizen, P., Eds. (1980):Unification of the Fundamental Particle Interactions. New York: Plenum Press.

Feynman, R. (1969): Quantenelektrodynamik. Mannheim: BI-Hochschultaschenbücher 401.

de Finis, J., Ed. (1979): Relativity, Quanta and Cosmology in the Development of the Scientific Thought of Albert Einstein, Vol. 1. New York: Johnson Reprint.

Flügge, S. (1964): Quantenmechanik 1. Berlin: Springer.

Fock, W. (1960): Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. Berlin: Akademie-Verlag.

Friedlander, F. G. (1975): The wave equation on a curved space-time. Cambridge: University Press.

Fulling, S. (1989): Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space. Cambridge: University Press.

Gleiser, R., Kozameh, C., Moreschi, O., Eds. (1993): Proceedings of the 13th Internetional Conference on General Relativity and Gravitation. Bristol: I. O. P. P.

Goenner, H. (1994): Einführung in die Kosmologie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Greub, W. (1978): Linear Algebra. Springer 1975. Multilinear Algebra. Springer.

Grünbaum, A. (1963): Philosophical Problems of Space and Time. New York: A. Knopf.

Hadamard, J. (1952): Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. New York: Dover.

Hawking, S., Ellis, G. (1973): The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge: University Press.

Hawking, S., Israel, W., Eds. (1979): General Relativity. An Einstein Centenary Survey. Cambridge: University Press.

Hawking, S., Israel, W., Eds. (1987): 300 Years of Gravitation. Cambridge: University Press.

Held, A., Ed. (1980): General Relativity and Gravitation One Hundred Years after the Birth of Albert Einstein, Vol. I, 2. New York: Plenum Press.

Henley, E., Thirring, W. (1975): Elementare Quantenfeldtheorie. Zürich: Bibliographisches Institut.

Huang, K. (1964): Statistische Mechanik II. Mannheim: BI-Hochschultaschenbücher 69.

Isham, C., Penrose, R., Sciama, D. W., Eds. (1975):Quantum Gravity. An Oxford Symposium. Oxford: Clarendon Press.

Isham, C., Penrose, R., Sciama, D. W., Eds. (1981): Quantum Gravity II. An Oxford Symposium. Oxford: Clarendon Press.

Jaki, S. (1969): The Paradox of Olbers' Paradox. New York: Herder & Herder.

Janis, A., Porter, J., Eds. (1992): Recent Advances in General Relativity. Essays in Honor of E. T. Newman. Einstein Studies. Vol 4. Boston: Birkhäuser.

Kafatos, M., Ed. (1988): Supermassive Black Holes. Cambridge: University Press.

Karim, M., Quadir, A., Eds. (1994): Experimental Gravitation. Bristol: I. O. P. P.

Klauder, J., Ed. (1972): Magic without Magic: John Archibald Wheeler. San Francisco: Freeman.

Kobayashi, S., Nomizu, K. (1963): Foundations of Differential Geometry, Vol. 1. New York: Interscience.

Kobayashi, S., Nomizu, K. (1969):Foundations of Differential Geometry. Vol. 2. New York: Interscience.

Kolb, E., Turner, M. (1990): The Early Universe. (Frontiers in Physics). Redwood City: Addison-Wesley.

Landau, L., Lifschitz, E. (1971). Bd. 2: Klassische Feldtheorie. Berlin: Akademie-Verlag. Berichtigte und ergänzte Auflage.

Landau, L., Lifschitz, E. (1971), Bd. 3: Quantentheorie. Berlin: Akademie-Verlag (4. Aufl.).

Landau, L. D., Lifschitz, E. M. (1969): Statistische Physik. Berlin: Akademie-Verlag.

Lebovitz, N. R., Ed. (1978): Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity. Univ. of Chicago Press.

Lichnérowicz, A. (1966): Einführung in die Tensoranalysis. Mannheim: BI-Hochschultaschenbücher 77.

Linde, A. (1993): Elementarteilchen und inflationärer Kosmos. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

MacCallum, M. A. H., Ed. (1987): Proceedings of the 11th International Conference on General Relativity and Gravitation. Cambridge: University Press.

Marder, L. (1971): Time and the Space Traveler. London: George Allen & Unwin.

Meschkowski, H. (1971): Mathematisches Begriffswörterbuch. Mannheim: BI-Hochschultaschenbuch 99. 3., erweiterte Auflage.

Meystre, P., Scully, M., Eds. (1983): Quantum Optics, Experimental Gravity, and Quantum Measurement. New York: Plenum.

Michelson, P., En-Ke, H., Pizzella, G., Eds. (1988): Experimental Gravitational Physics. Singapore: World Scientific.

Misner, C., Thorne, K., Wheeler, J. (1973): Gravitation. San Francisco: Freeman.

Møller, Ch., Ed. (1962): Evidence for Gravitational Theories. (Proceedings of the 1961 E. Fermi Summer School. Varenna. XX. Course). New York: Academic Press.

Moore, A. F., Hardy, V., Eds. (1970): The Significance of Space Research for Fundamental Physics. ESRO SP. 52. Paris.

Müller, R. (1964): Astronomische Begriffe. Mannheim: BI-Hochschultaschenbücher 57. 57a.

Nash, C. (1978): Relativistic Quantum Fields. London: Academic Press.

Perlmutter, A., Scott, L., Eds. (1979): On the Path of Albert Einstein. (Proc. Orbis Scientiae). New York: Plenum Press.

Poincaré, H. (1946): The Foundations of Science. Lancaster: The Science Press.

Raschewski, L. (1959): Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Reichenbach, H. (1958): The Philosophy of Space and Time. New York: Dover.

Robinson, I., Schild, A., Schücking, E., Eds. (1965): Quasistellar Sources and Gravitational Collapse. Chicago: University Press.

Ruffini, R., Ed. (1977): Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting On General Relativity. Amsterdam: North Holland.

Ruffini, R., Ed. (1982): Proceedings of the Second Marcel Grossmann Meeting on the Fundamentals of General Relativity. Amsterdam: North Holland.

Ruffini, R., Series Editor (1989), (1992): Proceedings of the Fifth Marcel Grossmann Meeting on the Fundamentals of General Relativity, D. Blair, M. Buckingham, Eds.; Proceedings of the Sixth Marcel Grossmann Meeting on the Fundamentals of General Relativity, H. Sato, T. Nakamura, Eds. Singapore: World Scientific.

de Sabbata, V., Zhang, Zh., Eds. (1992): Black Hole Physics. Dordrecht: Kluwer.

Sachs, R., Ed. (1971): General Relativity and Cosmology. (Proceedings of the 1959 E. Fermi Summer School, Varenna, XLVII. Course). London, New York: Academic Press.

Saulson, P. (1994): Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors. Singapore: World Scientific.

Schmidt, H.K., Sexl, R. (1979): Raum, Zeit, Relativität. 2. Auflage. Braunschweig: Vieweg.

Schneider, P., Ehlers, J., Falco, E. (1992): Gravitational Lenses. Berlin: Springer.

Schrödinger, E. (1956): Expanding Universes. Cambridge: University Press.

Sexl, H., Sexl, R. (1981): Weiße Zwerge, Schwarze Löcher. 3. Auflage. Braunschweig: Vieweg.

Sexl, R., Urbantke, H. (1992): Relativität, Gruppen, Teilchen. Spezielle Relativitätstheorie als Grundlage der Feld- und Teilchenphysik. 3. Auflage. Wien: Springer.

Smarr, L., Ed. (1979): Sources of Gravitational Radiation. Cambridge: Univ. Press.

Spivak, M. (1965): Calculus on Manifolds. New York: Benjamin.

Taylor, J.C. (1976): Gauge Theories of Weak Interactions. Cambridge: University Press.

Thirring, W. (1958): Principles of Quantum Electrodynamics. New York: Academic Press.

Tolman, R. (1934): Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford: Clarendon Press.

Wald, R. (1994): Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics. Chicago: University Press.

Weber, J. (1961): General Relativity and Gravitational Waves. New York: Interscience. Siehe auch Artikel in Møller (1962).

Weinberg, S. (1972): Gravitation & Cosmology. New York: Wiley.

Weinberg, S. (1980): Die ersten drei Minuten. München: Deutscher Taschenbuch-Verlag.

Wheeler, C., Martel, H., Eds. (2001): Relativistic Astrophysics. (Proc. 20th Texas Symp.) American Institute of Physics.

Will, C.M. (1979), (1993): Theory and Experiment in Gravitational Physics. Revised edition. Cambridge: University Press.

DeWitt, C., Wheeler, J., Eds. (1968): Battelle Rencontres 1967. New York: Benjamin.

DeWitt, C., DeWitt, B., Eds. (1964): Relativity, Groups, and Topology (Les Houches Summer School 1963). New York, London: Gordon and Breach.

DeWitt, C., DeWitt, B., Eds. (1973): Black Holes (Les Houches Summer School 1972). New York: Gordon and Breach.

Witten, L., Ed. (1962): Gravitation: An Introduction to Current Research. New York: Wiley.

A.2 Einige mathematische Lehrbücher

Flanders, H. (1963): Differential Forms. New York: Academic Press.

Reichardt, H. (1957): Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Storch, U., Wiebe, H. (2001): Lehrbuch der Mathematik, Bd. IV: Analysis auf Mannigfaltigkeiten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Register

Ablenkung von Radiowellen, 94
absolutes Differential, 187, 304
Absorptionsquerschnitt eines Detektors, 159
affine Übertragung, 186, 345
affiner Parameter, 17, 312
affiner Tangentialraum, 345
affingeodätische Kurve, 312
aktive schwere Masse, 61, 79
Akzelerationsparameter, 138
allgemeine Kovarianz, 100
alternierende Differentialformen, 183
alternierendes Produkt, 180
Anfangsbedingungen, 56
anholonome n-Bein-Felder, 173
Anholonomiekoeffizienten, 174, 189
anthropisches Prinzip, 151
Antimaterie, 82, 148
antisymmetrisches Symbol, 5
Äquivalenzprinzip, 12, 77, 153, 292
Ausbreitungsvorgänge, 266
äußere Ableitung, 183
äußere Algebra, 180
äußere Differentialformen, 183
äußere Differentialformen mit Werten in Vektorbündeln, 306
äußeres Produkt, 180
äußeres absolutes Differential, 307

bündelwertige Formen, 306
Baryonendichte, 117, 217
Basisvektoren, 173
Beobachterfeld, 116
beschleunigte Koordinatensysteme, 10
Bewegung im Gravitationsfeld, 15
Bewegungsgleichungen, 55, 73, 77, 106
Bewegungsgruppe, 45
Bianchi-Identitäten, 39, 54, 75, 309
Bicharakteristiken, 267
Bindungsenergie, 217, 252
Birkhoff-Theorem, 67

Cartansche Strukturgleichung, 307, 309
Chandrasekhar-Grenzmasse, 209, 211
chaotisches Universum, 151
Charakteristiken, 267
Charakteristiken der Einsteingleichungen, 283
charakteristische Hyperflächen, 267
charakteristisches Konoid, 267
Chern-Formen, 322
Christoffel-Symbole, 16, 187, 189
Christoffel-Symbole 2. Art, 17
Continuous Creation, 299
Cygnus X1, 262

d'Alembert-Operator, 35
de Sitter-Modelle, 141, 232
Detektor für Gravitationswellen, 157
Differentiale, 175
Differentialform, 177

Differentialformenversion der Maxwell-Gleichungen, 277
differenzierbare Mannigfaltigkeiten, 21
Dilatation, 121
Dirac-Gleichung, 55, 280
Diracsche Hypothese, 299
Diracsche Quantisierungsbedingung, 331
Doppelpulsar, 169
drehinvariante Linienelemente, 62, 195
drehinvariantes Vektorfeld, 51
duale Basis, 176
dualer Vektorraum, 176

Eötvös-Dicke Experiment, 81
echte Singularität, 229, 242
effektives Potential, 88, 251
Eichfeldstärke, 328
Eichgruppe, 316, 327
Eichinvarianz, 58, 288
Eichpotential, 328
Eichtheorien, 326
Eichtransformationen, 58, 154, 288, 327
Eigenzeit, 9
Eimerversuch, 99
Einbettung, 220
Einbettungsdiagramme, 223, 239
Einstein-de Sitter-Universum, 136
Einstein-Tensor, 40
Einstein-Universum, 113, 135
elektromagnetisches Feld, 273
elliptisch, 27
Elliptische Polarisation, 157
endliches Universum, 133
Energie-Impuls-Tensor, 54, 74, 115
Energie-Impulsvektor, 198
Energiedichte, 133, 159
Energiedichte des Vakuums, 122
Energiestrom, 159
Energieverlust, 162
Entfernungsmessungen, 95
Entropie, 118
Entropie schwarzer Löcher, 254
Ereignishorizont, 151, 227
Ergosphäre, 242, 248
Erhaltungsgrößen, 46
Erhaltungssätze, 54, 75
Euklidisches Universum, 133
Euler-Form, 323
Euler-Gleichungen, 16, 117
exakte Form, 184
Expansion, 109
extreme Kerr-Metrik, 248

Fallexperimente, 83
Fasermetrik, 312
Fasern eines Vektorbündels, 302
Feinstrukturkonstante, 84
Feinstrukturkonstante der Graviation, 210
Feldgleichungen, 53, 77
Fermi-Walker-Verschiebung, 36
Fernparallelismus, 314, 343
Finsler-Geometrie, 187
Fock-Iwanenko-Koeffizienten, 283
frühes Universum, 145
Friedmann-Gleichung, 134
Friedmann-Modelle, 124

G-Basen, 313
G-Struktur, 313
G-Übertragung, 314
Gödelsches Linienelement, 198
gefangene Flächen, 246
gekrümmter Raum, 15
Geodätische, 17, 28, 55
geodätische Präzession, 104
geodätischer Abstand, 268
Geometrie der Schwarzschild-Metrik, 220
geschlossene Formen, 321
Gezeitenkräfte, 55, 231
Graßmann-Algebra, 180
Gradient, 24
Gravitations-Selbstenergie, 217

Jacobi-Identität, 39, 174

kanonische Form, 307, 345
Kausalstruktur, 267
Kerr-Metrik, 240
Kerr-Newman-Lösung, 241
Killing-Gleichung, 45
Killing-Horizont, 244
Kollapszeit, 239
Kompensationsfeld, 327
komplexer Vektorraum, 303
konform-flach, 42
konforme Struktur, 328
Konformität zweier Räume, 42
Konnexion, 186
Kontinuitätsgleichung, 112, 117
Kontraktion, 25
kontravariante Vektoren, 24
kontravarianter metrischer Tensor, 17
konvektive Ableitung, 115
Koordinatensingularität, 130
Koordinatensystem, 21
Koordinatentransformationen, 22
kosmische Hintergrundstrahlung, 126
kosmische Zensur, 248
kosmologische Konstante, 113, 122
kosmologisches Prinzip, 110
Kotangentialbündel, 303
Kotangentialraum, 176
Kotangentialvektoren, 176
kovariante Ableitung, 32, 304
kovariante Differentiation, 32, 304
kovariante Maxwellgleichungen, 274
kovariante Vektoren, 24
kovarianter metrischer Tensor, 17
kovariantes Differential eines Dirac-Spinors, 280
Kovektorfelder, 177
Krümmumgstensor, 36, 188

krümmungsdominiertes Universum, 134
Krümmungsform, 308
Krümmungsmatrix, 309
Krümmungsradius des Raumes, 134
Kreiselexperimente, 104
Kruskalsches Koordiatensystem, 223

Lagrange-Funktion, 70, 73
Lagrange-Parameter, 119, 128
Lagrangefunktion des Gravitationsfelds in linearer Näherung, 159
Laue-Theorem, 61, 161
Lemaitre-Universum, 136
Lichtablenkung, 87, 93
Lichtstrahlen, 17
Lie-Ableitung, 45, 51, 174
Lie-Klammer, 174
linearisierte Feldgleichungen, 57
Linearpolarisation, 157
Linienelement, 8
Linienelement in der linearen Näherung, 59
Lorentz-Signatur, 27
Lorentz-Transformationen, 8, 198, 279
lorentzkovariante Gravitationstheorie, 287

Machsches Prinzip, 99
magnetische Monopole, 331
Mannigfaltigkeit, 22
Massendefekt, 218
Massenspektrum der Neutronensterne, 211
Massenspektrum entarteter Sterne, 212
Massenspektrum Weißer Zwerge, 210
materiedominiertes Universum, 134
maximale analytische Ausdehnung, 223
Maxwell-Gleichungen, 185
metrischer Tensor, 10, 14, 26
Mixmaster-Universum, 151

n-Bein-Feld, 173
nackte Singularitäten, 233, 242, 248
Nebelzählung, 128
Neutronensterne, 211, 262
Newtonsche Kosmologie, 133
Newtonsche Näherung, 91
Newtonsche Theorie, 56, 78
Nichtlinearität der Einsteinschen Theorie, 54, 288
normalhyperbolisch, 27
Nullgeodätische, 17, 267
Nullhyperflächen, 267

Oberfläche eines schwarzen Loches, 245
Oberflächensatz, 250
Olberssches Paradoxon, 111
Orientierbarkeit, 315
Orientierbarkeit -Raum, 335
Orientierbarkeit -Zeit, 335
Orthonormalbasen, 179, 189

Palatini-Prinzip, 340
Parallelisierbarkeit, 336
Parallelverschiebung, 35, 40, 308
Parameterdarstellung, 22
passive schwere Masse, 79
Penrose-Prozesse, 249
Perihelverschiebung, 62, 87, 92
Planck-Länge, 255, 258
Planck-Masse, 255
Planck-Zeit, 148, 259
Poincarésches Lemma, 184
Polarisationsellipse, 157
Polarisationsfreiheitsgrade ebener Gravitationswellen, 155
Polarisationszustände, 156

Scherung, 121
Schnitte eines Vektorbündels, 302
Schrumpfen von Maßstäben, 294
schwache Gravitationsfelder, 56
Schwanz der Greenfunktion, 271, 277
schwarze Löcher, 234, 243, 246
schwarze Strahlung, 125
schwarze Strahlung schwarzer Löcher, 258
Schwarzschild-Linienelement, 67
Schwarzschild-Metrik, 62, 88, 215
Schwarzschild-Radius, 19, 89
Schwarzschild-Singularität, 68
schwere Masse, 12
Selbstkopplung des Gravitationsfelds, 295
Sender für Gravitationswellen, 164
Shapiro-Effekt, 96, 296
Shapiro-Experiment, 95
Skalar-Tensor-Theorie, 290, 297
skalare Theorie der Gravitation, 290
skalares Feld, 23, 48, 268
skalares Produkt, 179
skalares Volumselsement, 201
Spinkoeffizienten, 189
Spinoren, 279
Spinstruktur, 335
Stabilitätsgrenze, 218
stationär, 46, 102
stationäre Beobachter, 51, 241
stationäre Metrik, 46
statisch, 46
statische Beobachter, 241
statische Metrik, 46
Steady-State-Theorie, 299
stellares Gleichgewicht, 205
Stern-Operator, 182
Stokesscher Integralsatz, 199
strahlungsdominiertes Universum, 134
Strahlungsrückwirkung, 276
Streuung am Gravitationsfeld, 270

Stromlinien, 119
Strukturgruppe, 316
Superradianz, 249
Symmetrieeigenschaften des Riemann-Tensors, 37
Symmetriegruppe eines konstant gekrümmten Raumes, 47
Symmetriegruppen, 44
symmetrischer Energie-Impulstensor, 74

Tangentialbündel, 303
Tangentialraum, 172, 173
Tangentialvektor, 172
Teilchen-Antiteilchenpaare, 146
Teilmannigfaltigkeit, 22
Temperatur, 118
Temperatur schwarzer Löcher, 255
Tensor, 24, 179
Tensoralgebra, 25, 179
Tensorfelder, 48
tensorielle Differentialformen, 185
Tensorprodukt, 25, 178
Thirring-Lense-Effekt, 100
Thirring-Schiff-Effekt, 104
Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung, 215
Torsion, 187, 307
Torsionsform, 307
träge Masse, 12, 79

Überschiebung, 25
Übertragung, 186, 304
Übertragungskoeffizienten, 187
Übertragungsmatrix, 304
Uhreneffekt, erster, 9
Uhreneffekt, zweiter, 329
Uhrenparadoxon, 9, 97
ultrahyperbolisch, 27
Urknall, 145

variable Gravitationskonstante, 299
Variationsprinzip, 70, 87
Variationsprinzip für Geodätische, 16
Vektorbündel, 302
Vektorfeld, 23, 173
vektorielles Hyperflächenelement, 202
Veränderlichkeit der Ruhmassen, 300
Verallgemeinerte Gravitationstheorien, 297
vereinheitlichte Feldtheorie, 187
Verjüngung, 25
Verschmelzugsform, 307
Viererstrom, 185
Volumdilatation, 121

Webersche Experimente, 167
weiße Zwerge, 87
weiße Löcher, 242, 247
weiße Zwerge, 209
Wellenfronten, 266
Wellengleichung, 153
Welthorizont, 149
wesentliche Torsion, 317
Weylscher konformer Krümmungstensor, 42
Winkelverteilung der Strahlung, 162
Wirkungsintegral, 72

Yang-Mills-Feld, 332

Zeitdilatation, 97
Zirkularpolarisation, 157
Zusammenhang, 186
Zustandsgleichung, 118
Zustandsgleichung entarteter Materie, 208
Zustandsgleichung normaler Sterne, 206